Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 3 novembre 2009 – Compito **A**

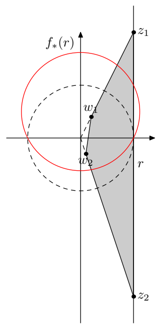
ESERCIZIO 1.

(a) *Si determinino le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione $z^2 - (2-i)z + 7 - i = 0$ e le si rappresentino sul piano di Gauss.*

(b) *Si determinino i punti, w_1 e w_2, che si ottengono da z_1 e z_2 per riflessione nella circonferenza unitaria. Disegnare il quadrilatero di vertici z_1, z_2, w_1, w_2 e determinarne l'area.*

(c) *Sia r la retta per z_1 e z_2 e si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-(z_1+z_2)}{z}$. Si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(r)$.*

Svolgimento.



(a) Le radici dell'equazione sono $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 1 - 3i$.

(b) $w_1 = 1/\bar{z}_1 = z_1/5$ e $w_2 = z_2/10$. L'area del quadrilatero è la differenza tra le aree dei due triangoli di vertici $0, z_1, z_2$ e $0, w_1, w_2$ e quindi $A = \frac{1}{2}\left|\Im(\bar{z}_1 z_2 - \bar{w}_1 w_2)\right| = \frac{49}{20}$.

(c) La retta è $r : z + \bar{z} = 2$. La funzione è $f(z) = \frac{z-2+i}{z}$ $(z \neq 0)$ e la sua inversa è $g(w) = \frac{2-i}{1-w}$. Dunque $f_*(r) = g^*(r) = \{\, w \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \mid 2w\bar{w} + iw - i\bar{w} - 2 = 0 \,\}$; ovvero la circonferenza di centro $i/2$ e raggio $\sqrt{5}/2$ privata del punto $w = 1$.

□

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi*

$$U : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \quad . \qquad \text{e} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) *Si esibisca una base e si scriva un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi. Si verifichi se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*

(b) *Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su W parallelamente ad U.*

(c) *Si calcoli A^7.*

Svolgimento. (a) Le tre equazioni sono dipendenti ($III = 3II - I$) ed un sistema minimale si ottiene prendendone 2 tra queste. Le soluzioni del sistema sono

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 2a \\ b \\ 2b \\ a \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

I tre vettori dati sono linearmente dipendenti ($w_1 + 5w_2 + 2w_3 = 0$) ed una base è quindi data dai primi due, ovvero $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ ed è soluzione del sistema di equazioni (minimale)

$$W : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} .$$

Unendo i due sistemi lineari, si conclude che $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi (per motivi di dimensione) che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) La proiezione del vettore $v \in \mathbb{R}^4$ è quell'unico vettore, $\pi(v) = aw_1 + bw_2$, tale che $v - \pi(v) \in U$. Da cui si deduce, per un generico elemento di $\mathbb{R}^4$,

$$\begin{cases} a = \dfrac{x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4}{6} \\ b = \dfrac{x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4}{6} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \pi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} x_1 - 2x_4 \\ 2x_2 - x_3 \\ -2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) A è la matrice di una proiezione, quindi $A = A^2 = A^7$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Si considerino i polinomi*

$$P_1 = 1 + X, \quad P_2 = X + X^3, \quad P_3 = X^2 + X^4, \quad P_4 = 1 + X^3, \quad P_5 = 1 - X + X^2 + X^4.$$

Siano $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2, v_4 = X^3, v_5 = X^4$.

(a) *Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(v_i) = P_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.*

(b) *Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(P_i) = v_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.*

(c) *Dire se esistono applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tali che $\phi(P_1) = \phi(P_2) = 0$, $\phi(P_3) = P_1$, $\phi(P_4) = P_2$, $\phi(P_5) = P_1 + P_2$ ed in caso affermativo descriverle tutte, ad esempio tramite la matrice associata all'applicazione rispetto alla base canonica.*

Svolgimento. (a) L'insieme $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ è la base canonica di $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ e quindi esiste un'unica applicazione lineare, ϕ, che soddisfi alla condizione posta ed ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $P_2 - P_3 - P_4 + P_5 = 0$; quindi $\operatorname{im}\phi = \langle P_1, \dots, P_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_4, v_3 + v_5 \rangle$ e $\ker\phi = \langle v_2 - v_3 - v_4 + v_5 \rangle$.

(b) I vettori $P_1, \dots, P_5$ sono linearmente dipendenti perché $P_2 - P_3 - P_4 + P_5 = 0$. Dunque, ogni applicazione lineare li manderà in vettori che soddisfano alla stessa relazione lineare. Quindi non è possibile mandarli in una base di $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$.

(c) Dalle condizioni date si ricava $\phi(P_2) - \phi(P_3) - \phi(P_4) + \phi(P_5) = 0$ e quindi esistono infinite applicazioni che soddisfano alla condizione data; esse sono univocamente determinate dalle condizioni date sul sottospazio $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ e possono essere definite in modo arbitrario su un complementare di tale sottospazio. Il sottospazio $\langle v_5 \rangle$ è un complementare di $\langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$ e si ha

$$2v_1 = P_1 - P_2 + P_4, \quad 2v_2 = P_1 + P_2 - P_4, \quad 2v_4 = -P_1 + P_2 + P_4, \quad \text{e} \quad v_3 = P_3 - v_5.$$

Quindi le applicazioni cercate hanno tutte matrici del tipo

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a & 0 & a \\ 1/2 & -1/2 & 1-b & 1/2 & b \\ 0 & 0 & -c & 0 & c \\ 1/2 & -1/2 & -d & 1/2 & d \\ 0 & 0 & -e & 0 & e \end{pmatrix}$$

al variare di $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{Q}^5$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 3 novembre 2009 – Compito **B**

ESERCIZIO 1.

(a) Si determinino le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione $z^2 + (1-2i)z - 7 - i = 0$ e le si rappresentino sul piano di Gauss.

(b) Si determinino i punti, w_1 e w_2, che si ottengono da z_1 e z_2 per riflessione nella circonferenza unitaria. Disegnare il quadrilatero di vertici z_1, z_2, w_1, w_2 e determinarne l'area.

(c) Sia r la retta per z_1 e z_2 e si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-(z_1+z_2)}{z}$. Si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(r)$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} . \qquad \text{e} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Si esibisca una base e si scriva un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi. Si verifichi se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su W parallelamente ad U.

(c) Si calcoli A^7.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Si considerino i polinomi

$$P_1 = 1 + X^4, \quad P_2 = 1 + X^2, \quad P_3 = X + X^3, \quad P_4 = X^2 + X^4, \quad P_5 = -1 + X + X^3 + X^4.$$

Siano $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2, v_4 = X^3, v_5 = X^4$.

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(v_i) = P_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(b) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(P_i) = v_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(c) Dire se esistono applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tali che $\phi(P_1) = \phi(P_2) = 0$, $\phi(P_3) = P_1$, $\phi(P_4) = P_2$, $\phi(P_5) = P_1 + P_2$ ed in caso affermativo descriverle tutte, ad esempio tramite la matrice associata all'applicazione rispetto alla base canonica.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 3 novembre 2009 – Compito **C**

ESERCIZIO 1.

(a) Si determinino le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione $z^2+(2+i)z+7+i=0$ e le si rappresentino sul piano di Gauss.

(b) Si determinino i punti, w_1 e w_2, che si ottengono da z_1 e z_2 per riflessione nella circonferenza unitaria. Disegnare il quadrilatero di vertici z_1, z_2, w_1, w_2 e determinarne l'area.

(c) Sia r la retta per z_1 e z_2 e si consideri la funzione $f(z)=\frac{z-(z_1+z_2)}{z}$. Si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(r)$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U:\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-2x_4=0 \\ 2x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2+2x_3-2x_4=0 \end{cases} \quad . \qquad \text{e} \qquad W=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-3\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Si esibisca una base e si scriva un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi. Si verifichi se $\mathbb{R}^4=U\oplus W$.

(b) Detta $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si scriva la matrice $A=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ è la proiezione su W parallelamente ad U.

(c) Si calcoli A^9.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Si considerino i polinomi

$$P_1=X^3+X^4,\quad P_2=X+X^4,\quad P_3=1+X^2,\quad P_4=X+X^3,\quad P_5=1+X^2+X^3-X^4.$$

Siano $v_1=1, v_2=X, v_3=X^2, v_4=X^3, v_5=X^4$.

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi:\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}\to\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(v_i)=P_i$, $1\leq i\leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(b) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi:\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}\to\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(P_i)=v_i$, $1\leq i\leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(c) Dire se esistono applicazioni lineari $\phi:\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}\to\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tali che $\phi(P_1)=\phi(P_2)=0$, $\phi(P_3)=P_1$, $\phi(P_4)=P_2$, $\phi(P_5)=P_1+P_2$ ed in caso affermativo descriverle tutte, ad esempio tramite la matrice associata all'applicazione rispetto alla base canonica.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 3 novembre 2009 – Compito **D**

ESERCIZIO 1.

(*a*) Si determinino le soluzioni, z_1 e z_2, dell'equazione $z^2 + (1 + 2i)z - 7 + i = 0$ e le si rappresentino sul piano di Gauss.

(*b*) Si determinino i punti, w_1 e w_2, che si ottengono da z_1 e z_2 per riflessione nella circonferenza unitaria. Disegnare il quadrilatero di vertici z_1, z_2, w_1, w_2 e determinarne l'area.

(*c*) Sia r la retta per z_1 e z_2 e si consideri la funzione $f(z) = \frac{z-(z_1+z_2)}{z}$. Si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(r)$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad . \qquad \text{e} \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(*a*) Si esibisca una base e si scriva un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi. Si verifichi se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Detta $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è la proiezione su W parallelamente ad U.

(*c*) Si calcoli A^9.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 4 a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Si considerino i polinomi

$$P_1 = X^3 + X^2, \quad P_2 = 1 + X^3, \quad P_3 = X + X^4, \quad P_4 = 1 + X^2, \quad P_5 = X + X^2 - X^3 + X^4.$$

Siano $v_1 = 1, v_2 = X, v_3 = X^2, v_4 = X^3, v_5 = X^4$.

(*a*) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(v_i) = P_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(*b*) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tale che $\phi(P_i) = v_i$, $1 \leq i \leq 5$, e in caso affermativo scriverne la matrice rispetto alla base canonica e calcolarne nucleo e immagine.

(*c*) Dire se esistono applicazioni lineari $\phi : \mathbb{Q}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ tali che $\phi(P_1) = \phi(P_2) = 0$, $\phi(P_3) = P_1$, $\phi(P_4) = P_2$, $\phi(P_5) = P_1 + P_2$ ed in caso affermativo descriverle tutte, ad esempio tramite la matrice associata all'applicazione rispetto alla base canonica.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 9 dicembre 2009

ESERCIZIO 1. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ (risp. $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$) una base di V (risp. W).*

(*a*) *Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\varphi : V \to W$, che soddisfi alle condizioni*

$$\begin{gathered}\varphi(2v_1 + v_2) = \varphi(v_3 - v_4) = w_1 + w_2 - 2w_3\\ \varphi(2v_1 + 2v_2) = \varphi(v_3 - 2v_4) = 2w_2.\end{gathered}$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, di tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni.

(*b*) *Per ogni applicazione, φ, del punto precedente si determinino i sottospazi $\ker\varphi$, $\operatorname{im}\varphi$, ed i sottospazi a loro ortogonali contenuti nei rispettivi spazi duali di V e W, scrivendo delle basi per ciascuno di questi sottospazi.*
Se una tale φ non esiste, si scrivano delle basi per i sottospazi $\langle 2v_1 + v_2, v_3 - v_4\rangle^\perp$, $\langle w_1 + w_2 - 2w_3, 2w_2\rangle^\perp$, $\langle 2v_1 + 2v_2, v_3 - 2v_4\rangle^\perp$, $\langle 2w_1 - 4w_3, w_1 + w_2 + w_3\rangle^\perp$.

(*c*) *Per ogni applicazione, φ, del punto (a) si determinino le matrici $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*}(\xi)$, ove*

$$\xi \in \{\, \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(W^*, W^*) \mid \varphi^* \circ \xi = 0 \,\},$$

$\varphi^* : W^* \to V^*$ è l'applicazione trasposta e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$, $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_3^*\}$ sono le basi duali delle basi date.
Se una tale φ non esiste, si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{W}^*}(\xi)$ delle applicazioni lineari, $\xi : V^* \to W^*$, tali che

$$\begin{gathered}\xi(\langle 2v_1 + v_2, v_3 - v_4\rangle^\perp) \subseteq \langle w_1 + w_2 - 2w_3, 2w_2\rangle^\perp\\ \xi(\langle 2v_1 + 2v_2, v_3 - 2v_4\rangle^\perp) \subseteq \langle 2w_1 - 4w_3, w_1 + w_2 + w_3\rangle^\perp .\end{gathered}$$

Svolgimento. (a) φ esiste ed è unica perché i vettori $2v_1 + v_2$, $2v_1 + 2v_2$, $v_3 - 2v_4$, $v_3 - v_4$ sono una base di V e si ha

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(*b*) $\ker\varphi = \langle v_2 + v_4, 2v_1 - v_3\rangle$, $\operatorname{im}\varphi = \langle w_2, w_1 - 2w_3\rangle$, $(\ker\varphi)^\perp = \langle v_2^* - v_4^*, v_1^* + 2v_3^*\rangle$, $(\operatorname{im}\varphi)^\perp = \langle 2w_1^* + w_3^*\rangle$.

(*c*) Le applicazioni, $\xi : W^* \to W^*$, cercate sono caratterizzate dalla condizione $\operatorname{im}\xi \subseteq \ker(\varphi^*) = (\operatorname{im}\varphi)^\perp$. Quindi le matrici cercate appartengono al sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 2&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&2\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t : \begin{cases} tX_1 - X_2 + (2t-1)X_4 - (2t-1)X_5 = 2t^2 - t + 1 \\ (2t+1)X_2 + tX_3 + (1-2t)X_4 - (1-2t)X_5 = -t - 1 \\ tX_1 - X_2 - tX_3 + (2t-1)X_4 - (1-2t)X_5 = 2t^2 - 2t + 1 \\ (2t+1)X_2 + (2t-1)X_5 = -2t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(*a*) *Si determinino i ranghi del sistema Σ_t, al variare di t in $\mathbb{R}$.*

(*b*) *Si determinino le soluzioni del sistema Σ_t, al variare di t in $\mathbb{R}$.*

Svolgimento. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 2t-1 & 1-2t & | & 2t^2-t+1 \\ 0 & 2t+1 & t & 1-2t & 2t-1 & | & -t-1 \\ t & -1 & -t & 2t-1 & 2t-1 & | & 2t^2-2t+1 \\ 0 & 2t+1 & 0 & 0 & 2t-1 & | & -2t \end{pmatrix}$$

che è riga-equivalente a

$$\begin{array}{r} \\ IV \\ III-I \\ II-IV \end{array} \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 2t-1 & 1-2t & | & 2t^2-t+1 \\ 0 & 2t+1 & 0 & 0 & 2t-1 & | & -2t \\ 0 & 0 & -t & 0 & 2(2t-1) & | & -t \\ 0 & 0 & t & 1-2t & 0 & | & t-1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV+III \end{array} \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 2t-1 & 1-2t & | & 2t^2-t+1 \\ 0 & 2t+1 & 0 & 0 & 2t-1 & | & -2t \\ 0 & 0 & -t & 0 & 2(2t-1) & | & -t \\ 0 & 0 & 0 & 1-2t & 2(2t-1) & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Se $t \notin \{-1/2, 0, 1/2\}$, le matrici (completa ed incompleta) del sistema hanno entrambe rango 4 e quindi vi è una sottovarietà lineare di soluzioni di dimensione 1, uguale a

$$S_t = \begin{pmatrix} 2t-1-\frac{2}{2t+1} \\ -\frac{2t}{2t+1} \\ 1 \\ \frac{1}{2t-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2(t+1)(2t-1) \\ -t(2t-1) \\ 2(2t-1)(2t+1) \\ 2t(2t+1) \\ t(2t+1) \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sia ora $t = -\frac{1}{2}$. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -4 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ III \\ IV \\ II \end{array} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -4 & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

I ranghi sono ancora entrambi uguali a 4 e le soluzioni formano la sottovarietà lineare di dimensione 1

$$S_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Sia ora $t = 0$. La matrice completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} II \\ IV \\ \\ I+II-III+IV \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

I ranghi sono entrambi uguali a 3 e le soluzioni formano la sottovarietà lineare di dimensione 2

$$S_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Infine, sia $t = \frac{1}{2}$. La matrice completa è

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

che ha rango 4, mentre la matrice incompleta ha rango 3. Non vi sono quindi soluzioni al sistema. □

ESERCIZIO 3. *Sia n un intero maggiore o uguale a 2 e si considerino le matrici $S_n \in M_n(C)$, definite da*

$$S_n = a\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(n-j+1, j) + b\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon([n/2]-j+1, j) + c\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon(n-j+1, [(n+1)/2]+j),$$

ove gli scalari a, b, c appartengono a C, $\{\varepsilon(i,j) \mid 1 \le i, j \le n\}$, è la base canonica di $M_n(C)$ e $[x]$ indica la parte intera del numero reale x, ovvero, $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \le x < [x]+1$.
(a) Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di S_3, S_4.
(b) Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di S_5 e S_6.
(c) Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det S_n$, al variare di n.
(d) (*) Si calcoli S_n^2. Sia X un'indeterminata e si calcoli il polinomio $\det(X\mathbf{1}_n - S_n^2)$.

Svolgimento. (a) Si ha $\det S_3 = a(bc - a^2)$ e $\det S_4 = (bc - a^2)^2$.
(b) Si ha $\det S_5 = a(bc - a^2)^2$ e $\det S_6 = (bc - a^2)^3$.
(c) Con operazioni di scambio di righe e di colonne si può portare la matrice S_n nella forma (a blocchi)

$$\begin{pmatrix} S_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & a & c \end{pmatrix}.$$

Il numero di scambi necessari è un numero pari (come si verifica?) e quindi si ha la relazione ricorsiva $\det S_n = (bc - a^2)\det S_{n-2}$ da cui si ottiene la formula chiusa

$$\det S_n = a^{[(n+1)/2]-[n/2]}(bc - a^2)^{[n/2]}.$$

(d) Si ha

$$\begin{aligned} S_n^2 = (a^2+b^2)\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon(j,j) + (a^2+c^2)\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon([\tfrac{n+1}{2}]+j, [\tfrac{n+1}{2}]+j) + \\ + (ab+ac)\sum_{j=1}^{[n/2]} \varepsilon([\tfrac{n+1}{2}]+j, j) + \varepsilon(j, [\tfrac{n+1}{2}]+j) + \\ + \left([\tfrac{n+1}{2}] - [\tfrac{n}{2}]\right) a^2 \varepsilon([\tfrac{n+1}{2}], [\tfrac{n+1}{2}]). \end{aligned}$$

Per calcolare il determinante di $X\mathbf{1}_n - S_n^2$ si può usare una relazione ricorsiva simile a quella descritta nel punto precedente e si ottiene

$$\det(X\mathbf{1}_n - S_n^2) = (X - a^2)^{[(n+1)/2]-[n/2]}\Big((X - a^2 - b^2)(X - a^2 + c^2) - (ab+ac)^2\Big)^{[n/2]}.$$

□

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 dicembre 2009 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$.*

(*a*) *Si determinino e si disegnino sul piano di Gauss le radici del polinomio $P(X)$.*

(*b*) *Si determinino le equazioni delle rette che contengono due radici distinte del polinomio $P(X)$ e si scrivano le equazioni nella forma $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$ con $a \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{R}$.*

(*c*) *Si determinino le immagini delle rette del punto precedente nella riflessione rispetto al cerchio unitario e le si disegnino nel piano di Gauss.*

Svolgimento. (a) Le radici sono $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(*b*) $z_1 \vee z_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 2 = 0$. $z_1 \vee z_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 2 = 0$. $z_2 \vee z_3 : z + \bar{z} + 1 = 0$.

(*c*) Si hanno delle circonferenze per l'origine. $\mathscr{C}_1 : \left| z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right| = 1$; $\mathscr{C}_2 : \left| z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right| = 1$; $\mathscr{C}_3 : |z + 1| = 1$.

□

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ (risp. $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$) una base di V (risp. W).*

(*a*) *Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\varphi : V \to W$, che soddisfi alle condizioni*

$$\varphi(2v_1 - v_3) = \varphi(v_2 - 3v_4) = 2w_1 - w_3$$
$$\varphi(3v_1 - v_3) = \varphi(v_2 - 2v_4) = w_1 + w_2.$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, e si determinino i sottospazi $\ker\varphi$ e $\operatorname{im}\varphi$ per tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni.

(*b*) *Sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ la matrice di un'applicazione, φ, del punto precedente. Si determinino due matrici invertibili, P_0 e Q_0, tali che $P_0 A Q_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ove $r = rk\varphi$.*

(*c*) (*) *Fissati A e P_0 come nel punto precedente, si determinino tutte le matrici, Q, tali che $P_0 A Q = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. È vero che le matrici Q dipendono dalla scelta di P_0? In che modo?*

Svolgimento. (a) I vettori $2v_1 - v_3$, $v_2 - 3v_4$, $3v_1 - v_3$, $v_2 - 2v_4$ formano una base di V, quindi esiste un unico omomorfismo soddisfacente alle condizioni date. Si ha

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\ker\varphi = \langle 2v_1 - v_2 - v_3 + 3v_4, 3v_1 - v_2 - v_3 + 2v_4 \rangle$, $\operatorname{im}\varphi = \langle 2w_1 - w_3, w_1 + w_2 \rangle$,

(*b*) I vettori v_1 e v_2 completano la base data di $\ker\varphi$ ad una base, $\mathcal{V}' = \{v_1, v_2, 2v_1 - v_2 - v_3 + 3v_4, 3v_1 - v_2 - v_3 + 2v_4\}$, di V e possiamo prendere $Q_0 = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id)$. Possiamo completare $\varphi(v_1)$ e $\varphi(v_2)$ ad una base $\mathcal{W}' = \{-w_1 + w_2 + w_3, -w_1 + 3w_2 + 2w_3, w_1\}$ di W, e prendere $P_0 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id) = \alpha_{\mathcal{W}',\mathcal{W}}(id)^{-1}$. Si ha

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $P_0 A Q_0 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(*c*) Fissati A e P_0, posso sommare a Q_0 una qualsiasi matrice avente le colonne in $\ker\varphi$ senza modificare il prodotto. Indicato con $\mathscr{K} = \{ \xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \operatorname{im}\xi \subseteq \ker\varphi \}$, le matrici cercate sono tutte e sole quelle in $\{ Q_0 + \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\xi) \mid \xi \in \mathscr{K} \}$.

Al variare di P_0 le matrici Q hanno ancora la forma descritta sopra, purché si vari opportunamente la matrice Q_0. Le ultime due colonne di Q_0 devono essere le coordinate (nella base $\mathcal{V}$) di una base di $\ker\varphi$, indipendentemente dalla scelta di P_0, mentre le prime due colonne devono essere scelte, rispettivamente, nella controimmagine tramite φ dei vettori rappresentati dalle prime due colonne di P_0^{-1} (nella base $\mathcal{W}$). $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi*

$$U = \langle v_1 + v_3 + v_4, v_2 + 2v_4, 2v_1 - v_2 + 2v_3 \rangle\,, \quad \text{e} \quad W : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

(*a*) *Si determini una base per ciascuno dei due sottospazi U e W e per i loro ortogonali in V^*.*
(*b*) *Si verifichi che $V = U \oplus W$ e si determini la matrice della proiezione $\pi : V \to V$ su U parallelamente a W.*
(*c*) *Si dica se $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$. In tal caso si dica quali relazioni ci sono tra l'applicazione trasposta $\pi^* : V^* \to V^*$ e le proiezioni relative a quella decomposizione di V^*.*

Svolgimento. (a) Si ha $2v_1 - v_2 + 2v_3 = 2(v_1 + v_3 + v_4) - (v_2 + 2v_4)$ e quindi $\{v_1 + v_3 + v_4, v_2 + 2v_4\}$ è una base di U. Il sistema lineare ha rango 2 e una base dello spazio, W, delle soluzioni è $\{2v_1 - v_3 + v_4, v_2\}$.

Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si ha $U^\perp = \langle v_1^* - v_3^*, 2v_2^* + v_3^* - v_4^* \rangle$ e $W^\perp = \langle v_1^* + 2v_3^*, v_3^* + v_4^* \rangle$.

(*b*) I quattro vettori $v_1 + v_3 + v_4, v_2 + 2v_4, 2v_1 - v_3 + v_4, v_2$ sono linearmente indipendenti e perciò sono una base di V, da cui discende che $V = U \oplus W$. Si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Naturalmente $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$ (ad esempio, perché $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp = \langle 0 \rangle$ e $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp = V^*$). e la trasposta di una proiezione è ancora una proiezione ($\pi^* \circ \pi^* = (\pi \circ \pi)^* = \pi^*$). È sufficiente ricordare chi sono nucleo ed immagine di π^* per concludere. $\square$

ESERCIZIO 4. *Sia n un intero maggiore o uguale a 3 e si considerino le matrici $B_n \in M_n(\mathbb{Q})$, definite da*

$$B_n = a \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(j,j) + b \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(n-j+1, j) + c \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-1} \sum_{j=i+1}^{n-i} \Big(\varepsilon(i,j) + \varepsilon(n-i+1, j) \Big),$$

ove gli scalari a, b, c appartengono a $\mathbb{Q}$, $\{ \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i, j \le n \}$, è la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$ e $[x]$ indica la parte intera del numero reale x, ovvero, $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \le x < [x] + 1$.
(*a*) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di B_3, B_4.*
(*b*) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di B_5 e B_6.*
(*c*) *Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det B_n$, al variare di n.*
(*d*) $^{(*)}$ *Si determini il rango di ${}^tB_n - B_n$ in funzione dell'intero $n \ge 3$.*

Svolgimento. (a) Si ha $\det B_3 = (a + b)(a^2 - b^2)$ e $\det B_4 = (a^2 - b^2)^2$.
(*b*) Si ha $\det B_5 = (a + b)(a^2 - b^2)^2$ e $\det B_6 = (a^2 - b^2)^3$.
(*c*) Scambiando l'ultima riga di B_n con le precedenti fino a portarla al secondo posto e facendo lo stesso con le colonne di B_n si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante di B_n e della forma (a blocchi)

$$\begin{pmatrix} a & b & * \\ b & a & * \\ 0 & 0 & B_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha la relazione ricorsiva $\det B_n = (a^2 - b^2) \det B_{n-2}$ da cui si ottiene (per induzione) la formula chiusa

$$\det B_n = (a + b)^{[(n+1)/2] - [n/2]} (a^2 - b^2)^{[n/2]}.$$

(*d*) Il rango è $2\left[\frac{n+1}{4}\right]$. (... perché?) $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 dicembre 2009 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino e si disegnino sul piano di Gauss le radici del polinomio* $P(X)$.

(b) *Si determinino le equazioni delle rette che contengono due radici distinte del polinomio* $P(X)$ *e si scrivano le equazioni nella forma* $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$ *con* $a \in \mathbb{C}$ *e* $c \in \mathbb{R}$.

(c) *Si determinino le immagini delle rette del punto precedente nella riflessione rispetto al cerchio unitario e le si disegnino nel piano di Gauss.*

Svolgimento. (a) Le radici sono $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $z_1 \vee z_2 : (1+i\sqrt{3})z + (1-i\sqrt{3})\bar{z} + 2 = 0$. $z_1 \vee z_3 : (1-i\sqrt{3})z + (1+i\sqrt{3})\bar{z} + 2 = 0$. $z_2 \vee z_3 : z + \bar{z} - 1 = 0$.

(c) Si hanno delle circonferenze per l'origine. $\mathscr{C}_1 : \left|z - \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$; $\mathscr{C}_2 : \left|z - \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right| = 1$; $\mathscr{C}_3 : |z-1| = 1$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{Q}$ *dei numeri razionali e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *(risp.* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$*) una base di* V *(risp.* W*).*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare,* $\varphi : V \to W$*, che soddisfi alle condizioni*

$$\varphi(3v_1 - v_3) = \varphi(v_2 + 3v_4) = 2w_1 + w_3$$
$$\varphi(2v_1 - v_3) = \varphi(v_2 + 2v_4) = w_1 - w_2.$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$*, e si determinino i sottospazi* $\ker\varphi$ *e* $\operatorname{im}\varphi$ *per tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni.*

(b) *Sia* $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ *la matrice di un'applicazione,* φ*, del punto precedente. Si determinino due matrici invertibili,* P_0 *e* Q_0*, tali che* $P_0AQ_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, ove* $r = rk\varphi$.

(c) (*) *Fissati* A *e* P_0 *come nel punto precedente, si determinino tutte le matrici,* Q*, tali che* $P_0AQ = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
È vero che le matrici Q *dipendono dalla scelta di* P_0*? In che modo?*

Svolgimento. (a) I vettori $3v_1 - v_3$, $v_2 = 3v_4$, $2v_1 - v_3$, $v_2 + 2v_4$ formano una base di V, quindi esiste un unico omomorfismo soddisfacente alle condizioni date. Si ha

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\ker\varphi = \langle 3v_1 - v_2 - v_3 - 3v_4, 2v_1 - v_2 - v_3 - 2v_4 \rangle$, $\operatorname{im}\varphi = \langle 2w_1 + w_3, w_1 - w_2 \rangle$,

(b) I vettori v_1 e v_2 completano la base data di $\ker\varphi$ ad una base, $\mathcal{V}' = \{v_1, v_2, 3v_1 - v_2 - v_3 - 3v_4, 2v_1 - v_2 - v_3 - 2v_4\}$, di V e possiamo prendere $Q_0 = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id)$. Possiamo completare $\varphi(v_1)$ e $\varphi(v_2)$ ad una base $\mathcal{W}' = \{w_1 + w_2 + w_3, -w_1 - 3w_2 - 2w_3, w_1\}$ di W, e prendere $P_0 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id) = \alpha_{\mathcal{W}',\mathcal{W}}(id)^{-1}$. Si ha

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e $P_0AQ_0 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(id)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(id) = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Fissati A e P_0, posso sommare a Q_0 una qualsiasi matrice avente le colonne in $\ker\varphi$ senza modificare il prodotto. Indicato con $\mathscr{K} = \{\, \xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \operatorname{im}\xi \subseteq \ker\varphi \,\}$, le matrici cercate sono tutte e sole quelle in $\{\, Q_0 + \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\xi) \mid \xi \in \mathscr{K} \,\}$.

Al variare di P_0 le matrici Q hanno ancora la forma descritta sopra, purché si vari opportunamente la matrice Q_0. Le ultime due colonne di Q_0 devono essere le coordinate (nella base $\mathcal{V}$) di una base di $\ker\varphi$, indipendentemente dalla scelta di P_0, mentre le prime due colonne devono essere scelte, rispettivamente, nella controimmagine tramite φ dei vettori rappresentati dalle prime due colonne di P_0 (nella base $\mathcal{W}$). □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi*

$$U = \langle v_1 + v_2 + v_4, 2v_1 + v_3, 2v_2 - v_3 + 2v_4 \rangle, \quad e \quad W : \begin{cases} 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

(*a*) *Si determini una base per ciascuno dei due sottospazi U e W e per i loro ortogonali in V^*.*
(*b*) *Si verifichi che $V = U \oplus W$ e si determini la matrice della proiezione $\pi : V \to V$ su U parallelamente a W.*
(*c*) *Si dica se $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$. In tal caso si dica quali relazioni ci sono tra l'applicazione trasposta $\pi^* : V^* \to V^*$ e le proiezioni relative a quella decomposizione di V^*.*

Svolgimento. (a) Si ha $2v_2 - v_3 + 2v_4 = 2(v_1 + v_2 + v_4) - (2v_1 + v_3)$ e quindi $\{v_1 + v_2 + v_4, 2v_1 + v_3\}$ è una base di U. Il sistema lineare ha rango 2 e una base dello spazio, W, delle soluzioni è $\{v_1 - v_2 + 2v_4, v_3\}$.

Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si ha $U^\perp = \langle v_2^* - v_4^*, v_1^* - v_2^* - 2v_3^* \rangle$ e $W^\perp = \langle v_1^* + v_2^*, 2v_2^* + v_4^* \rangle$.

(*b*) I quattro vettori $v_1 + v_2 + v_4, 2v_1 + v_3, v_1 - v_2 + 2v_4, v_3$ sono linearmente indipendenti e perciò sono una base di V, da cui discende che $V = U \oplus W$. Si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \tfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Naturalmente $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$ (ad esempio, perché $U^\perp \cap W^\perp = (U + W)^\perp = \langle 0 \rangle$ e $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp = V^*$). e la trasposta di una proiezione è ancora una proiezione ($\pi^* \circ \pi^* = (\pi \circ \pi)^* = \pi^*$). È sufficiente ricordare chi sono nucleo ed immagine di π^* per concludere. □

ESERCIZIO 4. *Sia n un intero maggiore o uguale a 3 e si considerino le matrici $C_n \in M_n(\mathbb{Q})$, definite da*

$$C_n = a \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(j, j) - b \sum_{i=1}^{[(n+1)/2]-1} \sum_{j=i+1}^{n-i} \Big(\varepsilon(j, i) + \varepsilon(j, n - i + 1) \Big) + c \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(n - j + 1, j)$$

ove gli scalari a, b, c appartengono a $\mathbb{Q}$, $\{ \varepsilon(i, j) \mid 1 \le i, j \le n \}$, è la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$ e $[x]$ indica la parte intera del numero reale x, ovvero, $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \le x < [x] + 1$.
(*a*) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di C_3, C_4.*
(*b*) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di C_5 e C_6.*
(*c*) *Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det C_n$, al variare di n.*
(*d*) $^{(*)}$ *Si determini il rango di ${}^tC_n - C_n$ in funzione dell'intero $n \ge 3$.*

Svolgimento. (a) Si ha $\det C_3 = (a + c)(a^2 - c^2)$ e $\det C_4 = (a^2 - c^2)^2$.
(*b*) Si ha $\det C_5 = (a + c)(a^2 - c^2)^2$ e $\det C_6 = (a^2 - c^2)^3$.
(*c*) Scambiando l'ultima riga di C_n con le precedenti fino a portarla al secondo posto e facendo lo stesso con le colonne di C_n si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante di C_n e della forma (a blocchi)

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 \\ c & a & 0 \\ * & * & C_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha la relazione ricorsiva $\det C_n = (a^2 - c^2) \det C_{n-2}$ da cui si ottiene (per induzione) la formula chiusa

$$\det C_n = (a + c)^{[(n+1)/2]-[n/2]}(a^2 - c^2)^{[n/2]}.$$

(*d*) Il rango è $2\left[\frac{n+1}{4}\right]$. (... perché?) □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 gennaio 2010 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = (2X + 1 + i\sqrt{3})(X^2 - (1+i)X + i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino e si disegnino sul piano di Gauss le radici del polinomio* $P(X)$.

(b) *Si determinino le lunghezze dei lati e l'area del triangolo avente come vertici le tre radici del polinomio* $P(X)$.

(c) *Si determini l'immagine della retta contenente il lato più lungo del triangolo nella riflessione rispetto al cerchio unitario e la si disegni nel piano di Gauss.*

Svolgimento. (a) I tre punti sono $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, e stanno tutti sulla circonferenza unitaria.

(b) Le distanze sono $|z_2 - z_1| = \sqrt{2}$, $|z_3 - z_1| = \sqrt{3}$ e $|z_2 - z_3| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, che è la maggiore. L'area è $A = \frac{1}{2}\Im(\overline{(z_2 - z_1)}(z_3 - z_1)) = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$.

(c) La retta contenente z_2 e z_3 ha equazione, $((\sqrt{3}+2)+i)z + ((\sqrt{3}+2)-i)\bar{z} + 2 = 0$. La sua trasformata nell'inversione rispetto alla circonferenza unitaria è la circonferenza $\left|z + \frac{(\sqrt{3}+2)-i}{2}\right| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$, privata del punto $z = 0$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ (risp. $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$) una base di V (risp. W).*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\varphi : V \to W$, che soddisfi alle condizioni*

$$\varphi(v_1 - 2v_2) = \varphi(3v_3 - v_4) = w_1 - w_2$$
$$\varphi(v_1 + v_4) = \varphi(2v_2 + 3v_3) = w_2 - w_3.$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, di tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni. Si tratta di una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{Q}}(V, W))$? Se sì, di quale dimensione?

(b) *Si determinino i sottospazi $\ker\varphi$ e $\mathrm{im}\varphi$. per tutte le applicazioni soddisfacenti alle condizioni del punto precedente e si dia una condizione necessaria e sufficiente sulle entrate della matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ affinché il rango sia massimo.*

Svolgimento. (a) Si ha

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & -1/3 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6a & 3a & -2a & -6a \\ 6b & 3b & -2b & -6b \\ 6c & 3c & -2c & -6c \end{pmatrix}.$$

al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3$. Si ha quindi una sottovarietà lineare di dimensione 3.

(b) $\mathrm{im}\,\varphi = \langle w_1 - w_2, w_2 - w_3 \rangle$ se $\phi(v_4) \in \langle w_1 - w_2, w_2 - w_3 \rangle$, ovvero se $a + b + c = 0$. Altrimenti $\mathrm{rk}\,\varphi = 3$ ed $\mathrm{im}\,\varphi = \mathbb{Q}^3$.

$\ker\varphi = \langle v_1 - 2v_2 - 3v_3 + v_4 \rangle$ se il rango è massimo, altrimenti, $\phi(v_4) = -a(w_1 - w_2) + c(w_2 - w_3) = -a\varphi(v_1 - 2v_2) + c\varphi(v_1 + v_4)$ e quindi $\ker\varphi = \langle v_1 - 2v_2 - 3v_3 + v_4, (a-c)v_1 - 2av_2 + (1-c)v_4 \rangle$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 4 e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la sua base canonica.*

(a) *Si consideri l'applicazione $\phi : P(X) \mapsto 2XP''(X) + (X-1)P'(X) - P(X)$. Si verifichi che si tratta di un endomorfismo di V, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ e si determinino $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\phi$. È vero che in $\mathrm{im}\phi$ vi sono polinomi di ogni grado minore di 4?*

(b) *Si verifichi che, per ogni numero reale, c, l'applicazione $\nu_c : P(X) \mapsto P(c)$ è un elemento di V^*. È vero che $\mathcal{N}^* = \{\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ è una base di V^*.*

(*c*) *Se $\mathcal{N}^*$ è base di V^*, si scriva la matrice di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{N}^*,\mathcal{B}^*}(id)$, ove $\mathcal{B}^*$ è la base duale di $\mathcal{B}$ e si dica qual è la base duale, $\mathcal{N}$, di V. Si scriva $\alpha_{\mathcal{N},\mathcal{B}}(id)$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio $\phi(P(X)$ ha grado minore o uguale al grado di $P(X)$ e quindi l'immagine dei vettori di V è contenuta in V. Si tratta di un'applicazione lineare perché la derivazione e la moltiplicazione per un polinomio costante sono applicazioni lineari. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\ker\phi = \langle 1 - X \rangle$ ed $\operatorname{im}\phi = \left\langle 1, X^2 + 2X, 2X^3 + 9X^2 \right\rangle$, che non contiene polinomi di grado 1.

(*b*) Qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, ν_c è un'applicazione lineare (per la definizione di somma e prodotto tra funzioni polinomiali). Sia $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \dots, \delta_3\}$ la base duale della base canonica di V. Allora, per ogni valore di c, si ha $\nu_c = \sum_{j=0}^{3} \nu_c(X^j)\delta_j$. Quindi le coordinate dei vettori $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3$ sono le colonne della matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$ che è invertibile (cf. ad es. il determinante di Vandermonde).

(*c*) $\alpha_{\mathcal{N}^*,\mathcal{B}^*}(id) = B$; quindi $\alpha_{\mathcal{N},\mathcal{B}}(id) = {}^tB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 4. *Sia n un intero maggiore o uguale a 3 e si considerino le matrici $T_n \in M_n(\mathbb{Q})$, definite da*

$$T_n = b \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(j+1, j) + c \sum_{j=1}^{n} \varepsilon(n-j+1, j),$$

ove gli scalari b, c appartengono a $\mathbb{Q}$ e $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i, j \le n \,\}$ è la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$.
(*a*) *Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di T_4, T_5 e T_6.*
(*b*) *Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det T_n$, al variare di n.*

Svolgimento. Si ha $\det T_{2k} = -c(b+c)(b^2 - c^2)^k$ e $\det T_{2k+1} = c(b^2 - c^2)^k$.

Ovvero $\det T_n = (-1)^{n-1} c(b+c)^{1-n+2[n/2]}(b^2 - c^2)^{[n/2]}$ per ogni valore di $n \ge 3$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 gennaio 2010 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = (2X - 1 - i\sqrt{3})(X^2 + (1+i)X + i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino e si disegnino sul piano di Gauss le radici del polinomio $P(X)$.

(b) Si determinino le lunghezze dei lati e l'area del triangolo avente come vertici le tre radici del polinomio $P(X)$.

(c) Si determini l'immagine della retta contenente il lato più lungo del triangolo nella riflessione rispetto al cerchio unitario e la si disegni nel piano di Gauss.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ (risp. $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$) una base di V (risp. W).

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare, $\varphi : V \to W$, che soddisfi alle condizioni

$$\begin{aligned} \varphi(v_3 - 2v_4) = \varphi(3v_2 - v_1) = w_2 - w_3 \\ \varphi(v_1 + v_3) = \varphi(3v_2 + 2v_4) = w_3 - w_1. \end{aligned}$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, di tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni. Si tratta di una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W))$? Se sì, di quale dimensione?

(b) Si determinino i sottospazi $\ker\varphi$ e $\operatorname{im}\varphi$. per tutte le applicazioni soddisfacenti alle condizioni del punto precedente e si dia una condizione necessaria e sufficiente sulle entrate della matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$ affinché il rango sia massimo.

ESERCIZIO 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 4 e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la sua base canonica.

(a) Si consideri l'applicazione $\phi : P(X) \mapsto (X-1)P''(X) + 2XP'(X) - P(X)$. Si verifichi che si tratta di un endomorfismo di V, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ e si determinino $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$. È vero che in $\operatorname{im}\phi$ vi sono polinomi di ogni grado minore di 4?

(b) Si verifichi che, per ogni numero reale, c, l'applicazione $\nu_c : P(X) \mapsto P(c)$ è un elemento di V^*. È vero che $\mathcal{N}^* = \{\nu_0, \nu_{-1}, \nu_{-2}, \nu_{-3}\}$ è una base di V^*.

(c) Se $\mathcal{N}^*$ è base di V^*, si scriva la matrice di cambiamento di base $\alpha_{\mathcal{N}^*,\mathcal{B}^*}(id)$, ove $\mathcal{B}^*$ è la base duale di $\mathcal{B}$ e si dica qual è la base duale, $\mathcal{N}$, di V. Si scriva $\alpha_{\mathcal{N},\mathcal{B}}(id)$.

ESERCIZIO 4. Sia n un intero maggiore o uguale a 3 e si considerino le matrici $S_n \in M_n(\mathbb{Q})$, definite da

$$S_n = a\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon(i, i+1) + b\sum_{i=1}^{n} \varepsilon(i, n-i+1),$$

ove gli scalari a, b appartengono a $\mathbb{Q}$ e $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \leq i, j \leq n \,\}$ è la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$.

(a) Si scrivano le matrici e si calcoli il determinante di S_4, S_5 e S_6.

(b) Si scriva e si dimostri una formula generale per $\det S_n$, al variare di n.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 marzo 2010

ESERCIZIO 1. *Si consideri il numero complesso $z_0 = i - 1$.*
(*a*) *Si scriva z_0 in forma trigonometrica ed esponenziale..*
(*b*) *Si determinino le radici terze di z_0, le si scriva in forma algebrica, trigonometrica ed esponenziale e le si disegni nel piano di Gauss.*
(*c*) *Dette z_1, z_2, z_3 le radici terze di z_0, si considerino i numeri complessi $\zeta_i = \frac{z_i}{|z_i|}$, per $i = 1, 2, 3$. Si dica se si tratta di radici dell'unità e si dica quanti elementi distinti contiene l'insieme $Z = \{\, \zeta_1^{n_1}\zeta_2^{n_2}\zeta_3^{n_3} \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} \,\}$. È sempre vero che, dato un umero complesso $z \neq 0$, il numero $\frac{z}{|z|}$ è una radice dell'unità?*

Svolgimento. (a) $|i - 1| = \sqrt{2}$ e $\operatorname{Arg}(i - 1) = \frac{3}{4}\pi$. Quindi $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, e^{\frac{3i\pi}{4}}$.
(*b*) Applicando le formule di de Moivre, si ottiene

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})\right) = \sqrt[6]{2}\, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3})} \qquad \text{per } k = 1, 2, 3.$$

Ovvero $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)$, $z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Lasciamo al lettore il compito di disegnare l'opportuno triangolo equilatero nel piano di Gauss.
(*c*) Basta guardare alla forma esponenziale per accorgersi che $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sono radici 24-esime dell'unità (moltiplicando per 24 l'esponente si ottiene in ogni caso un multiplo intero di $2\pi i$). In particolare ζ_1 e ζ_2 sono radici primitive e quindi l'insieme Z contiene tutte e sole le 24 radici ventiquattresime di 1.

È falso che ogni numero complesso di modulo 1 sia una radice dell'unità. Guardando alla rappresentazione esponenziale, le radici dell'unità sono tutte e sole le potenze di e che hanno come esponente un multiplo razionale di $2\pi i$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1+2x_2+3x_3 \\ x_1+x_3 \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\varphi)$, ove con $\mathcal{E}$ si indicano, come di consueto le basi canoniche dei due spazi. Si determini la dimensione ed una base per i sottospazi $\ker\varphi$ ed $\operatorname{im}\varphi$.*
(*b*) *Si consideri l'applicazione $\Phi : M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\Phi(X) = AX$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ.*
(*c*) *Si determinino, quando esistono, tutte le inverse destre, sinistre o bilatere di A. Detta B una tale inversa, è vero che l'applicazione $\Psi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, definita da $\Psi(Y) = BY$, è un'inversa (destra, sinistra o bilatera?) di Φ? Sono tutte di questo tipo le inverse di Φ? (in caso affermativo dare una dimostrazione o, in caso negativo, un controesempio).*

Svolgimento. (a) Si ha $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, che ha rango 2. Quindi $\operatorname{im}\varphi = \mathbb{R}^2$ e $\ker\varphi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$.
(*b*) Tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, si ha

$$\ker\Phi \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \ker\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

e quindi il nucleo di Φ è un sottospazio di dimensione 2 e l'immagine ha dimensione 4; ovvero Φ è suriettiva.
(*c*) φ è suriettiva, ma non iniettiva, quindi ha solo inverse destre. Le loro matrici (nelle basi canoniche) costituiscono il sottoinsieme

$$\Phi^{-1}(\mathbf{1}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \ker\Phi,$$

ovvero una sottovarietà lineare di dimensione 2 di $\mathbb{A}(M_{3\times 2}(\mathbb{R}))$. Presa comunque B in questa sottovarietà, l'applicazione $\Psi(Y) = BY$ è un'inversa destra di Φ, ma non è vero che ogni inversa destra di Φ sia di questo tipo. Ad esempio l'applicazione lineare $\Psi_0 : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, definita da

$$\Psi_0(\varepsilon(1,1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_0(\varepsilon(1,2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi_0(\varepsilon(2,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_0(\varepsilon(2,2)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix};$$

è un'inversa destra di Φ, ma non esiste una matrice $B_0 \in \Phi^{-1}(\mathbf{1}_2)$ tale che $\Psi_0(Y) = B_0 Y$ per ogni $Y \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale complesso e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi*

$$U = \langle v_1 + iv_3, v_2 - (1+i)v_3, iv_1 - v_3 \rangle, \quad e \quad W : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

(*a*) *Si determini una base per ciascuno dei due sottospazi U e W.*
(*b*) *Si verifichi se $V = U \oplus W$ e, in caso positivo, si determini la matrice della proiezione $\pi : V \to V$ su U parallelamente a W.*
(*c*) *Si indichi con $V_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale V pensato come spazio vettoriale* reale *e si verifichi che $\mathcal{R} = \{v_1, v_2, v_3, iv_1, iv_2, iv_3\}$, è una base. Si mostri che U e W sono sottospazi di $V_{\mathbb{R}}$ e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(\pi_{\mathbb{R}})$ ove $\pi_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ è la proiezione su U parallelamente a W*
(*d*) *Che relazioni ci sono tra lo spazio vettoriale $V^* = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ e $V_{\mathbb{R}}^* = Hom_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$? e tra le basi duali $\mathcal{V}^*$ e $\mathcal{R}^*$?*

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + iv_3, v_2 - (1+i)v_3$ sono una base di U su $\mathbb{C}$, e $v_1 - v_2$ è base di W su $\mathbb{C}$.
(*b*) I tre vettori sono linearmente indipendenti e quindi $V = U \oplus W$. La proiezione, π, ha matrice

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3-i & 3-i & 1-2i \\ 2+i & 2+i & -1+2i \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

(*c*) Un vettore di $V = V_{\mathbb{R}}$ si scrive come $(a_1 + ib_1)v_1 + (a_2 + ib_2)v_2 + (a_3 + ib_3)v_3$ con $a_1, \dots, b_3 \in \mathbb{R}$ e quindi i vettori di $\mathcal{R}$ generano $V_{\mathbb{R}}$. Inoltre, i vettori di $\mathcal{R}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$, perché una loro combinazione lineare nulla a coefficienti reali, produrrebbe una combinazione lineare nulla, a coefficienti complessi, degli elementi di $\mathcal{V}$. L'annullarsi dei coefficienti complessi dei vettori di $\mathcal{V}$ equivale all'annullarsi dei coefficienti reali degli elementi di $\mathcal{R}$.

Analogamente U e W sono sottospazi di $V_{\mathbb{R}}$ (la cui dimensione reale è il doppio della dimensione su $\mathbb{C}$) e la matrice della proiezione è

$$\alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(\pi_{\mathbb{R}}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R}).$$

(*d*) Non c'è una relazione diretta tra V^* e $V_{\mathbb{R}}^*$, così sono distinte le forme lineari che costituiscono le basi duali $\mathcal{V}^* = \{v_{1,\mathbb{C}}^*, v_{2,\mathbb{C}}^*, v_{3,\mathbb{C}}^*\}$ e $\mathcal{R}^* = \{v_{1,\mathbb{R}}^*, v_{2,\mathbb{R}}^*, v_{3,\mathbb{R}}^*, (iv_1)_{\mathbb{R}}^*, (iv_2)_{\mathbb{R}}^*, (iv_3)_{\mathbb{R}}^*, \}$. Per poter trovare una relazione, indichiamo con $V_{\mathbb{R}}^* \otimes \mathbb{C}$ lo spazio vettoriale *complesso* generato da $\mathcal{R}^*$, ovvero $V_{\mathbb{R}}^* \otimes \mathbb{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$. In tale spazio, si ha $v_{k,\mathbb{C}}^* = v_{k,\mathbb{R}}^* + i(iv_k)_{\mathbb{R}}^*$, per $k = 1, 2, 3$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 29 marzo 2010

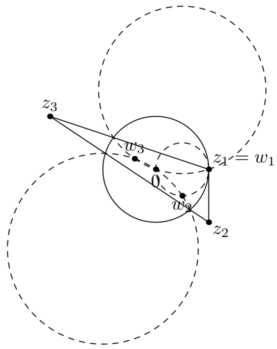
ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 - (2-3i)X + 1 - 3i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si verifichi che* $P(1) = 0$. *Si determinino le radici,* z_1, z_2, z_3, *di* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determini l'area del triangolo* $z_1z_2z_3$ *e si verifichi che il suo baricentro è il numero complesso* $z_1+z_2+z_3$. *Si determinino le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo, nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(c) *Si determinino e si disegnino i vertici ed i centri delle circonferenze che formano i lati del triangolo (curvilineo) che si ottiene riflettendo nella circonferenza unitaria i vertici ed i lati del triangolo* $z_1z_2z_3$.

Svolgimento. (a) $P(X) = (X-1)(X^2+X-1+3i) = (X-1)(X+2-i)(X-1+i)$.



(b) L'area del triangolo è uguale a $\frac{1}{2}|\Im(-3+i)\overline{(-i)}| = \frac{3}{2}$. La somma delle radici è uguale a 0 e quindi coincide con il baricentro del triangolo, che è $\frac{z_1+z_2+z_3}{3} = 0$. Le tre rette sono: $r_3 = z_1 \vee z_2 : z + \bar{z} - 2 = 0$, $r_2 = z_1 \vee z_3 : (1-3i)z + (1+3i)\bar{z} - 2 = 0$, $r_1 = z_2 \vee z_3 : (2-3i)z + (2+3i)\bar{z} + 2 = 0$.

(c) I vertici sono i punti $w_1 = z_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{1-i}{2}$, $w_3 = \frac{1}{\bar{z}_3} = \frac{i-2}{5}$, come nella figura di lato.

I lati sono archi delle seguenti circonferenze: $\mathscr{C}_3$ per w_1 e w_2, di centro $\frac{1}{2}$, $\mathscr{C}_2$ per w_1 e w_3, di centro $\frac{1+3i}{2}$, $\mathscr{C}_1$ per w_2 e w_3, di centro $-\frac{2+3i}{2}$.

Qual è la riflessione dell'insieme dei punti interni al triangolo? □

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{Q}$ *dei numeri razionali e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ *(risp.* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$*) una base di* V *(risp.* W*).*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare,* $\varphi : V \to W$, *che soddisfi alle condizioni*

$$\varphi(v_1 - 2v_3) = w_1 - 2w_4, \quad \varphi(3v_1 + 4v_2) = 3w_1 + 4w_2 - 12w_3 - 6w_4, \quad \varphi(2v_2 + 3v_3) = 2w_2 - 6w_3.$$

In caso affermativo, si scrivano le matrici, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi)$, *di tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tali condizioni. Si tratta di una sottovarietà lineare di* $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W))$? *Se sì, di quale dimensione?*

(b) *Per ogni applicazione* $\varphi : V \to W$ *del punto precedente, si consideri l'applicazione trasposta* $\varphi^* : W^* \to V^*$. *È vero che tutti i sottospazi* $\ker\varphi^*$, *al variare di* φ, *sono contenuti in uno stesso sottospazio proprio di* W^*. *In caso affermativo determinarlo.*

È vero che qualsiasi omomorfismo $\psi : W^* \to V^*$ *si può scrivere nella forma* $\alpha \circ \varphi^* \circ \beta$, *ove* $\alpha : V^* \to V^*$ *e* $\beta : W^* \to W^*$ *sono applicazioni lineari invertibili e* $\varphi^* : W^* \to V^*$ *è la trasposta di una delle applicazioni del punto precedente?*

Svolgimento. (a) Le tre condizioni non sono indipendenti, perché $3v_1 + 4v_2 = 3(v_1 - 2v_3) + 2(2v_2 + 3v_3)$ e $3w_1 + 4w_2 - 12w_3 - 6w_4 = 3(w_1 - 2w_4) + 2(2w_2 - 6w_3)$. Vi sono quindi infinite applicazioni lineari che soddisfano alle condizioni date e le loro matrici sono

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1+4a & -3a & 2a \\ 4b & 1-3b & 2b \\ 4c & -3-3c & 2c \\ -2+4d & -3d & 2d \end{pmatrix},$$

al variare di (a,b,c,d) in $\mathbb{Q}^4$ (perché?). Si tratta quindi di una sottovarietà lineare di dimensione 4 in $\mathbb{A}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W))$.

(b) $\ker\varphi^* = (\mathrm{im}\,\varphi)^\perp$ e, $\mathrm{im}\,\varphi = \langle w_1 - 2w_4, w_2 - 3w_3, aw_1 + bw_2 + cw_3 + dw_4 \rangle$. Quindi, qualunque sia φ, $(\mathrm{im}\,\varphi)^\perp \subseteq \langle w_1 - 2w_4, w_2 - 3w_3 \rangle^\perp = \langle 2w_1^* + w_4^*, 3w_2^* + w_3^* \rangle$.

Tutti gli omomorfismi del tipo $\alpha \circ \varphi^* \circ \beta$ hanno rango maggiore o uguale a 2 (perché?) e quindi non si possono scrivere i questo modo tutte le applicazioni lineari $\psi : W^* \to V^*$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 4 e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ la sua base canonica.*

(*a*) *Si consideri l'applicazione $\phi : P(X) \mapsto P(X+1) - (X+2)P'(X)$. Si verifichi che si tratta di un endomorfismo di V, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ e si determinino kerϕ ed imϕ.*

(*b*) *Sia $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ la base duale di V^* e c un numero reale fissato. Si verifichi che l'applicazione $\lambda_c : P(X) \mapsto P'(c)$ è un elemento di V^* e lo si scriva come combinazione lineare dei vettori della base duale. Esistono dei numeri reali, $c_1, \dots, c_4$, tali che $\lambda_{c_1}, \dots, \lambda_{c_4}$ sia una base di V^*?*

(*c*) *Si verifichi che l'applicazione $\eta_c : P(X) \mapsto \int_0^c P(x)dx$ è un elemento di V^* e lo si scriva come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}^*$. Esistono dei numeri reali, $c_1, \dots, c_4$, tali che $\eta_{c_1}, \dots, \eta_{c_4}$ sia una base di V^*?*

Svolgimento. (a) Il polinomio $\phi(P(X))$ ha grado minore o uguale del grado di $P(X)$ e quindi l'immagine dei vettori di V è contenuta in V. Si tratta di un'applicazione lineare perché la derivazione e la moltiplicazione per un polinomio costante sono applicazioni lineari. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\ker\phi = \langle 1+X \rangle$ ed $\operatorname{im}\phi = \langle 1, X^2+2X-1, 2X^3+3X^2-3X-1 \rangle$.

(*b*) L'applicazione $P(X) \mapsto P'(c)$ è un'applicazione lineare (perché lo sono la derivazione ed il calcolo di un polinomio in un fissato numero reale). In particolare, se $P(X) = \sum_{j=0}^3 a_j X^j$, si ha $P'(c) = \sum_{j=1}^3 j a_j c^{j-1}$. Possiamo quindi scrivere $\lambda_c = \sum_{j=1}^3 j c^{j-1} \delta_j$. Quindi, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$, $\lambda_c \in \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3 \rangle$ e perciò non possiamo generare tutto V^* con vettori di questo tipo.

(*c*) L'applicazione $P(X) \mapsto \int_0^c P(x)dx$ è un'applicazione lineare (perché lo è l'integrazione definita). In particolare, se $P(X) = \sum_{j=0}^3 a_j X^j$, si ha $\eta_c(P) = \int_0^c P(x)dx = \sum_{j=0}^3 a_j \frac{c^{j+1}}{j+1}$. Possiamo quindi scrivere $\eta_c = \sum_{j=0}^3 \frac{c^{j+1}}{j+1} \delta_j$. Presi quattro numeri reali non nulli, $c_1, \dots, c_4$, a due a due distinti, le coordinate di $\eta_{c_1}, \dots, \eta_{c_4}$ nella base $\mathcal{B}^*$ sono le colonne della matrice

$$B = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1^2/2 & c_2^2/2 & c_3^2/2 & c_4^2/2 \\ c_1^3/3 & c_2^3/3 & c_3^3/3 & c_4^3/3 \\ c_1^4/4 & c_2^4/4 & c_3^4/4 & c_4^4/4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \det B = \frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{4!} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 & c_4^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 & c_4^3 \end{pmatrix} \neq 0$$

per la multilinearità del determinante rispetto alle righe ed alle colonne e per le note proprietà del determinante di Vandermonde. Quindi $\{\eta_{c_1}, \dots, \eta_{c_4}\}$ è una base di V^*. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 13 luglio 2010

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + (1 + 6i)X + 2 + 6i \in \mathbb{C}[X]$.

(*a*) *Si verifichi che* $P(-1) = 0$. *Si determinino le radici,* z_1, z_2, z_3, *di* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(*b*) *Si determinino le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo avente come vertici le tre radici di* $P(X)$, *nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$. *È sempre vero che il baricentro di un triangolo che ha i vertici nelle radici di un polinomio di terzo grado in* $\mathbb{C}[X]$ *coincide con la somma delle radici del polinomio?*

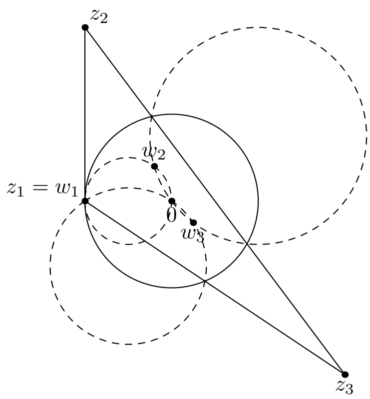
(*c*) *Si disegni il triangolo (curvilineo) che si ottiene riflettendo nella circonferenza unitaria i vertici ed i lati del triangolo* $z_1z_2z_3$.

Svolgimento. (a) $P(X) = (X + 1)(X^2 - X + 2 + 6i) = (X + 1)(X + 1 - 2i)(X - 2 + 2i)$.

(*b*) Il baricentro del triangolo coincide con la somma delle radici se, e solo se, la somma delle radici è uguale a 0, ovvero se, e solo se, il coefficiente del termine di grado 2 del polinomio è nullo.

Le tre rette sono:

$$\begin{aligned} r_3 = z_1 \vee z_2 &: z + \bar{z} + 2 = 0, \\ r_2 = z_1 \vee z_3 &: (2 - 3i)z + (2 + 3i)\bar{z} + 4 = 0, \\ r_1 = z_2 \vee z_3 &: (4 - 3i)z + (4 + 3i)\bar{z} - 4 = 0. \end{aligned}$$



(*c*) I vertici sono i punti $w_1 = z_1 = -1$, $w_2 = \frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{-1+2i}{5}$, $w_3 = \frac{1}{\bar{z}_3} = \frac{1-i}{4}$, come nella figura di lato.

I lati sono archi delle seguenti circonferenze: $\mathscr{C}_3$ per w_1 e w_2, di centro $-\frac{1}{2}$, $\mathscr{C}_2$ per w_1 e w_3, di centro $-\frac{2+3i}{4}$, $\mathscr{C}_1$ per w_2 e w_3, di centro $\frac{4+3i}{4}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{Q}$ *dei numeri razionali e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *(risp.* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$*) una base di* V *(risp.* W*). Si indichi con* $\phi_t : V \to W$ *l'omomorfismo di matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -t & t \\ 1 & t & -t & t-1 \\ 1 & 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Si determinino, al variare di* $t \in \mathbb{Q}$, *i sottospazi* $\ker\phi_t$ *e* $\mathrm{im}\,\phi_t$, *indicando delle equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi.*

(*b*) *Si determini, al variare di* $t \in \mathbb{Q}$, *il nucleo dell'applicazione* $\Phi_t : Hom_{\mathbb{Q}}(V, V) \to Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$, *definita da* $\psi \mapsto \phi_t \circ \psi$. *Ci sono valori di* t *per cui è vero che* $\alpha \circ \phi_t = \beta \circ \phi_t \implies \alpha = \beta$ *qualunque siano* α *e* β *in* $Hom_{\mathbb{Q}}(W, W)$*?*

(*c*) *Si verifichi che* $V = \ker\phi_0 \oplus \ker\phi_1$ *e si scriva la matrice della proiezione su* $\ker\phi_0$ *parallelamente a* $\ker\phi_1$.

Svolgimento. (a) Se $t \notin \{0, 1\}$, $\mathrm{im}\,\phi_t = W$ e $\ker\phi_t$ ha equazioni $\begin{cases} X_1 + (t-1)X_4 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$. Nei casi eccezionali, si ha

$$\ker\phi_0 : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{im}\,\phi_0 : Y_1 - 2Y_3 = 0;$$

$$\mathrm{im}\,\phi_1 : Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \ker\phi_1 : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(b) Se $t \notin \{0,1\}$, si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\ker \Phi_t) = \left\langle \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per i valori speciali la dimensione raddoppia e lasciamo i dettagli al lettore.

Infine, $\alpha \circ \phi_t = \beta \circ \phi_t \implies \alpha = \beta$ se ϕ_t è suriettiva, ovvero per $t \notin \{0,1\}$.

(c) La matrice della proiezione è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 3. *Per $n \geq 2$, denotiamo con X_n la matrice di $M_n(\mathbb{Q})$,*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(i\varepsilon(i,i) + (-1)^{i-1} i\varepsilon(n-i+1,i) \right),$$

ove si sono indicate con $\varepsilon(h,k)$ le matrici della base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$.

(a) Si scrivano le matrici X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 e se ne calcolino i determinanti.

(b) Si scrivano e si dimostrino delle formule generali per il rango e per il determinante di X_n, in funzione dell'intero n.

Svolgimento. (a) Si ha

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \; X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \; X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; X_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi, posto $d_n = \det X_n$, si ha $d_2 = 4$, $d_3 = 0$, $d_4 = 96$, $d_5 = 0$ e $d_6 = 5760$.

(b) Se $n = 2k+1$ è dispari, $d_n = 0$ perché le colonne di X_n sono linearmente dipendenti (ad esempio, l'ultima colonna è uguale alla prima, moltiplicata per n). Tenendo conto delle colonne proporzionali, si ha $\operatorname{rk} X_n = \frac{n+(-1)^k}{2}$.

Se $n = 2k$ è pari, le colonne di X_n sono linearmente indipendenti e quindi $\operatorname{rk} X_n = n$. Ricordando la multilinearità del determinante come funzione delle colonne e con un facile procedimento induttivo, si dimostra che $d_n = 2^k n!$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 13 settembre 2010

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = 4X^3 - (13-9i)X^2 + (9-13i)X + 4i \in \mathbb{C}[X]$.

(*a*) *Si verifichi che* $P(1) = 0$. *Si determinino le radici,* z_1, z_2, z_3, *di* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

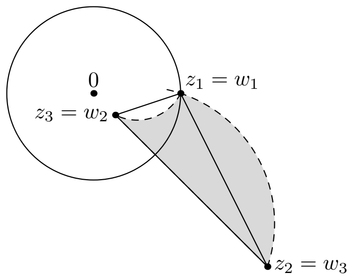
(*b*) *Si determinino, nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$, *le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo avente come vertici* z_1, z_2, z_3.

(*c*) *Si disegni il triangolo (curvilineo) che si ottiene riflettendo nella circonferenza unitaria i vertici ed i lati del triangolo* $z_1z_2z_3$.

Svolgimento. (a) $P(X) = (X-1)(4X^2 - (9-9i)X - 4i) = (X-1)(X-2+2i)(X - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i)$.

(*b*) Le tre rette sono:

$$\begin{aligned} r_3 = z_1 \vee z_2 &: (2-i)z + (2+i)\bar{z} - 4 = 0, \\ r_2 = z_1 \vee z_3 &: (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} - 2 = 0, \\ r_1 = z_2 \vee z_3 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 0. \end{aligned}$$



(*c*) I vertici sono i punti $w_1 = z_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{\bar{z}_2} = z_3$, $w_3 = \frac{1}{\bar{z}_3} = z_2$, come nella figura a lato.

I lati sono la retta r_1 e gli archi delle seguenti circonferenze: $\mathscr{C}_3$ per w_1 e w_2, di centro $-\frac{2+i}{4}$, $\mathscr{C}_2$ per w_1 e w_3, di centro $-\frac{1-3i}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *spazi vettoriali sul campo* $\mathbb{Q}$ *dei numeri razionali e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ *(risp.* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$*) una base di* V *(risp.* W*). Si indichi con* $\phi_t : V \to W$ *l'omomorfismo di matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ -t & -t & 0 \\ t & t-1 & t \end{pmatrix}.$$

(*a*) *Si determinino, al variare di* $t \in \mathbb{Q}$, *i sottospazi* $\ker\phi_t$ *e* $\mathrm{im}\,\phi_t$, *indicando delle equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi.*

(*b*) *Si determini, al variare di* $t \in \mathbb{Q}$, *il nucleo dell'applicazione* $\Phi_t : Hom_{\mathbb{Q}}(W, W) \to Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$, *definita da* $\psi \mapsto \psi \circ \phi_t$ *e si scriva una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\ker\Phi_t) \subseteq M_4(\mathbb{R})$.

(*c*) *Si dica se* $W = \mathrm{im}\,\phi_0 \oplus \mathrm{im}\,\phi_1$ *e si scriva la matrice della proiezione su* $\mathrm{im}\,\phi_0$ *parallelamente a* $\mathrm{im}\,\phi_1$.

Svolgimento. (a) Se $t \notin \{0, 1\}$, $\ker\phi_t = \langle 0 \rangle$ e $\mathrm{im}\,\phi_t$ ha equazioni $(t-1)X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 0$. Nei casi eccezionali, si ha

$$\ker\phi_0 : \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathrm{im}\,\phi_0 : \begin{cases} Y_3 = 0 \\ Y_1 - Y_2 + Y_4 = 0 \end{cases};$$
$$\mathrm{im}\,\phi_1 : \begin{cases} Y_1 - Y_2 = 0 \\ Y_2 + Y_3 - Y_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ker\phi_1 : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

(*b*) Se $t \notin \{0, 1\}$, si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\ker\Phi_t) = \left\langle \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ t-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t-1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ t-1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Per i valori speciali la dimensione raddoppia e lasciamo i dettagli al lettore.

(c) La matrice della proiezione è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 3. *Per $n \geq 3$, denotiamo con S_n la matrice di $M_n(\mathbb{Q})$,*

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} j\varepsilon(j,j) + \sum_{i=2}^{n} \left(i\varepsilon(1,i) + (1-i)\varepsilon(n,i-1)\right),$$

ove si sono indicate con $\varepsilon(h,k)$ le matrici della base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$.
(a) Si scrivano le matrici S_3, S_4, S_5, S_6 e se ne calcolino i determinanti.
(b) Si scriva e si dimostri una formula generale per il determinante di S_n, in funzione dell'intero n. Che dire del determinante delle matrici

$$U_n = \left[\sum_{j=1}^{n} j\varepsilon(j,j)\right]^2 + \left[\sum_{i=2}^{n} \left(i\varepsilon(1,i) + (1-i)\varepsilon(n,i-1)\right)\right]^2 ?$$

Svolgimento. (a) Si ha

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \ S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \ S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \ S_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

e quindi, posto $d_n = \det S_n$, si ha $d_3 = 12$, $d_4 = 48$, $d_5 = 240$ e $d_6 = 1440$.
(b) $d_n = 2 \cdot n!$. e $\det U_n = -n(n-1)^2[(n-1)!]^2$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 settembre 2010

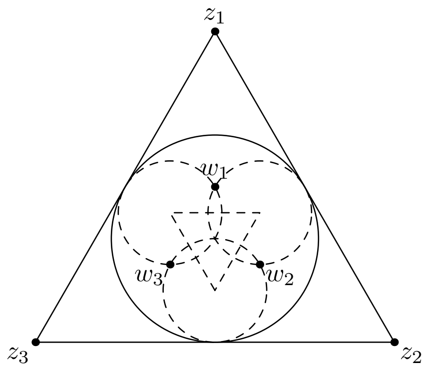
ESERCIZIO 1. *Siano z_1, z_2, z_3, le radici cubiche del numero complesso $-8i$.*

(a) *Si scrivano in forma algebrica z_1, z_2, z_3 e si disegni nel piano di Gauss il triangolo avente i tre punti come vertici.*

(b) *Si determinino, nelle coordinate z e $\bar{z}$, le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo avente come vertici z_1, z_2, z_3.*

(c) *Si determinino e si disegnino i cerchi che si ottengono riflettendo nella circonferenza unitaria i lati del triangolo $z_1z_2z_3$. Si disegni, in particolare, il triangolo che ha come vertici i centri di tali circonferenze.*

Svolgimento. (a) Si ha $z_1 = 2i$, $z_2 = \sqrt{3} - i$, $z_3 = -\sqrt{3} - i$.



(b) Le tre rette sono:

$$\begin{aligned} r_3 = z_1 \vee z_2 &: (\sqrt{3} - i)z + (\sqrt{3} + i)\bar{z} - 4 = 0, \\ r_2 = z_1 \vee z_3 &: (\sqrt{3} + i)z + (\sqrt{3} - i)\bar{z} + 4 = 0, \\ r_1 = z_2 \vee z_3 &: -iz + i\bar{z} + 2 = 0. \end{aligned}$$

(c) I lati si riflettono in tre circonferenze passanti per l'origine del piano di Gauss e i riflessi dei tre vertici, w_1, w_2, w_3, sono gli altri punti di intersezione delle circonferenze, prese a due a due. In particolare $w_1 = \frac{i}{2}$, $w_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{4}$, $w_3 = -\frac{\sqrt{3}+i}{4}$.

I riflessi dei lati sono le seguenti circonferenze: $\mathscr{C}_3$ per w_1 e w_2, di centro $\frac{\sqrt{3}+i}{4}$, $\mathscr{C}_2$ per w_1 e w_3, di centro $-\frac{\sqrt{3}-i}{4}$. $\mathscr{C}_1$ per w_1 e w_3, di centro $-\frac{i}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ (risp. $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$) una base di V (risp. W).*

(a) *Si determini, se esiste, un omomorfismo $\phi : W \to V$ soddisfacente alle condizioni*

$$\phi(w_1 + w_4) = 4v_1 - 2v_2, \quad \phi(2w_1 + w_2) = v_2 - 4v_3, \quad \phi(2w_1 + w_3) = 2v_1 - v_2, \quad \phi(3w_1 - w_4) = 2v_2 - 8v_3,$$

e si scriva la sua matrice nella basi date. Si determinino, in particolare, la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$.

(b) *Si consideri l'omomorfismo $\psi : V \to W$ di matrice*

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi $\ker\psi$ ed $\operatorname{im}\psi$. È vero che $W = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\psi$ e $V = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\phi$?

(c) *Si consideri l'insieme $\mathscr{C} = \{\, \chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, W) \mid \phi \circ \chi \circ \psi = 0 \,\}$. Si dica se $\mathscr{C}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, W)$ e se ne determini la dimensione. In caso affermativo, esibire una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\mathscr{C})$ di $M_4(\mathbb{Q})$.*

Svolgimento. (a) Si ha $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, e $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}\phi = 2$, per cui $\dim\operatorname{im}\phi = 2 = \dim\ker\phi$. In particolare, $\ker\phi = \langle 2w_1 + w_2 + w_3, 3w_2 - w_3 + 2w_4 \rangle$ e $\operatorname{im}\phi = \langle v_1 - 2v_3, 2v_1 - v_2 \rangle$. Infine,

$$\operatorname{im}\phi : 2X_1 + 4X_2 + X_3 = 0 \qquad \text{e} \qquad \ker\phi : \begin{cases} Y_1 - 2Y_2 + 3Y_4 = 0 \\ Y_2 - Y_3 - 2Y_4 = 0 \end{cases}.$$

(*b*) Sia $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi)$. Si ha $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk}\psi = 2$, per cui $\dim \operatorname{im}\psi = 2$, $\dim\ker\psi = 1$. In particolare, $\operatorname{im}\psi = \langle 2w_1 - w_3, w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4\rangle$ e $\ker\psi = \langle v_1 + v_2 + v_3\rangle$. Infine,

$$\ker\psi : \begin{cases} 2X_1 + X_2 - 3X_3 = 0 \\ X_2 - X_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\psi : \begin{cases} Y_1 + 2Y_3 + 3Y_4 = 0 \\ Y_2 + Y_4 = 0 \end{cases}.$$

Entrambo le coppie di sottospazi sono in somma diretta.

(*c*) $\mathscr{C}$ è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, W)$ di dimensione 12, come si vede utilizzando opportunamente la condizione $\operatorname{im}(\chi \circ \psi) \subseteq \ker\phi$.

Delle matrici che costituiscano una base di $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\mathscr{C})$ sono, ad esempio,

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&2&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 3&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 2&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&3&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&2&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1&0&2&3 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&2&3 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&2&3 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&2&3 \end{pmatrix}.$$

Lasciamo al lettore l'onere di giustificare tale scelta. □

ESERCIZIO 3. *Sia $V = W_1 \oplus W_2$ uno spazio vettoriale reale di dimensione $n \geq 2$ e sia $\pi_1 : V \to V$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2.*

(*a*) *È vero che $V^* = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$ e che $\pi_1^* : V^* \to V^*$ è una proiezione (quale)? Si verifichino le proprie affermazioni quando $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di V e $W_1 = \langle v_1 + v_2, v_3 - v_4\rangle$, $W_2 = \langle v_1 - 2v_2, 3v_3 + v_4\rangle$.*

(*b*) *Si consideri l'insieme $\mathscr{H} = \{\, \phi \in Hom(V, V) \mid \pi_1 \circ \phi \circ \pi_1 = \phi \,\}$. Si dica se $\mathscr{H}$ è un sottospazio vettoriale di $Hom(V, V)$ e, in ogni caso, si descrivano gli elementi di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\mathscr{H})$.*

Svolgimento. (a) Ricordiamo che $W_1^{\perp} + W_2^{\perp} = (W_1 \cap W_2)^{\perp} = V^*$, perché $W_1 \cap W_2 = \langle 0\rangle$. Inoltre, $W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} = (W_1 + W_2)^{\perp} = \langle 0\rangle$, perché $W_1 + W_2 = V$. Infine, $\pi_1^* \circ \pi_1^* = (\pi_1 \circ \pi_1)^* = \pi_1^*$ e quindi π_1 è una proiezione e $\ker\pi_1^* = (\operatorname{im}\pi_1)^{\perp} = W_1^{\perp}$, $\operatorname{im}\pi_1^* = (\ker\pi_1)^{\perp} = W_2^{\perp}$. Lasciamo la verifica nel caso particolare al lettore....

(*b*) Tutte le risposte sono immediate. $\mathscr{H}$ è un sottospazio di dimensione 4 e una base di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\mathscr{H})$ è data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 2/3&1/3&0&0 \\ 2/3&1/3&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 2/3&1/3&0&0 \\ -2/3&-1/3&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1/4&-3/4 \\ 0&0&1/4&-3/4 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1/4&-3/4 \\ 0&0&-1/4&3/4 \end{pmatrix}.$$

□