Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 3 novembre 2008

ESERCIZIO 1. *Si determinino gli elementi degli insiemi*

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 - i = 0 \}, \qquad B = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^3 + 1 = 0 \},$$

(a) *Si disegnino sul piano di Gauss gli insiemi* A, B *e* $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0 < \Im z \}$.

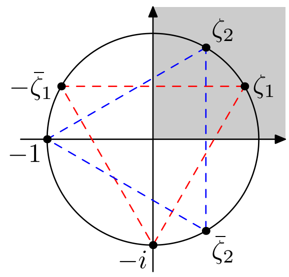
(b) *Siano* $\{\zeta_1\} = A \cap C$ *e* $\{\zeta_2\} = B \cap C$. *È vero che* $(\zeta_1+\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2)$ *è un numero reale e* $\frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2}$ *è un numero immaginario? (calcolarli)*

(c) *Nel piano di Gauss, si determini l'area del parallelogramma di vertici* 0, ζ_1, ζ_2, $\zeta_1+\zeta_2$.

(d) *Si dia una condizione necessaria e sufficiente sui numeri complessi* $z_1 \neq z_2$, *affinché* $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ *sia un numero immaginario.*

Svolgimento.

(a) Gli elementi di A sono, $\zeta_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$, $-i$ e $-\bar\zeta_1$. Gli elementi di B sono, $\zeta_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1 e $\bar\zeta_2$. Infine C è il primo quadrante nel piano di Gauss (superiore destro). Possiamo quindi tracciare il disegno qui a fianco, ove l'area ombreggiata rappresenta l'insieme C.



(b) Si ha $\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$ e $\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$, da cui si deduce

$$(\zeta_1+\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2) = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\zeta_1+\zeta_2}{\zeta_1-\zeta_2} = i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.$$

(c) I numeri complessi ζ_1 e ζ_2 hanno entrambi modulo 1 e quindi il parallelogramma è un rombo, per cui la sua area è uguale a metà del prodotto delle lunghezze delle diagonali, ovvero $Area = \frac{1}{2}|\zeta_1+\zeta_2||\zeta_1-\zeta_2| = \frac{1}{2}$.

(d) Si ha

$$\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2} = \frac{(z_1+z_2)(\bar z_1 - \bar z_2)}{|z_1-z_2|^2} = \frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2} + \frac{z_2\bar z_1 - z_1\bar z_2}{|z_1-z_2|^2}.$$

Il primo addendo è la parte reale ed il secondo la parte immaginaria e quindi $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$ è un numero puramente immaginario se, e solo se, $|z_1| = |z_2|$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$ *si considerino i sottospazi*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

(*a*) *Si esibisca una base e si scriva un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi. Si verifichi se* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(*b*) *Detta* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^4$, *si scriva la matrice* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, *ove* $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *è la proiezione su* U *parallelamente a* W.
(*c*) *Sia* r *il rango di* π. *Si determini, se esiste, una base* $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ *di* $\mathbb{R}^4$, *tale che* $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(matrice a blocchi). Esistono delle basi* $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, *di* $\mathbb{R}^4$, *tali che* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\pi) = \begin{pmatrix} 3 \cdot \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(matrice a blocchi)?*
(*d*) *Sia* $\mathscr{C} = \{ \phi \in Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \pi \circ \phi = 0 = \phi \circ \pi \}$. *Si dica se* $\mathscr{C}$ *è un sottospazio di* $Hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *e se ne determini l'eventuale dimensione.*

Svolgimento. (a) Siano v_1, v_2, v_3 i tre generatori dati del sottospazio U. Si ha $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$ e quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti, ma due qualsiasi tra questi formano una base di U, ad esempio v_1 e v_2. Un sistema di equazioni cartesiane per U è $\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Per quanto riguarda W, le tre equazioni date sono dipendenti: la seconda è somma della prima con la terza. Due qualsiasi tra le tre equazioni date formano un sistema minimale di equazioni cartesiane per W, ad esempio la prima e la terza. Due soluzioni indipendenti di tale sistema formano una base di W; ad esempio i vettori $w_1 = 2e_1 + e_2 + 2e_3$ e $w_2 = e_2 - 2e_3 + 2e_4$. Si verifica con un calcolo diretto che i quattro vettori v_1, v_2, w_1 e w_2 sono indipendenti e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Sia $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ un generico elemento di $\mathbb{R}^4$. La sua proiezione su U, $\pi(x) = a_1 v_1 + a_2 v_2$, è determinata dalla condizione $x - \pi(x) \in W$, ovvero dalle equazioni

$$\begin{cases} 3a_1 + a_2 = x_1 - 2x_2 + x_4 \\ 2a_1 - a_2 = x_1 - x_3 - x_4 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{2x_1 - 2x_2 - x_3}{5} \\ a_2 = \frac{-x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4}{5} \end{cases}.$$

Si ottiene così,

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & -5 \\ -4 & -6 & 7 & 10 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Basta prendere $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = w_1$, $u_4 = w_2$, per ottenere una base, $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, rispetto alla quale π ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basta prendere, $\mathcal{V} = \{3u_1, 3u_2, u_3, u_4\}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{U}$, per ottenere le basi cercate.
(*d*) $\mathscr{C}$ contiene lo 0 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ ed è chiuso per combinazioni lineari. Dunque è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$. Ogni elemento di $\mathscr{C}$ manda a zero i vettori di U ed agisce come endomorfismo sul sottospazio W. Si tratta quindi di un sottospazio di dimensione 4 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$, isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, W)$[(†)]. □

(†) L'isomorfismo è l'applicazione che associa ad ogni elemento di $\mathscr{C}$ la sua restrizione al sottospazio W.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 9 dicembre 2008

ESERCIZIO 1. *Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1+x_3 \\ x_1+3x_2-x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi)$, ove con $\mathcal{E}$ si indicano, come di consueto le basi canoniche dei due spazi. Si determini la dimensione ed una base per i sottospazi $\ker\varphi$ ed $\mathrm{im}\varphi$.*

(b) *Si consideri l'applicazione $\Phi : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\Phi(X) = AX$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ.*

(c) *Si determinino, quando esistono, tutte le inverse destre o sinistre di φ e di Φ.*

(d) (*) *Sia $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ un'inversa (destra o sinistra) di φ e sia $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\psi)$ la sua matrice nelle basi canoniche dei due spazi. È vero che l'applicazione $\Psi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\Psi(Y) = BY$, è un'inversa (destra o sinistra) di Φ? Sono tutte di questo tipo le inverse di Φ? C'è modo di caratterizzare le inverse di questo tipo?*

Svolgimento. (a) Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{e} \quad \ker\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \mathrm{im}\,\varphi = \mathbb{R}^2.$$

(b) Anche Φ è suriettiva e si ha

$$\ker\Phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Esistono solo inverse destre per φ e Φ, perché non sono iniettive. Le inverse destre di φ sono l'insieme $\Phi^{-1}(\mathbf{1}_2)$ (controimmagine di $\mathbf{1}_2$ tramite Φ) e quindi sono le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} + \ker\Phi.$$

Le inverse destre di Φ sono in corrispondenza biunivoca con il prodotto diretto delle controimmagini tramite Φ dei quattro elementi della base canonica di $M_2(\mathbb{R})$, ovvero

$$\left(\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} + \ker\Phi\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} + \ker\Phi\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ker\Phi\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ker\Phi\right).$$

Chi vuole, può rappresentare gli elementi di questo sottospazio affine (di dimensione 8) tramite matrici 6×4.

(d) È vero che si possono costruire nel modo descritto sopra delle inverse destre per Φ a partire dalle inverse destre di φ. Un semplice calcolo di dimensioni permette di concludere che non sono tutte di questo tipo. Lasciamo al lettore il compito di dare una caratterizzazione di queste inverse nell'insieme di tutte le inverse di Φ, a seconda del modo scelto per rappresentarle (ad esempio, in termini di matrici 6×4 sono quelle...). □

ESERCIZIO 2. *Sia n un intero maggiore o uguale a 3 e si considerino le matrici $Z_n \in M_n(C)$, definite da*

$$Z_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \varepsilon(1,j) + \sum_{j=2}^{n-1} b_j \varepsilon(j, n+1-j) + \sum_{j=1}^{n} c_j \varepsilon(n,j),$$

(*) Domanda opzionale per aumentare il punteggio.

ove gli scalari $a_1, \dots, c_n$ appartengono a C ed $\{ \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i,j \le n \}$, è la base canonica di $M_n(C)$ [matrici a forma di zeta o "matrici di Zorro"(?)].
(a) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di Z_3, Z_4.*
(b) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di Z_5 e Z_6.*
(c) *Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det Z_n$, al variare di n.*
(d) $^{(*)}$ *Sia X un'indeterminata e si calcoli il polinomio $\det(X\mathbf{1}_n - Z_n)$.*

Svolgimento. (a) Si ha $\det Z_3 = b_2(a_1c_3 - a_3c_1)$ e $\det Z_4 = -b_2b_3(a_1c_4 - a_4c_1)$.

(b) Si ha $\det Z_5 = -b_2b_3b_4(a_1c_5 - a_5c_1)$ e $\det Z_6 = b_2b_3b_4b_5(a_1c_6 - a_6c_1)$.

(c) Si ha $\det Z_n = (-1)^{\binom{n-2}{2}} b_2 \cdots b_{n-1}(a_1c_n - a_nc_1)$; infatti, scambiando l'ultima riga della matrice Z_n con le precedenti, fino a portarla al secondo posto e facendo lo stesso con le colonne ci si riduce al prodotto di un determinante 2×2 e del determinante di un blocco antidiagonale di ordine $n-2$.

(d) Facendo le stesse operazioni elementari si ottiene

$$\det(X\mathbf{1}_n - Z_n) = \begin{cases} [(X-a_1)(X-c_n) - a_nc_1](X^2 - b_2b_{n-1}) \cdots (X^2 - b_{n/2}b_{1+n/2}) & \text{se } n \text{ è pari} \\ [(X-a_1)(X-c_n) - a_nc_1](X^2 - b_2b_{n-1}) \cdots (X - b_{(n+1)/2}) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

che conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su C e sia $S \neq \varnothing$ un sottoinsieme di $V^* = Hom_C(V, C)$.*
(a) *È vero che gli elementi di S generano V^* se, e solo se, $\bigcap_{\zeta \in S} \ker\zeta = \langle 0 \rangle$?*
(b) *È vero che gli elementi di S sono linearmente indipendenti se, e solo se, per ogni elemento $\zeta_0 \in S$, esiste un vettore, $v_0 \in V$, che appartiene a $\bigcap_{\zeta_0 \neq \zeta \in S} \ker\zeta$, ma non appartiene a $\ker\zeta_0$?*

Svolgimento. (a) Dato $\zeta \in V^*$, si ha $\langle \zeta \rangle^\perp = \{ v \in V \mid \zeta \circ v = 0 \} = \ker\zeta$. Quindi $\bigcap_{\zeta \in S} \ker\zeta = \langle S \rangle^\perp$.

(b) Se $a_1\zeta_1 + \cdots + a_k\zeta_k = 0$ è una combinazione lineare di elementi di S, sia $v_1 \in V$ il vettore che appartiene a $\bigcap_{j \neq 1} \ker\zeta_j$, ma non appartiene a $\ker\zeta_1$. Allora, si ha

$$0 = (a_1\zeta_1 + \cdots + a_k\zeta_k) \circ v_1 = a_1.$$

Ragionando analogamente sugli altri addendi, si conclude che tutti i coefficienti sono nulli. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 dicembre 2008

ESERCIZIO 1. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione.

(b) Si determinino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ passi per z_1 e z_2.

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

ESERCIZIO 2. Si consideri, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + X_3 + 2tX_4 = t+1 \\ tX_2 + X_4 = -1 \\ (1-t)X_1 - tX_2 + tX_3 - (2t+1)X_4 + X_5 = -t \\ (t-1)X_1 + X_3 + (t+1)X_4 = 2 \end{cases}$$

(a) Si determinino i ranghi del sistema Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si determinino le soluzioni del sistema al variare di t.

(c) (*) Si discuta lo stesso problema supponendo che i coefficienti del sistema appartengano al corpo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e al corpo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base.

(a) Si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\varphi)$ di tutte le applicazioni lineari, $\phi : V \to V$, soddisfacenti alle condizioni

$$\phi(2v_1 + v_2) = 2v_1 - v_2, \quad \phi(v_1 + 2v_2 - v_3) = v_1 - v_2 + v_3, \quad \phi(v_1 - v_2 + v_3) = v_1 - v_3.$$

(b) Siano ϕ_1 e ϕ_2 due applicazioni descritte al punto (a). Si determini il nucleo di $\phi_2 - \phi_1$. Si dica se esistono ϕ_1 e ϕ_2 soddisfacenti alla condizione $\phi_2(v_1) = 2v_1 + 4v_3 = 2\phi_1(v_1)$. In caso affermativo, si determini $\mathrm{im}\,(\phi_2 - \phi_1)$.

(c) Le applicazioni, ϕ, descritte al punto (a) sono tutte invertibili? In caso contrario, si dia una condizione necessaria e sufficiente su $\phi(v_1 + v_2 + v_3)$ affinché ϕ sia invertibile.

ESERCIZIO 4.

(a) Si calcolino i determinanti delle matrici

$$D_5 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & x_4 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D_6 = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & x_5 & 0 \\ x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 \end{pmatrix}.$$

(b) Si enunci e si dimostri una formula generale per il determinante di D_n al variare di n.

(*) Domanda opzionale per aumentare il punteggio.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 gennaio 2009

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 - 2iX - 5 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino i numeri complessi, z_1 e z_2, tali che $P(z_1) = 0 = P(z_2)$, sapendo che $\Re z_1 \geq \Re z_2$.

(b) Si disegni nel piano di Gauss l'insieme, D_2, formato dai punti, $z \in \mathbb{C}$, la cui distanza da z_1 è maggiore del doppio della distanza da z_2.

(c) Al variare di α tra i numeri reali positivi, si determini l'insieme D_α, formato dai punti, z, la cui distanza da z_1 è maggiore di α volte la distanza di z da z_2. È vero che, per ogni α, l'insieme D_α è delimitato da una circonferenza del piano di Gauss? Che dire di raggio e centro di queste circonferenze?

ESERCIZIO 2. Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, si consideri il sistema lineare

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-2)X_1 + tX_3 + (2-t)X_5 = t \\ (t-2)X_1 + t^2X_2 + tX_3 + (1-t)X_4 + (2-t)X_5 = 2t \\ (2-t)X_1 - t^2X_2 + (t-1)X_4 - 2X_5 = -t \\ t^2X_2 + tX_3 + 4X_4 + tX_5 = 3t \end{cases}.$$

(a) Si determinino i ranghi del sistema Σ_t, al variare di t in $\mathbb{R}$.

(b) Si determinino le soluzioni del sistema al variare di t.

ESERCIZIO 3. Siano $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ le applicazioni lineari definite dalle condizioni

$$\psi(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) = e_2 - 2e_3, \qquad \psi(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = e_1 - e_3;$$
$$\phi(\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2) = -3e_2 + 2e_3, \qquad \phi(2\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 3e_1 + e_3.$$

ove $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\psi)$, e $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$. Si determinino la dimensione ed una base del sottospazio $\mathrm{im}\,\phi \cap \mathrm{im}\,\psi$.

(b) Sia $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ l'applicazione definita da $\xi \mapsto \xi \circ \phi$. Si determinino le dimensioni ed una base per il nucleo e l'immagine di Φ.

(c) Si determinino (se esistono) tutte le applicazioni lineari, $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tali che $\psi = \xi \circ \phi$, e si scrivano le loro matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\xi)$ nella base canonica di $\mathbb{R}^3$.

ESERCIZIO 4.

(a) Si calcoli il determinante delle matrici

$$D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det D_n$, al variare di $n \geq 2$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 18 marzo 2009

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 + (2-3i)X - 6i \in \mathbb{C}[X]$.
(a) Si determinino i numeri complessi, z, tali che $P(z) = 0$.
(b) Dette z_0 e z_1 le radici del polinomio $P(z)$, si mostri che, al variare di $\alpha \in (0, +\infty)$, gli insiemi

$$C_\alpha = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = \alpha |z - z_1| \,\}$$

sono delle circonferenze e se ne determinino centro e raggio.
(c) Detta C la circonferenza di centro z_0 e raggio 1, si determini il raggio delle circonferenze, di centro z_1, e perpendicolari a C (due curve si dicono perpendicolari in un punto, P, se si intersecano in P e le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari).

ESERCIZIO 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti condizioni

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = 0 \\ 3X_1 + 3X_2 - 3X_3 - X_4 = 0 \end{cases}.$$

(*a*) Si determinino una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane per i sottospazi U_1, U_2 ed $U_1 + U_2$.
(*b*) Se $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, si scriva la matrice in base canonica della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, su U_1 parallelamente ad U_2 e la matrice, sempre in base canonica, della simmetria, $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse U_1 e direzione U_2.
(*c*) Si consideri il sottoinsieme

$$\mathscr{C}_\pi = \left\{\, \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \phi \circ \pi = \pi \circ \phi \,\right\}.$$

Si verifichi che si tratta di un sottospazio e se ne determini la dimensione. Si fissi opportunamente una base, $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, di $\mathbb{R}^4$ e si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi)$, al variare di ϕ in $\mathscr{C}_\pi$.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio, $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ dei polinomi, a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3, con la base (canonica) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.
(a) È vero che $\mathcal{V} = \{1, X-1, (X-2)^2, (X-3)^3\}$ è una base di V? In caso affermativo si scrivano le matrici di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{B}}(1)$ e $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{V}}(1)$.
(b) Sia $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset V^*$, ove $\delta_k(P(X)) = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ per ogni $P(X)$ in V e $k = 0, \dots, 3$. Si verifichi che $\mathcal{B}^*$ è la base duale di $\mathcal{B}$ in V^*. Scrivere gli elementi della base $\mathcal{V}^*$, duale di $\mathcal{V}$, come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}^*$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 marzo 2009

ESERCIZIO 1. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - (3-i)z + 4 - 3i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione.

(b) Si determinino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar\alpha \bar z + c = 0$ passi per z_1 e z_2.

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

ESERCIZIO 2. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti condizioni

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} X_1 - X_4 = 0 \\ 2X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 - 2X_3 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane per i sottospazi U_1, U_2 ed $U_1 + U_2$.

(b) Se $\mathbb{R}^4 = U_1 \oplus U_2$, si scriva la matrice in base canonica della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, su U_1 parallelamente ad U_2 e la matrice, sempre in base canonica, della simmetria, $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse U_1 e direzione U_2.

(c) Si consideri il sottoinsieme

$$\mathscr{L} = \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid \pi = \pi \circ \phi \circ \pi \right\}.$$

Si verifichi che si tratta di una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4))$ e se ne determini la dimensione.

ESERCIZIO 3. Sia C un campo e si consideri lo spazio vettoriale, $C[X]$, dei polinomi a coefficienti in C, nell'indeterminata X. Per ogni polinomio, $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in C[X]$, si consideri la funzione $f_P : C \to C$ definita da $f_P(x) = P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in C$, per ogni $x \in C$.

(a) Si verifichi che l'applicazione $\Phi : P \to f_P$ è un omomorfismo di spazi vettoriali tra $C[X]$ e l'insieme di tutte le funzioni di C in sé. Sia $C = \mathbb{C}$ e si verifichi che Φ è iniettiva. È anche suriettiva?

(b) Sia $C[X]_{\leq n}$ il sottospazio di $C[X]$ formato dai polinomi di grado minore o uguale ad n. Fissato $c \in C$, si consideri l'applicazione $e_c : C[X] \to C$ definita da $e_c(P(X)) = f_P(c)$. Sia $C = \mathbb{C}$; è vero che, per ogni n, esistono dei punti $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ tali che (le restrizioni a $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$ di) $e_{c_0}, \dots, e_{c_n}$ formano una base dello spazio duale di $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$?

(c) $^{(*)}$ Si discutano le domande precedenti su un campo qualsiasi.

$^{(*)}$ Domanda opzionale per aumentare il punteggio (...e che da un senso all'esercizio).

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 luglio 2009

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - (5+4i)X^2 + (1+8i)X + 3 - 4i \in \mathbb{C}[X]$ e si verifichi che $P(1) = 0$.

(a) Si determinino i numeri complessi, z_1, z_2, z_3, tali che $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$.

(b) Si determinino centro e raggio della circonferenza, C, passante per i tre punti, z_1, z_2, z_3, del piano di Gauss.

(c) Si determini l'immagine di C tramite la riflessione sulla circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale, E^4, si considerino i sottospazi definiti dalle seguenti condizioni

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad U_2 : \begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases} .$$

(a) Si determinino una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi.

(b) Si scrivano le matrici, in base canonica, delle simmetrie (ortogonali), σ_1 e σ_2, di asse U_1 ed $U_2^\perp$, rispettivamente.

(c) Dette π_1 e π_2 le proiezioni ortogonali sugli assi di σ_1 e σ_2, trovare nucleo ed immagine delle due applicazioni composte $\pi_1 \circ \pi_2$ e $\pi_2 \circ \pi_1$. Le applicazioni composte sono ancora proiezioni (non necessariamente ortogonali)?

ESERCIZIO 3. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$, di grado minore o uguale a 4.

(a) Sia $\mathscr{F}$ lo spazio vettoriale di tutte le funzioni (insiemistiche) di V su $\mathbb{R}$ e si considerino le funzioni $f_i : V \to \mathbb{R}$ definite da $f_i(P(X)) = P(i)$, per $i \in \mathbb{Z}$. Si verifichi che le f_i sono funzioni lineari e si mostri che $\langle f_{-2}, f_{-1}, f_0, f_1, f_2 \rangle$ è (isomorfo al)lo spazio vettoriale duale di V. Si scriva la matrice di cambiamento di base tra la base data e la base duale della base $1, X, X^2, X^3, X^4$ di V.

(b) Fissato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $g_P : V \to \mathbb{R}$, che associa ad ogni $Q(X) \in V$ la derivata quarta del prodotto $P(X)Q(X)$ calcolata nello 0. Si verifichi che, per ogni $P(X) \in V$ la funzione g_P appartiene allo spazio vettoriale duale, V^*, di V. Si determinino i polinomi $P_0, \dots, P_4$ che corrispondono alla base duale della base $1, X, X^2, X^3, X^4$ di V.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 14 settembre 2009

ESERCIZIO 1. Si determinino le soluzioni dell'equazione $z^2 - (1+3i)z - 4 + 3i = 0$.

(a) Si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione.

(b) Si determinino $\alpha \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che la retta $r : \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + c = 0$ passi per z_1 e z_2.

(c) Si determinino centro e raggio della circonferenza del piano di Gauss che si ottiene per riflessione della retta r rispetto alla circonferenza unitaria ($|z| = 1$).

ESERCIZIO 2. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W, dotati delle rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

(a) Si determini l'applicazione lineare $\psi : V \to W$ tale che

$$\begin{aligned} \psi(2v_1 - v_3) &= w_4 - w_1 \\ \psi(v_1 - v_2) &= w_1 + w_2 + 2w_3 - 2w_4 \\ \psi(v_3 - v_1) &= w_1 + w_2 + 2w_3 - 2w_4 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ψ.

(b) Si consideri l'applicazione lineare $\phi : W \to W$ tale che

$$\begin{aligned} \phi(2w_1 + w_4) &= w_1 + 3w_2 + 2w_3 + 2w_4 \\ \phi(w_2 + w_3) &= w_1 + 3w_2 + 2w_3 + 2w_4 \\ \phi(w_2 - w_3) &= w_1 + w_2 + 2w_3 - 2w_4 \\ \phi(w_2 - w_4) &= 3w_2 + 4w_3 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ϕ.

(c) Si determini il sottoinsieme $\mathscr{A} = \{ \chi \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \psi = \phi \circ \chi \}$ e si scrivano tutte le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\chi)$. $\mathscr{A}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(V, W)$?

(d) Si determini il sottospazio $\mathrm{im}\,\phi \cap \mathrm{im}\,\psi$ di W e gli ortogonali $(\mathrm{im}\,\phi)^\perp$ ed $(\mathrm{im}\,\psi)^\perp$ in W^*.

(e) Dette $\phi^* : W^* \to W^*$ e $\psi^* : W^* \to V^*$ le applicazioni trasposte di ϕ e ψ, si determini il sottoinsieme $\mathscr{B} = \{ \eta \in \mathrm{Hom}(W^*, W^*) \mid \phi^* \circ \eta = 0 \text{ e } \psi^* \circ \eta = 0 \}$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*}(\eta)$, ove $\mathcal{W}^*$ è la base duale della base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$. $\mathscr{B}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}(W^*, W^*)$?