
Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 dicembre 2010 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino le radici in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

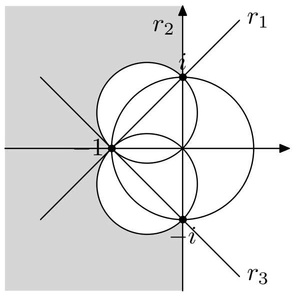
(b) *Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo,* D*, avente come vertici le radici di* $P(X)$ *e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$*.*

(c) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo* D *nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo* D*.*

Svolgimento. (a) $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X - i)(X + i)$ e disegnamo qui sotto il triangolo formato dalle radici.

(*b*) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$r_1 : (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 2 = 0,$$
$$r_2 : z + \bar{z} = 0,$$
$$r_3 : (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} + 2 = 0.$$



(*c*) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono:

$$\lambda^*(r_1) : \left| z - \frac{-1 + i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda^*(r_2) = r_2, \qquad \lambda^*(r_3) : \left| z + \frac{1 + i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La parte ombreggiata del semipiano rappresenta l'immagine dei punti interni al triangolo tramite la riflessione nel cerchio unitario. □

ESERCIZIO 2. *Sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *una base dello spazio vettoriale* V*. Sia* U *il sottospazio vettoriale generato dai vettori* $u_1 = v_1 + 3v_3 - 2v_4$*,* $u_2 = v_1 - 2v_2 - v_3 - 2v_5$*,* $u_3 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 - v_5$*, e sia* W *il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee* $\begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ X_2 - 3X_3 + X_4 - 4X_5 = 0 \\ X_3 + 2X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) *Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi* U *e* W*. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di* V *che si ottiene traslando tutti i vettori di* U *per il vettore* $u_0 = v_1 + 2v_2$*.*

(b) *Si determini la matrice* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ *dell'endomorfismo* $\pi : V \to V$ *che si ottiene proiettando i vettori si* U *parallelamente a* W*.*

(c) *Sia* $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ *definito ponendo* $\Phi(\phi) = \phi \circ \pi$*. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di* Φ*. È vero che si tratta di una proiezione? In caso affermativo si determini l'immagine dell'endomorfismo* $3\mathrm{id}_V - 2\pi$ *tramite la simmetria di asse* $\ker\Phi$ *e direzione* $\mathrm{im}\Phi$*.*

Svolgimento. (a) I tre vettori sono linearmente dipendenti $u_1 + u_2 - 2u_3 = 0$ e quindi ne bastano due per generare $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, che ha dimensione 2, essendo i due generatori indipendenti. Anche le tre equazioni lineari omogenee che definiscono W sono dipendenti ($II - I + 2III = 0$) e quindi ne sono sufficienti 2 per definire il sottospazio, che ha dimensione 3; e si ha $W = \langle v_1, v_2 - v_4, 2v_2 + 2v_3 - v_5 \rangle$. Il traslato di U tramite u_0 ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_5 = 2 \\ 3X_1 + 2X_2 - X_3 = 7 \\ 2X_1 + X_4 + X_5 = 2 \end{cases}$$

(*b*) La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -6 & 10 & -6 & 8 \\ 0 & 5 & -6 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

(*c*) $\ker\Phi = \left\{\, \phi \in \mathrm{Hom}_C(V,V) \,\middle|\, \phi_{|U} = 0 \,\right\} \cong \mathrm{Hom}_C(W,V)$ e quindi ha dimensione 15. Analogamente, $\mathrm{im}\,\Phi \cong \mathrm{Hom}_C(U,V)$ e quindi ha dimensione 10. Presa comunque, $\phi \in \mathrm{End}_C V$, si ha

$$\Phi^2(\phi) = \Phi(\Phi(\phi)) = (\phi\circ\pi)\circ\pi = \phi\circ\pi = \Phi(\phi)$$

e quindi Φ è la proiezione su $\mathrm{im}\,\Phi$ parallelamente a $\ker\Phi$. La simmetria richiesta è quindi $\mathrm{id} - 2\Phi$ e quindi l'endomorfismo richiesto è $3\mathrm{id}_V - 2\pi - 2\Phi(3\mathrm{id}_V - 2\pi) = 3\mathrm{id}_V - 2\pi - 2(3\mathrm{id}_V - 2\pi)\circ\pi = 3\mathrm{id}_V - 4\pi$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, \dots\}$ la sua base canonica.*

(a) *Si mostri che per ogni $n \geq 0$ la funzione $\partial_n : P(X) \mapsto \frac{1}{n!}P^{(n)}(0)$ appartiene a V^* ($P^{(n)}(0)$ indica la derivata n-esima di $P(X)$ calcolata nell'origine). Si verifichi che le funzioni nell'insieme $\mathcal{D} = \{\, \partial_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ sono linearmente indipendenti e che si ha $\partial_n X^m = \delta_{nm}$.*

(b) *Si indichi con $B(n) = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice in $M_n(\mathbb{R})$ definita dalle condizioni*

$$b_{ij} = \partial_{i-1}\circ(1+X)^{i+j-2} \qquad (\text{“}\circ\text{” indica la dualità canonica}).$$

Si scrivano le matrici $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ e se ne calcolino i rispettivi determinanti. Cosa si può dire di $\det B(n)$ al variare di n?

(c) *È vero che $\mathcal{D}$ è la base duale della base $\mathcal{B}$? In caso affermativo si dia una dimostrazione, in caso negativo si dia un controesempio.*

Svolgimento. (a) La derivazione è un'applicazione lineare, così come lo è la funzione che associa ad un polinomio il suo valore in un punto (ad es. nell'origine) e la composizione di applicazioni lineari è ancora tale.

Se il numero di derivazioni, m, è maggiore del grado del polinomio $P(X)$, allora $P^{(m)}(X) = 0$ (la costante 0) e quindi $\partial_m \circ X^n = 0$ se $m > n$. Se, invece, $m < n$, la derivata m-esima di X^n è divisibile per X e quindi si annulla nell'origine, per cui anche in questo caso $\partial_m \circ X^n = 0$. Infine, $\partial_m \circ X^m = \frac{1}{m!}m! = 1$ (perché la derivata m-esima di X^m è la costante $m!$). Abbiamo quindi dimostrato che $\partial_m \circ X^n = \delta_{mn}$.

Sia ora $a_0\partial_0 + \dots + a_m\partial_m = 0$ in V^*. In particolare ciò implica che

$$0 = 0\circ X^j = (a_0\partial_0 + \dots + a_m\partial_m)\circ X^j = a_j, \qquad \text{per } j = 0,\dots,m$$

e quindi gli elementi di $\mathcal{D}$ sono linearmente indipendenti.

(*b*) La derivata $(i-1)$-esima di $(1+X)^{i+j-2}$ è uguale a $\frac{(i+j-2)!}{(j-1)!}(1+X)^{j-1}$ che, calcolata in $X=0$ e divisa per $(i-1)!$ dà $b_{ij} = \binom{i+j-2}{i-1}$. Quindi le matrici in questione sono

$$B(4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad B(5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}, \quad B(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{pmatrix}.$$

Tramite operazioni elementari, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ II-I \\ III-II \\ IV-III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ III-II \\ IV-III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-III \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\det B(4) = 1$. Operando analogamente, si trova $\det B(5) = 1 = \det B(6)$. Infine, per il caso generale, possiamo supporre $\det B(n) = 1$ per $n = 4$; e, per $n > 4$, osservare che, dopo aver sottratto ad ogni riga di $B(n)$ la riga precedente e ad ogni colonna la colonna precedente, si ottiene una matrice che ha lo stesso determinante e la forma $\begin{pmatrix} 1 & {}^t0 \\ 0 & B(n-1) \end{pmatrix}$. Quindi $\det B(n) = 1$ per ogni valore di $n \geq 4$ (ma anche per $n = 1, 2, 3$, come si vede con un calcolo diretto)(†).

(c) $\mathcal{D}$ non è una base di V^* perché i suoi elementi non bastano per generare tutto lo spazio. Ad esempio, la forma lineare $\varepsilon_1 : P(X) \mapsto P(1)$, manda su 1 tutti gli elementi della base canonica, $\mathcal{B}$, mentre ogni combinazione lineare finita di elementi di $\mathcal{D}$, $a_0\partial_0 + \cdots + a_m\partial_m$, si annulla sugli X^n con $n > m$ e quindi non può essere uguale ad ε_1. □

(†) Invitiamo il lettore ad osservare il particolare aspetto che ha la decomposizione LU delle matrici $B(n)$. Ad esempio

$$B(5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il lettore più attento è invitato a discutere il caso generale.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 dicembre 2010 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + iX^2 - X - i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5$, $u_2 = 2v_1 + v_3 + 2v_4 - v_5$, $u_3 = 2v_2 - 3v_3 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ 4X_1 - X_2 + 3X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = 2v_1 - v_3$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \phi - \pi \circ \phi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? In caso affermativo si determini l'immagine dell'endomorfismo $3\mathrm{id}_V - 2\pi$ tramite la simmetria di asse $\ker\Phi$ e direzione $\mathrm{im}\,\Phi$.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali e sia $\mathcal{B} = \{1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \dots\}$ una sua base.

(a) Si mostri che per ogni $n \geq 0$ la funzione $\partial_n : P(X) \mapsto P^{(n)}(0)$ appartiene a V^* ($P^{(n)}(0)$ indica la derivata n-esima di $P(X)$ calcolata nell'origine). Si verifichi che le funzioni nell'insieme $\mathcal{D} = \{ \partial_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ sono linearmente indipendenti e che si ha $\partial_n \frac{X^m}{m!} = \delta_{nm}$.

(b) Si indichi con $B(n) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice in $M_n(\mathbb{R})$ definita dalle condizioni

$$b_{ij} = \frac{1}{i!} \partial_i \circ (1 + X)^{i+j-1} \qquad (\text{“}\circ\text{” indica la dualità canonica}).$$

Si scrivano le matrici $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ e se ne calcolino i rispettivi determinanti. Cosa si può dire di $\det B(n)$ al variare di n?

(c) È vero che $\mathcal{D}$ è la base duale della base $\mathcal{B}$? In caso affermativo si dia una dimostrazione, in caso negativo si dia un controesempio.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 15 dicembre 2010 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - v_3 - 3v_5$, $u_2 = v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - v_5$, $u_3 = 2v_2 - v_3 + 2v_4 + v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_4 - X_5 = 0 \\ X_1 - 4X_2 + X_4 - 3X_5 = 0 \\ 2X_2 + X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = 2v_1 - v_2$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori si U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? In caso affermativo si determini l'immagine dell'endomorfismo $2\mathrm{id}_V - 3\pi$ tramite la simmetria di asse $\ker\Phi$ e direzione $\mathrm{im}\,\Phi$.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, \dots\}$ la sua base canonica.

(a) Si mostri che per ogni $n \geq 0$ la funzione $\partial_n : P(X) \mapsto \frac{1}{n!}P^{(n)}(0)$ appartiene a V^* ($P^{(n)}(0)$ indica la derivata n-esima di $P(X)$ calcolata nell'origine). Si verifichi che le funzioni nell'insieme $\mathcal{D} = \{\, \partial_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ sono linearmente indipendenti e che si ha $\partial_n X^m = \delta_{nm}$.

(b) Si indichi con $B(n) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice in $M_n(\mathbb{R})$ definita dalle condizioni

$$b_{ij} = \partial_i \circ (1 + X)^{i+j-1} \qquad \text{(“}\circ\text{” indica la dualità canonica).}$$

Si scrivano le matrici $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ e se ne calcolino i rispettivi determinanti. Cosa si può dire di $\det B(n)$ al variare di n?

(c) È vero che $\mathcal{D}$ è la base duale della base $\mathcal{B}$? In caso affermativo si dia una dimostrazione, in caso negativo si dia un controesempio.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 dicembre 2010 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - iX^2 - X + i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = v_1 + 2v_3 - v_4 + 2v_5$, $u_2 = v_1 - v_2 - v_3 + v_4 - v_5$, $u_3 = 3v_1 - 2v_2 + v_4$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 - X_2 - X_5 = 0 \\ 3X_1 - X_2 + 4X_3 - X_5 = 0 \\ X_1 + 2X_3 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 - 2v_2$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori si U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? In caso affermativo si determini l'immagine dell'endomorfismo $2\mathrm{id}_V - 3\pi$ tramite la simmetria di asse $\ker\Phi$ e direzione $\mathrm{im}\,\Phi$.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio vettoriale $V = \mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali e sia $\mathcal{B} = \{1, X, \frac{X^2}{2!}, \frac{X^3}{3!}, \dots\}$ una sua base.

(a) Si mostri che per ogni $n \geq 0$ la funzione $\partial_n : P(X) \mapsto P^{(n)}(0)$ appartiene a V^* ($P^{(n)}(0)$ indica la derivata n-esima di $P(X)$ calcolata nell'origine). Si verifichi che le funzioni nell'insieme $\mathcal{D} = \{\, \partial_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ sono linearmente indipendenti e che si ha $\partial_n \frac{X^m}{m!} = \delta_{nm}$.

(b) Si indichi con $B(n) = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice in $M_n(\mathbb{R})$ definita dalle condizioni

$$b_{ij} = \frac{1}{(i-1)!}\partial_{i-1} \circ (1+X)^{i+j-2} \qquad (\text{“}\circ\text{” indica la dualità canonica}).$$

Si scrivano le matrici $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$ e se ne calcolino i rispettivi determinanti. Cosa si può dire di $\det B(n)$ al variare di n?

(c) È vero che $\mathcal{D}$ è la base duale della base $\mathcal{B}$? In caso affermativo si dia una dimostrazione, in caso negativo si dia un controesempio.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 gennaio 2011 – Compito **A**

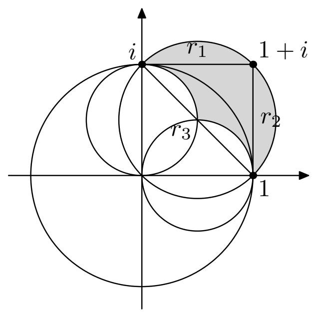
ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 - (2+2i)X^2 + 3iX + 1 - i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si verifichi che* $P(1) = 0$, *si determinino le radici in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo,* D, *avente come vertici le radici di* $P(X)$ *e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(c) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo* D *nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo* D.

Svolgimento. (a) $P(X) = X^3 - (2+2i)X^2 + 3iX + 1 - i = (X-1)(X-i)(X-1-i)$ e disegnamo qui sotto il triangolo formato dalle radici.



(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$r_1 : -iz + i\bar{z} - 2 = 0,$$
$$r_2 : z + \bar{z} - 2 = 0,$$
$$r_3 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0.$$

(c) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono:

$$\lambda^*(r_1) : \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_2) = \left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_3) : \left|z + \frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La parte ombreggiata rappresenta l'immagine dei punti interni al triangolo tramite la riflessione nel cerchio unitario. □

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *due spazi vettoriali reali e siano* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ *e* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, *rispettivamente, basi dei due spazi.*

(a) *Si determinino le applicazioni lineari* $\phi : V \to W$ *soddisfacenti alle seguenti condizioni*

$$\phi(2v_1 - 2v_3) = 4w_1 - 2w_2 + 6w_4; \qquad \phi(v_2 - v_1) = 2w_2 - w_3 - 3w_4; \qquad \phi(3v_2 - 3v_3) = 6w_1 + 3w_2 - 3w_3.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ *per ciascuna di esse.*

(b) *Si determini una base dei sottospazi* kerϕ *ed* imϕ *per ciascuna di tali* ϕ *e si determinino delle equazioni cartesiane per* imϕ *nel caso in cui* ϕ *non sia iniettiva.*

(c) *Detta* $\phi^* : W^* \to V^*$ *l'applicazione trasposta di* ϕ, *si determinino i sottospazi* ker(ϕ^*) *ed* im(ϕ^*) *esibendo delle loro basi, al variare di* ϕ.

Svolgimento. (a) I tre vettori $u_1 = 2v_1 - 2v_3$, $u_2 = v_2 - v_1$, $u_3 = 3v_2 - 3v_3$ sono linearmente dipendenti essendo $3u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 0$ quindi ϕ può esistere se, e solo se, le loro immagini soddisfano la stessa relazione lineare. Ciò accade, e quindi esistono infinite applicazioni lineari soddisfacenti alle condizioni richieste, perché queste determinano solo la restrizione di ϕ al sottospazio $U = \langle u_1, u_2 \rangle$. Si ha $V = \langle v_1 \rangle \oplus U$ e quindi ϕ è completamente determinata dalle condizioni date e dalla conoscenza del vettore $\phi(v_1)$, che può essere scelto ad arbitrio in W. Quindi, la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & a & a-2 \\ b & b+2 & b+1 \\ c & c-1 & c \\ d & d-3 & d-3 \end{pmatrix}.$$

(b) Si osservi che $\operatorname{im}\phi \supseteq \langle 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle$ che è l'immagine di ϕ ristretta ad U. Quindi $\operatorname{im}\phi = \langle 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle$ se, e solo se, $\phi(v_1) \in \langle 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle$. In tal caso $\dim\ker\phi = 1$ (per la formula delle dimensioni) e quindi ϕ non è iniettiva. Se $\phi(v_1) = a(4w_1 - 2w_2 + 6w_4) + b(2w_2 - w_3 - 3w_4)$ allora $v_1 - a(2v_1 - 2v_3) - b(v_2 - v_1)$ è una base di $\ker\phi$. Le equazioni cartesiane di $\operatorname{im}\phi$ sono quindi $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 6x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Se invece $\phi(v_1) \notin \langle 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle$, $\ker\phi = \langle 0\rangle$ e una base di $\operatorname{im}\phi$ è data da $\phi(v_1), 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4$.

(c) Poniamo le basi duali di $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ su V^* e W^* e scriviamo in riga le coordinate corrispondenti. Se, $\phi(v_1) = a(4w_1 - 2w_2 + 6w_4) + b(2w_2 - w_3 - 3w_4)$, allora

$$\begin{aligned} \ker(\phi^*) &= \langle 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle^\perp = \langle (1,2,4,0), (3,0,6,-2)\rangle, \\ \operatorname{im}(\phi^*) &= \langle v_1 - a(2v_1 - 2v_3) - b(v_2 - v_1)\rangle^\perp = \langle (b, 1-2a+b, 0), (-2a, 0, 1-2a+b)\rangle. \end{aligned}$$

Se $\phi(v_1) = aw_1 + bw_2 \neq 0$ (perché sono sufficienti solo questi vettori per determinare tutti i nuclei e tutte le immagini?), allora

$$\begin{aligned} \ker(\phi^*) &= \langle aw_1 + bw_2, 4w_1 - 2w_2 + 6w_4, 2w_2 - w_3 - 3w_4\rangle^\perp = \langle 3a(1,2,4,0) - (a+2b)(3,0,6,-2)\rangle, \\ \operatorname{im}(\phi^*) &= \langle 0\rangle^\perp = \langle v_1^*, v_2^*, v_3^*\rangle. \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 3. *Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 + v_2 + 3v_4$, $u_2 = 3v_1 + v_3 + 3v_4 - v_5$, $u_3 = v_1 - v_2 + v_3 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee* $\begin{cases} 2X_1 - X_3 - X_4 + X_5 = 0 \\ 4X_1 + 2X_2 - X_3 - 3X_4 - X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) *Si determini una base per ciascuno dei sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.*

(b) *Sia $c \in \mathbb{Q}$ e si indichi con μ_c l'endomorfismo definito da $v \mapsto cv$, al variare di $v \in V$. Si calcoli il $\det(\pi - \mu_c)$ al variare di c. Si calcoli $\det(\pi - \mu_c)^n$ al variare di n e si dica se esistono valori di c per cui tale determinante si annulla.*

(c) *Dopo aver dimostrato che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si scriva $v^* = 2v_1^* - 3v_3^* + 4v_5^*$ come somma di un vettore di $U^\perp$ e di uno di $W^\perp$.*

Svolgimento. (a) I tre vettori sono linearmente dipendenti $u_1 - u_2 + u_3 = 0$ e quindi ne bastano due per generare $U = \langle u_1, u_3\rangle$, che ha dimensione 2, essendo i due generatori indipendenti. Anche le tre equazioni lineari omogenee che definiscono W sono dipendenti ($II - I - 2III = 0$) e quindi ne sono sufficienti 2 per definire il sottospazio, che ha dimensione 3 (cf. Teorema di Rouché-Capelli); e si ha $W = \langle v_1 - v_2 + 2v_3, v_2 - v_3 + v_4, v_2 + v_3 + v_5\rangle$. Unendo le due basi di U e W si ottiene una base di V e quindi $V = U \oplus W$. Infatti, con operazioni elementari sulle colonne si ha

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel primo caso le relazioni con le colonne della matrice precedente sono (2), (5), (3) − (2), (4) − (5) − (3) + (2), (1) − 2(2) − 3(5); nel secondo caso sono (1), (2), (3), (4), (5) + 5(3) − 3(4).

La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & -3 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sia $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_5\}$ una base di V tale che $U = \langle v'_1, v'_2 \rangle$ e $W = \langle v'_3, v'_4, v'_5 \rangle$ e fissiamo una forma multilineare alternante $0 \neq D \in A^5(V)$. Allora, si ha

$$\det(\pi - \mu_c) = \frac{D(v'_1 - cv'_1, v'_2 - cv'_2, -cv'_3, -cv'_4, -cv'_5,)}{D(v'_1, \dots, v'_5)} = (1-c)^2(-c)^3.$$

Per il Teorema di Binet, $\det(\pi - \mu_c)^n = (1-c)^{2n}(-c)^{3n}$ che si annulla se, e solo se, $c \in \{0, 1\}$.

(c) Dalle relazioni $U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp$ e $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$ discende il fatto che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$ e la decomposizione di $v^* = 2v_1^* - 3v_3^* + 4v_5^* = w^* + (v^* - w^*)$, con $w^* = 3v_1^* - 5v_2^* - 4v_3^* + v_4^* + 9v_5^* \in W^\perp$ si ottiene facilmente ricordando che ${}^tA$ è la matrice di una proiezione associata a questa decomposizione (...quale proiezione? in quali basi è scritta la matrice?). $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 gennaio 2011 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + (2 - 2i)X^2 - 3iX - 1 - i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si verifichi che $P(-1) = 0$, si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, basi dei due spazi.

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_2 - 2v_1) = 6w_2 + 4w_3 - 2w_4; \qquad \phi(v_2 - v_3) = w_1 + 3w_2 - 2w_4; \qquad \phi(3v_1 - 3v_3) = 3w_1 - 6w_3 - 3w_4.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di esse.

(b) Si determini una base dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\operatorname{im}\phi$ per ciascuna di tali ϕ e si determinino delle equazioni cartesiane per $\operatorname{im}\phi$ nel caso in cui ϕ non sia iniettiva.

(c) Detta $\phi^* : W^* \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ, si determinino i sottospazi $\ker(\phi^*)$ ed $\operatorname{im}(\phi^*)$ esibendo delle loro basi, al variare di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = v_1 + 3v_2 + 2v_5$, $u_2 = 3v_2 - v_3 + v_4 + 3v_5$, $u_3 = -v_1 - v_3 + v_4 + v_5$ e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} -X_2 + X_3 - X_4 + 2X_5 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 - X_3 - X_4 + 4X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_3 + X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determini una base per ciascuno dei sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(b) Sia $c \in \mathbb{Q}$ e si indichi con μ_c l'endomorfismo definito da $v \mapsto cv$, al variare di $v \in V$. Si calcoli il $\det(\pi - \mu_c)$ al variare di c. Si calcoli $\det(\pi - \mu_c)^n$ al variare di n e si dica se esistono valori di c per cui tale determinante si annulla.

(c) Dopo aver dimostrato che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si scriva $v^* = 4v_3^* - 3v_4^* + 2v_5^*$ come somma di un vettore di $U^\perp$ e di uno di $W^\perp$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 11 gennaio 2011 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - (2-2i)X^2 - 3iX + 1 + i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si verifichi che $P(1) = 0$, si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, basi dei due spazi.

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_3 - 2v_2) = 6w_1 - 2w_3 + 4w_4; \qquad \phi(v_3 - v_1) = 3w_1 + w_2 - 2w_3; \qquad \phi(3v_1 - 3v_2) = -3w_2 + 3w_3 + 6w_4.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di esse.

(b) Si determini una base dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\,\phi$ per ciascuna di tali ϕ e si determinino delle equazioni cartesiane per $\mathrm{im}\,\phi$ nel caso in cui ϕ non sia iniettiva.

(c) Detta $\phi^* : W^* \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ, si determinino i sottospazi $\ker(\phi^*)$ ed $\mathrm{im}(\phi^*)$ esibendo delle loro basi, al variare di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 3v_1 + 2v_3 + v_5$, $u_2 = 3v_1 + v_2 + 3v_3 - v_4$, $u_3 = v_2 + v_3 - v_4 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_2 - 4X_3 + X_4 - 2X_5 = 0 \\ X_1 - X_3 + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determini una base per ciascuno dei sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(b) Sia $c \in \mathbb{Q}$ e si indichi con μ_c l'endomorfismo definito da $v \mapsto cv$, al variare di $v \in V$. Si calcoli il $\det(\pi - \mu_c)$ al variare di c. Si calcoli $\det(\pi - \mu_c)^n$ al variare di n e si dica se esistono valori di c per cui tale determinante si annulla.

(c) Dopo aver dimostrato che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si scriva $v^* = 3v_2^* - 2v_3^* - 4v_4^*$ come somma di un vettore di $U^\perp$ e di uno di $W^\perp$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 11 gennaio 2011 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + (2 + 2i)X^2 + 3iX - 1 + i \in \mathbb{C}[X]$.
(a) Si verifichi che $P(-1) = 0$, si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.
(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.
(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, basi dei due spazi.
(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_1 - 2v_3) = 2w_1 - 6w_2 - 4w_3; \qquad \phi(v_2 - v_3) = 2w_1 - 3w_2 - w_4; \qquad \phi(3v_2 - 3v_1) = 3w_1 + 6w_3 - 3w_4.$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di esse.
(b) Si determini una base dei sottospazi $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\,\phi$ per ciascuna di tali ϕ e si determinino delle equazioni cartesiane per $\mathrm{im}\,\phi$ nel caso in cui ϕ non sia iniettiva.
(c) Detta $\phi^* : W^* \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ, si determinino i sottospazi $\ker(\phi^*)$ ed $\mathrm{im}(\phi^*)$ esibendo delle loro basi, al variare di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 3v_2 + 2v_4 + v_5$, $u_2 = v_1 + 3v_2 - v_3 + 3v_4$, $u_3 = v_1 - v_3 + v_4 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_2 + X_3 - 4X_4 - 2X_5 = 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.
(a) Si determini una base per ciascuno dei sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.
(b) Sia $c \in \mathbb{Q}$ e si indichi con μ_c l'endomorfismo definito da $v \mapsto cv$, al variare di $v \in V$. Si calcoli il $\det(\pi - \mu_c)$ al variare di c. Si calcoli $\det(\pi - \mu_c)^n$ al variare di n e si dica se esistono valori di c per cui tale determinante si annulla.
(c) Dopo aver dimostrato che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si scriva $v^* = -3v_1^* + 4v_3^* + 2v_4^*$ come somma di un vettore di $U^\perp$ e di uno di $W^\perp$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **A**

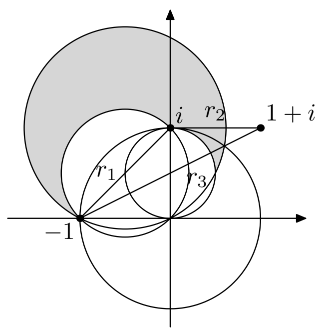
ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 2iX^2 - (2+i)X - (1-i) \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

Svolgimento. (a) $P(X) = X^3 - 2iX^2 - (2+i)X - (1-i) = (X+1)(X-i)(X-1-i)$ e disegnamo qui sotto il triangolo formato dalle radici.



(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$\begin{aligned} r_1 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 = 0, \\ r_2 &: iz - i\bar{z} + 2 = 0, \\ r_3 &: (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 2 = 0. \end{aligned}$$

(c) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono:

$$\lambda^*(r_1) : \left| z - \frac{-1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \lambda^*(r_2) = \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_3) : \left| z - \frac{-1+2i}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

La parte ombreggiata del semipiano rappresenta l'immagine dei punti interni al triangolo tramite la riflessione nel cerchio unitario. □

ESERCIZIO 2. *Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_1 + u_4 - w_3, u_2 - u_3 + w_1 - w_2, u_2 + u_3 + w_3, u_1 - u_4 - w_1 + w_2 \rangle$.*

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.

Svolgimento. (a) Siano $x_1, \dots, x_4, y_1, \dots, y_3$ le coordinate associate alla bese $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Tramite i generatori (indipendenti) del sottospazio T, possiamo scrivere le equazioni parametriche di T e ricavare per eliminazione le equazioni cartesiane; ovvero:

$$\begin{cases} x_1 = a + d \\ x_2 = b + c \\ x_3 = -b + c \\ x_4 = a - d \\ y_1 = b - d \\ y_2 = -b + d \\ y_3 = -a + c \end{cases}, \quad \text{con} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4; \qquad \text{e} \qquad T : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2y_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 2y_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2y_3 = 0 \end{cases}.$$

In particolare, i coefficienti a, b, c, d della base di T sono in corrispondenza biunivoca con i valori delle coordinate $x_1, \dots, x_4$, essendo $a = \frac{x_1+x_4}{2}$, $b = \frac{x_2-x_3}{2}$, $c = \frac{x_2+x_3}{2}$, $d = \frac{x_1-x_4}{2}$. Da ciò si conclude che, per ogni vettore $u = x_1u_1 + \cdots + x_4u_4 \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u \in W$ ed è quello le cui coordinate si ottengono dai valori dei parametri dedotti nel modo scritto sopra da $x_1, \dots, x_4$.

(b) Per quanto detto nel punto precedente, dato un vettore $u = x_1u_1 + \cdots + x_4u_4 \in U$, si ha $\phi(u) = y_1w_1 + y_2w_2 + y_3w_3$, ove
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$
Le coordinate di $\phi(u)$ sono polinomi lineari omogenei nelle coordinate di u. Si tratta quindi di un'applicazione lineare e la matrice cercata è
$$A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
La matrice ha rango 2 e $\ker\phi = \langle u_1 + u_2, u_3 + u_4\rangle$, $\mathrm{im}\,\phi = \langle w_1 - w_2, w_3\rangle$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - 4v_3 - 2v_4$, $u_2 = v_2 - 2v_3 + 2v_5$, $u_3 = v_1 + 3v_2 - 8v_3 - v_4 + 6v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee* $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_5 = 0 \\ X_2 + X_3 - 2X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_3 + 4X_4 + X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determinino delle basi per i sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ di V^*.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W. Calcolare il determinante di $3\pi - 2\mathrm{id}$?

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

Svolgimento. (a) Si ha $u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 0$. Dunque il sottospazio U ha dimensione 2 ed i vettori u_1, u_2 ne sono una base. Il sistema che definisce W ha rango 2 (essendo $I - 2II = III$); le soluzioni formano un sottospazio di dimensione 3 ed una sua base è data dai vettori $w_1 = 2v_3 + v_4$, $w_2 = v_1 - v_5$, $w_3 = 2v_1 - v_2 + v_3$.

Per le relazioni di Grassmann, $V = U \oplus W$ se, e solo se, $U \cap W = \langle 0\rangle$. Un generico vettore $au_1 + bu_2$ di U soddisfa alle equazioni cartesiane di W se, e solo se, $a = b = 0$ e ciò è sufficiente per concludere.

Infine, si ha $W^\perp = \langle v_1^* + 2v_2^* + v_5^*, v_2^* + v_3^* - 2v_4^*\rangle$ e $U^\perp = \langle v_1^* + v_4^*, 2v_2^* - v_5^*, v_3^* - 2v_4^* + v_5^*\rangle$, ove $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ è la base duale di V^*.

(b) La matrice cercata è
$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 & -8 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -10 & -6 & 12 & -2 \\ -1 & -6 & -4 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$
Lo spazio vettoriale V ha la base $\mathcal{V}' = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ e, presa una applicazione 5-lineare, alternante e non nulla, D, si ha
$$\det(3\pi - 2\mathrm{id}) = \frac{D(u_1, u_2, -2w_1, -2w_2, -2w_3)}{D(u_1, u_2, w_1, w_2, w_3)} = -8.$$
(c) Si ha
$$\Phi(\Phi(\phi)) = \pi \circ (\pi \circ \phi \circ \pi) \circ \pi = \pi \circ \phi \circ \pi = \Phi(\phi),$$
qualunque sia l'endomorfismo ϕ. Dunque $\Phi^2 = \Phi$ e Φ è una proiezione. $\ker\Phi$ è formato dagli endomorfismi $\phi : V \to V$ tali che $\phi(U) \subseteq W$ e quindi è un sottospazio di dimensione 21 di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$. Per la formula delle dimensioni $\dim \mathrm{im}\,\Phi = 4$ (e $\mathrm{im}\,\Phi$ può essere identificato con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, U)$). Infine, osserviamo che $\mathrm{id} - 2\Phi$ è la simmetria di asse $\ker\Phi$ e direzione $\mathrm{im}\,\Phi$ e come ogni simmetria ha determinante $-1^{\dim \mathrm{im}\,\Phi} = 1$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 2iX^2 - (2-i)X + 1 + i \in \mathbb{C}[X]$.
(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.
(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.
(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_1 + u_2 - w_1, u_3 - u_4 + w_2 - w_3, u_3 + u_4 + w_1, u_1 - u_2 + w_2 - w_3 \rangle$.
(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.
(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - 2v_3 + 4v_5$, $u_2 = 2v_2 + v_4 - 2v_5$, $u_3 = v_1 - 6v_2 - v_3 - 3v_4 + 8v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_2 + X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_4 - X_5 = 0 \\ 4X_1 + X_2 + X_3 - 2X_5 = 0 \end{cases}$.
(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determinino delle basi per i sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ di V^*.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W. Calcolare il determinante di $2\pi - 3\mathrm{id}$?
(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + 2iX^2 - (2-i)X - (1+i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_2 + u_3 - w_2, u_1 - u_4 - w_1 + w_3, u_1 + u_4 + w_2, u_2 - u_3 - w_1 + w_3 \rangle$.

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_3 - 4v_4 - 2v_5$, $u_2 = v_1 + 2v_2 - 2v_4$, $u_3 = 3v_1 + 6v_2 + v_3 - 8v_4 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_4 - 2X_5 = 0 \\ X_2 + X_3 - 2X_4 + 4X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determinino delle basi per i sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ di V^*.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W. Calcolare il determinante di $4\pi - 3\mathrm{id}$?

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + 2iX^2 - (2+i)X + 1 - i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione del piano formata dall'immagine riflessa dei punti interni al triangolo D.

ESERCIZIO 2. Sia $V = U \oplus W$ e siano date le basi $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ di U e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ di W su $\mathbb{R}$. Sia inoltre T il sottospazio di V, $T = \langle u_3 + u_4 - w_1, u_1 - u_2 - w_2 + w_3, u_1 + u_2 + w_1, u_3 - u_4 - w_2 + w_3 \rangle$.

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio T nel sistema di coordinate associato alla base $\mathcal{U} \cup \mathcal{W}$ di V. Si mostri che, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $u' \in T$ tale che $u' - u$ appartenga a W.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione che manda il vettore u di U in $u' - u$, ove $u' \in T$ è il vettore descritto nel punto precedente. Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino infine nucleo ed immagine di ϕ.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 4v_1 + 2v_2 - 2v_4$, $u_2 = 2v_1 - 2v_3 - v_5$, $u_3 = 8v_1 + v_2 - 6v_3 - v_4 - 3v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_3 + X_4 + 2X_5 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + X_5 = 0 \\ 2X_1 - 4X_2 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$. Si determinino delle basi per i sottospazi $U^\perp$ e $W^\perp$ di V^*.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W. Calcolare il determinante di $3\pi - 4\mathrm{id}$?

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 04 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		A

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - X^2 + 3X + 5 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si verifichi che $P(-1) = 0$; si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, si consideri l'omomorfismo $\phi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & t+2 & 0 & 2 \\ 0 & t & 0 & -1 & 2t-1 \\ 1-t & -t & 3t+6 & 1 & -1 \\ 1-t & 0 & -t-2 & 0 & 2t-1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) Si determini il rango di ϕ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Indicato con w_t il vettore $2e_1 + (4t-2)e_2 - (4t+8)e_3 + 4te_4 \in \mathbb{R}^4$, si determini la controimmagine $\phi_t^{-1}(w_t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - 4v_3 + 2v_4$, $u_2 = v_2 - 2v_3 + 2v_5$, $u_3 = v_1 + 3v_2 - 8v_3 - v_4 + 6v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + 2X_2 + X_5 = 0 \\ 2X_2 + 2X_3 - 4X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 + 4X_4 + X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed equazioni cartesiane per i sottospazi U e W. Si determinino $U + W$ ed $U \cap W$. Si risponda alle stesse domande supponendo però che lo spazio V sia definito sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) \in M_5(\mathbb{Q})$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su W parallelamente ad U. Sia n il minimo intero positivo tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(n\pi) \in M_5(\mathbb{Z})$; si calcoli il determinante di $\phi_0 = n\pi - 2\mathrm{id}$. Che dire del determinante di ϕ_0 pensato come endomorfismo di V sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(c) Sia n l'intero definito sopra e $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = n\pi \circ \phi \circ n\pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 04 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		B

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + X^2 + 3X - 5 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si verifichi che $P(1) = 0$; si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, si consideri l'omomorfismo $\phi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & t+2 & t-1 & 0 \\ -1 & -t & 3t+6 & 1-t & 1 \\ 2t-1 & t & 0 & 0 & -1 \\ 2t-1 & 0 & -t-2 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) Si determini il rango di ϕ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Indicato con w_t il vettore $2e_1 - (4t+8)e_2 + (4t-2)e_3 + 4te_4 \in \mathbb{R}^4$, si determini la controimmagine $\phi_t^{-1}(w_t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_1 - 4v_4 + 2v_5$, $u_2 = v_2 + 2v_3 - 2v_4$, $u_3 = v_1 - 3v_2 - 6v_3 + 8v_4 - v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_2 + X_3 + X_5 = 0 \\ 4X_1 - 2X_2 - 2X_4 = 0 \\ 4X_1 + X_3 - X_4 + X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed equazioni cartesiane per i sottospazi U e W. Si determinino $U + W$ ed $U \cap W$. Si risponda alle stesse domande supponendo però che lo spazio V sia definito sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) \in M_5(\mathbb{Q})$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su W parallelamente ad U. Sia n il minimo intero positivo tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(n\pi) \in M_5(\mathbb{Z})$; si calcoli il determinante di $\phi_0 = n\pi - 2\mathrm{id}$. Che dire del determinante di ϕ_0 pensato come endomorfismo di V sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(c) Sia n l'intero definito sopra e $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = n\pi \circ \phi \circ n\pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 04 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		C

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + iX^2 - 3X + 5i \in \mathbb{C}[X]$.
(a) Si verifichi che $P(i) = 0$; si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.
(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.
(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, si consideri l'omomorfismo $\phi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 & 0 & 2t-1 \\ 0 & 0 & t-1 & t+2 & 2 \\ 1 & -t & 1-t & 3t+6 & -1 \\ 0 & 0 & 1-t & -t-2 & 2t-1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.
(a) Si determini il rango di ϕ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(b) Indicato con w_t il vettore $(4t-2)e_1 + 2e_2 - (4t+8)e_3 + 4te_4 \in \mathbb{R}^4$, si determini la controimmagine $\phi_t^{-1}(w_t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_2 - 4v_3 + 2v_4$, $u_2 = 2v_1 - 2v_3 + v_5$, $u_3 = 6v_1 - v_2 - 8v_3 + v_4 + 3v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_4 + 2X_5 = 0 \\ 4X_2 - 2X_3 - 2X_5 = 0 \\ X_1 + 4X_2 - X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$.
(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed equazioni cartesiane per i sottospazi U e W. Si determinino $U + W$ ed $U \cap W$. Si risponda alle stesse domande supponendo però che lo spazio V sia definito sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) \in M_5(\mathbb{Q})$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su W parallelamente ad U. Sia n il minimo intero positivo tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(n\pi) \in M_5(\mathbb{Z})$; si calcoli il determinante di $\phi_0 = n\pi - 2\mathrm{id}$. Che dire del determinante di ϕ_0 pensato come endomorfismo di V sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?
(c) Sia n l'intero definito sopra e $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = n\pi \circ \phi \circ n\pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 04 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

D

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - iX^2 - 3X - 5i \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si verifichi che $P(-i) = 0$; si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Al variare del parametro t in $\mathbb{R}$, si consideri l'omomorfismo $\phi_t : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, di matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & t+2 & 2 \\ 1-t & 0 & 0 & -t-2 & 2t-1 \\ 1-t & 1 & -t & 3t+6 & -1 \\ 0 & -1 & t & 0 & 2t-1 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche.

(a) Si determini il rango di ϕ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Indicato con w_t il vettore $2e_1 + 4te_2 - (4t+8)e_3 + (4t-2)e_4 \in \mathbb{R}^4$, si determini la controimmagine $\phi_t^{-1}(w_t)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 3. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia U il sottospazio vettoriale generato dai vettori $u_1 = 2v_3 + 2v_4 - 4v_5$, $u_2 = v_1 + 2v_2 - 2v_5$, $u_3 = 3v_1 + 6v_2 + v_3 - v_4 - 8v_5$, e sia W il sottospazio vettoriale definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 - 4X_4 + 2X_5 = 0 \\ X_2 + X_3 + 4X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed equazioni cartesiane per i sottospazi U e W. Si determinino $U + W$ ed $U \cap W$. Si risponda alle stesse domande supponendo però che lo spazio V sia definito sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) \in M_5(\mathbb{Q})$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su W parallelamente ad U. Sia n il minimo intero positivo tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(n\pi) \in M_5(\mathbb{Z})$; si calcoli il determinante di $\phi_0 = n\pi - 2\mathrm{id}$. Che dire del determinante di ϕ_0 pensato come endomorfismo di V sul campo $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

(c) Sia n l'intero definito sopra e $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = n\pi \circ \phi \circ n\pi$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Che dire del determinante di $\mathrm{id} - 2\Phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 2iX^2 - 2X \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) [4 punti] Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

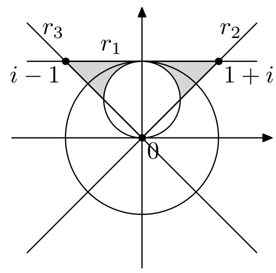
(b) [4 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) [2 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

Svolgimento. (a) $P(X) = X(X - 1 - i)(X + 1 - i)$ e disegnamo qui sotto il triangolo formato dalle radici.

(*b*) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$r_1 : iz - i\bar{z} + 2 = 0,$$
$$r_2 : (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 0,$$
$$r_3 : (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0.$$



(*c*) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono:

$$\lambda^*(r_1) : \left|z - \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_2) = r_2, \qquad \lambda^*(r_3) = r_3.$$

La parte ombreggiata del semipiano rappresenta l'insieme $D \cap \lambda^*(D)$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.*

(a) [4 punti] Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_1 + v_3) = 2w_1 - w_3, \quad \phi(v_1 - v_2) = w_2 + w_3, \quad \phi(v_2 - v_3) = 2w_1 + w_2, \quad \phi(v_1 - v_4) = 4w_1 + 2w_2,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) [4 punti] Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : Hom_{\mathbb{R}}(U, V) \to Hom_{\mathbb{R}}(U, W)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente (se esiste). È vero che $\ker\Phi \cong Hom_{\mathbb{R}}(U, \ker\phi)$ e che $\mathrm{im}\Phi \cong Hom_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\phi)$? (giustificare le risposte). Si calcoli, in ogni caso, la dimensione dei sottospazi indicati sopra.

Svolgimento. (a) Osserviamo che i quattro vettori, $v_1 + v_3, v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_1 - v_4$, sono una base di V e quindi esiste un'unica applicazione lineare ϕ soddisfacente alle condizioni date. Inoltre

$$\phi(2v_1) = \phi(v_1 + v_3) + \phi(v_1 - v_2) + \phi(v_2 - v_3) = 4w_1 + 2w_2;$$

da cui si deduce:

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= 2w_1 + w_2, \\ \phi(v_2) &= \phi(v_1) - \phi(v_1 - v_2) = 2w_1 - w_3, \\ \phi(v_3) &= \phi(v_1 + v_3) - \phi(v_1) = -w_2 - w_3, \\ \phi(v_4) &= \phi(v_1) - \phi(v_1 - v_4) = -2w_1 - w_2. \end{aligned} \qquad \text{e quindi} \quad A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

che è una matrice di rango 2 e si ha $\ker\phi = \langle v_1 - v_2 + v_3, v_1 + v_4 \rangle$, $\mathrm{im}\,\phi = \langle 2w_1 + w_2, 2w_1 - w_3 \rangle$.

(b) Si ha $\phi\circ\alpha = 0$ se, e solo se, $\mathrm{im}\,\alpha \subseteq \ker\phi$; quindi $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker\phi)$, di dimensione $2k$. D'altro canto, se $\psi = \phi\circ\alpha \in \mathrm{im}\,\Phi$, allora necessariamente $\mathrm{im}\,\psi \subseteq \mathrm{im}\,\phi$ e quindi $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\,\phi)$. Se poi $\psi : U \to W$ soddisfa alla condizione $\mathrm{im}\,\psi \subseteq \mathrm{im}\,\phi$ (e quindi si identifica con un elemento di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\,\phi)$), si consideri una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ di U. Allora si scelgano dei vettori $v_1, \dots, v_k$ in V tali che $\phi(v_i) = \psi(u_i)$ per $i = 1, \dots, k$ e così è ben definita un'applicazione lineare, $\alpha : U \to V$, tale che $\alpha(u_i) = v_i$ per $i = 1, \dots, k$. Si ha perciò $\psi = \phi\circ\alpha$ e quindi $\psi \in \mathrm{im}\,\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\,\phi)$, di dimensione $2k$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo*

$$\varphi_P(Q(X)) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) [4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.
(b) [4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e si dica se φ è invertibile.
(c) [4 punti] Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che

$$Q(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V.$$

In caso affermativo si determini $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

Svolgimento. (a) Dalle proprietà dell'integrale definito si ricava che $\varphi_P \in V^*$ e che l'applicazione φ è lineare. Ad esempio, l'identità

$$\begin{aligned}\varphi_P(a_1Q_1(X) + a_2Q_2(X)) &= \int_0^1 P(x)\left[a_1Q_1(x) + a_2Q_2(x)\right]dx = \\ &= a_1\int_0^1 P(x)Q_1(x)dx + a_2\int_0^1 P(x)Q_2(x)dx = a_1\varphi_P(Q_1(X)) + a_2\varphi_P(Q_2(X)),\end{aligned}$$

valida qualunque siano $Q_1(X), Q_2(X) \in V$ ed $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, permette di concludere che φ_P appartiene a V^*. La verifica del fatto che φ è lineare usa un'analoga identità.
(b) In base alle proprietà delle basi duali, per ogni vettore $v^* \in V^*$, si ha $v^* = (v^*\circ 1)\delta_0 + (v^*\circ X)\delta_1 + (v^*\circ X^2)\delta_2$. Quindi dalle relazioni

$$\varphi_1(1) = \int_0^1 dx = 1, \qquad \varphi_1(X) = \varphi_X(1) = \int_0^1 xdx = \tfrac{1}{2}, \qquad \varphi_1(X^2) = \varphi_X(X) = \varphi_{X^2}(1) = \int_0^1 x^2dx = \tfrac{1}{3},$$
$$\varphi_X(X^2) = \varphi_{X^2}(X) = \int_0^1 x^3dx = \tfrac{1}{4}, \qquad \varphi_{X^2}(X^2) = \int_0^1 x^4dx = \tfrac{1}{5},$$

si ricava che

$$\varphi_1 = \delta_0 + \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{3}\delta_2, \quad \varphi_X = \tfrac{1}{2}\delta_0 + \tfrac{1}{3}\delta_1 + \tfrac{1}{4}\delta_2, \quad \varphi_{X^2} = \tfrac{1}{3}\delta_0 + \tfrac{1}{4}\delta_1 + \tfrac{1}{5}\delta_2.$$

Dunque $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$. Con un calcolo diretto si ottiene $\det\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi) = \frac{1}{2^4 3^3 5}$ e quindi φ è invertibile.
(c) L'applicazione $\varepsilon_{1/2} : Q(X) \mapsto Q(\frac{1}{2})$ è un elemento di V^* e si ha $\varepsilon_{1/2} = \delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_2$. Poiché φ è invertibile, esiste (un unico) polinomio $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ in V tale che $\varphi_P = \varepsilon_{1/2}$. Per trovarne i coefficienti, basta quindi risolvere il sistema lineare $A\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$, da cui si ricava $Q(X) = -\frac{3}{2} + 15X - 15X^2$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		B

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + 2iX^2 - 2X \in \mathbb{C}[X]$.

(a) [4 punti] Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) [4 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) [2 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.

(a) [4 punti] Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_2 + v_4) = 2w_2 - w_3, \quad \phi(v_1 - v_4) = -w_1 - w_3, \quad \phi(v_1 - v_2) = w_1 + 2w_2, \quad \phi(v_3 - v_4) = -2w_1 - 4w_2,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) [4 punti] Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, W)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente (se esiste). È vero che $\ker \Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker \phi)$ e che $\mathrm{im}\, \Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\, \phi)$? (giustificare le risposte). Si calcoli, in ogni caso, la dimensione dei sottospazi indicati sopra.

ESERCIZIO 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\varphi_P(Q(X)) = \int_{-1}^{0} P(x)Q(x)dx \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) [4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.

(b) [4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e si dica se φ è invertibile.

(c) [4 punti] Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che

$$Q(-\tfrac{1}{2}) = \int_{-1}^{0} P(x)Q(x)dx \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V.$$

In caso affermativo si determini $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 2X^2 + 2X \in \mathbb{C}[X]$.

(a) [4 punti] Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) [4 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) [2 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.

(a) [4 punti] Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_3+v_4) = -w_1+2w_3, \quad \phi(v_1-v_3) = -w_1-w_2, \quad \phi(v_1-v_4) = w_2+2w_3, \quad \phi(v_2-v_3) = -2w_2-4w_3,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) [4 punti] Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U,W)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente (se esiste). È vero che $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker\phi)$ e che $\mathrm{im}\,\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\,\phi)$? (giustificare le risposte). Si calcoli, in ogni caso, la dimensione dei sottospazi indicati sopra.

ESERCIZIO 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\varphi_P(Q(X)) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) [4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.

(b) [4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e si dica se φ è invertibile.

(c) [4 punti] Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che

$$Q(\tfrac{1}{2}) = \int_0^1 P(x)Q(x)dx \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V.$$

In caso affermativo si determini $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

D

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X \in \mathbb{C}[X]$.

(a) [4 punti] Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) [4 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) [2 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $D \cap \lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.

(a) [4 punti] Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_1 - w_2, \quad \phi(v_2 - v_4) = w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 - v_4) = -2w_1 - w_3, \quad \phi(v_2 - v_3) = 4w_1 + 2w_3,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) [4 punti] Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, W)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \phi \circ \alpha$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente (se esiste). È vero che $\ker \Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \ker \phi)$ e che $\mathrm{im}\, \Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U, \mathrm{im}\, \phi)$? (giustificare le risposte). Si calcoli, in ogni caso, la dimensione dei sottospazi indicati sopra.

ESERCIZIO 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\varphi_P(Q(X)) = \int_{-1}^{0} P(x)Q(x)dx \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) [4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.

(b) [4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e si dica se φ è invertibile.

(c) [4 punti] Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che

$$Q(-\tfrac{1}{2}) = \int_{-1}^{0} P(x)Q(x)dx \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V.$$

In caso affermativo si determini $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 agosto 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = (X - 1 - i)[X^2 - (3+3i)X + 5i] \in \mathbb{C}[X]$.

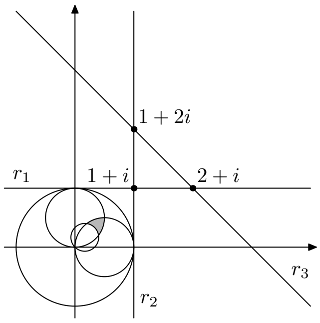
(a) *[3 punti] Si determinino le radici del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *[3 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo,* D, *avente come vertici le radici di* $P(X)$ *e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(c) *[4 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo* D *nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione* $\lambda^*(D)$, *ove* $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *è la riflessione nel cerchio unitario.*

Svolgimento. (a) $P(X) = (X-1-i)(X-2-i)(X-1-2i)$ e disegnamo qui sotto il triangolo formato dalle radici.

(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)



$$\begin{aligned} r_1 &: iz - i\bar{z} + 2 = 0, \\ r_2 &: z + \bar{z} - 2 = 0, \\ r_3 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 6 = 0. \end{aligned}$$

(c) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le tre circonferenze:

$$\lambda^*(r_1) : \left| z - \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_2) = \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_3) = \left| z - \frac{1+i}{6} \right| = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Osservando che

$$D : \begin{cases} iz - i\bar{z} + 2 \le 0 \\ z + \bar{z} - 2 \ge 0 \\ (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 6 \le 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \lambda^*(D) : \begin{cases} z\bar{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} \le 0 \\ z\bar{z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} \le 0 \\ z\bar{z} - \frac{1-i}{6}z - \frac{1+i}{6}\bar{z} \ge 0 \end{cases},$$

si conclude che la regione ombreggiata all'interno del cerchio unitario rappresenta $\lambda^*(D)$. □

ESERCIZIO 2. *Siano* V *e* W *spazi vettoriali reali e siano fissate una base,* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, *di* V *ed una base,* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, *di* W.

(a) *[4 punti] Si determinino le applicazioni lineari* $\phi : V \to W$ *che soddisfano alle condizioni*

$$\phi(v_2 + v_4) = 2\phi(v_1 + v_2) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_2 - v_4) = 2\phi(v_2 - v_3) = 2w_1 - 4w_3,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.

(b) *[4 punti] Sia* U *uno spazio vettoriale reale di dimensione* k *ed indichiamo con* $\Phi : Hom_{\mathbb{R}}(W,U) \to Hom_{\mathbb{R}}(V,U)$, *l'applicazione* $\alpha \mapsto \alpha \circ \phi$, *ove* ϕ *è una delle applicazioni descritte nel punto precedente. Si calcolino, in ogni caso, le dimensioni dei sottospazi* $\ker\Phi$ *ed* $\operatorname{im}\Phi$ *(giustificare le risposte).*

(c) *[4 punti] Sia* $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ *una base di* U *e indichiamo con* r *il rango di* ϕ. *Si fissi una base* $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_4\}$ *di* V *completando una base* $v'_{r+1}, \dots, v'_4$ *di* $\ker\phi$ *e Si fissi una base* $\mathcal{W}' = \{w'_1, \dots, w'_3\}$ *di* W *completando la base* $w'_1 = \phi(v'_1), \dots, w'_r = \phi(v'_r)$ *di* $\operatorname{im}\phi$. *Si scrivano le matrici* $\alpha_{\mathcal{W}',\mathcal{U}}(\alpha)$ *al variare di* $\alpha \in \ker\Phi$ *e le matrici* $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{U}}(\beta)$ *al variare di* $\beta \in \operatorname{im}\Phi$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che i quattro vettori, $v_1 + v_2, v_2 - v_3, v_2 - v_4, v_2 + v_4$, sono una base di V e quindi esiste un'unica applicazione lineare ϕ soddisfacente alle condizioni date. Inoltre

$$\begin{aligned} \phi(v_1) = -w_1 + 2w_3, \quad \phi(v_2) = 2w_1 + w_2 - w_3, \\ \phi(v_3) = w_1 + w_2 + w_3, \quad \phi(v_4) = w_2 + 3w_3. \end{aligned} \qquad \text{e quindi} \quad A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

che è una matrice di rango 2 e si ha $\ker\phi = \langle 2v_1 + v_2 - v_4, v_2 - 2v_3 + v_4\rangle$, $\operatorname{im}\phi = \langle w_1 + w_2 + w_3, w_1 - 2w_3\rangle$.
(b) Fissiamo dei sottospazi complementari e scriviamo $W = W_0 \oplus \operatorname{im}\phi$ e $V = V_0 \oplus \ker\phi$. Un omomorfismo $\alpha : W \to U$ appartiene al nucleo di Φ se, e solo se, la sua restrizione ad $\operatorname{im}\phi$ è identicamente nulla ($\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\alpha$). Quindi possiamo identificare $\ker\Phi$ con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_0, U)$, che ha dimensione k, dato che $\dim_{\mathbb{R}} W_0 = 1$. Un omomorfismo $\beta : V \to U$ appartiene all'immagine di Φ se, e solo se, la sua restrizione a $\ker\phi$ è identicamente nulla ($\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\alpha$). Quindi possiamo identificare $\operatorname{im}\Phi$ con $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_0, U)$, che ha dimensione $2k$, dato che $\dim_{\mathbb{R}} V_0 = 2$[(†)].
(c) Per quanto visto nel punto precedente, gli elementi di $\operatorname{im}\Phi$ sono applicazioni lineari che mandano a zero gli ultimi due vettori della base $\mathcal{V}'$, e quindi le matrici $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{U}}(\beta)$ al variare di $\beta \in \operatorname{im}\Phi$, sono tutte e sole le matrici di $M_{k\times 4}(\mathbb{R})$ con le ultime due colonne identicamente nulle. Analogamente, gli elementi di $\ker\Phi$, sono applicazioni lineari che mandano a zero i primi due vettori della base $\mathcal{W}'$, e quindi le matrici $\alpha_{\mathcal{W}',\mathcal{U}}(\alpha)$ al variare di $\alpha \in \ker\Phi$, sono tutte e sole le matrici di $M_{k\times 3}(\mathbb{R})$ con le prime due colonne identicamente nulle. □

ESERCIZIO 3. *Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\le 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo*

$$\varphi_P(Q(X)) = P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1) \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) *[4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.*
(b) *[4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e se ne calcolino nucleo ed immagine. Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che*

$$\partial_0(Q(X)) = Q'(0) = \phi_P(Q(x)) \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V,$$

ove $Q'(0)$ è la derivata del polinomio $Q(X)$, calcolata in $X = 0$. In caso affermativo si determinino tutti i possibili $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

Svolgimento. (a) Entrambe le proprietà si verificano con un calcolo diretto. Ad esempio, l'identità

$$\begin{aligned}\varphi_P(a_1Q_1(X) + a_2Q_2(X)) &= P(1)\,[a_1Q_1(1) + a_2Q_2(1)] + P(-1)\,[a_1Q_1(-1) + a_2Q_2(-1)] = \\ &= a_1\,[P(1)Q_1(1)P(-1)Q_1(-1)] + a_2\,[P(1)Q_2(1)P(-1)Q_2(-1)] = \\ &= a_1\varphi_P(Q_1(X)) + a_2\varphi_P(Q_2(X)),\end{aligned}$$

valida qualunque siano $Q_1(X), Q_2(X) \in V$ ed $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, permette di concludere che φ_P appartiene a V^*. La verifica del fatto che φ è lineare usa un'analoga identità.
(b) Dalle relazioni

$$\begin{aligned}\varphi_1(1) = 2, \qquad \varphi_1(X) = \varphi_X(1) = 0, \qquad \varphi_1(X^2) = \varphi_X(X) = \varphi_{X^2}(1) = 2, \\ \varphi_X(X^2) = \varphi_{X^2}(X) = 0, \qquad \varphi_{X^2}(X^2) = 2,\end{aligned}$$

si ricava che

$$\varphi_1 = 2\delta_0 + 2\delta_2, \qquad \varphi_X = 2\delta_1, \qquad \varphi_{X^2} = 2\delta_0 + 2\delta_2.$$

Dunque $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2&0&2\\ 0&2&0\\ 2&0&2 \end{pmatrix}$, è una matrice degenere e $\operatorname{im}\varphi = \langle \delta_0 + \delta_2, \delta_1\rangle$, $\ker\varphi = \langle 1 - X^2\rangle$.

L'applicazione $\partial_0(Q(X)) = Q'(0)$ è un elemento di V^* e si ha $\partial_0 = \delta_1 \in \operatorname{im}\varphi$. Quindi, il polinomio $P(X) = \frac{1}{2}X$ in V soddisfa alla condizione $\varphi_P = \partial_0$ così come la soddisfano tutti i polinomi che si ottengono sommando a $P(X)$ un elemento di $\ker\varphi$, ovvero i polinomi $a + \frac{1}{2}X + aX^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$. □

(†) Si può osservare che $W_0 \cong W/\operatorname{im}\phi = \operatorname{coker}\phi$ e $V_0 \cong V/\ker\phi = \operatorname{coim}\phi$. Quindi, si può anche scrivere $\operatorname{im}\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{coim}\phi, U)$ e $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\operatorname{coker}\phi, U)$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 25 agosto 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		B

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = (X + 1 - i)[X^2 + (3 - 3i)X - 5i] \in \mathbb{C}[X]$.
(a) [3 punti] Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.
(b) [3 punti] Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo, D, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.
(c) [4 punti] Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo D nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda^*(D)$, ove $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ è la riflessione nel cerchio unitario.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano fissate una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, di V ed una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$, di W.
(a) [4 punti] Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ che soddisfano alle condizioni

$$\phi(v_1 + v_3) = 2\phi(v_3 + v_4) = 2w_1 + 2w_2 + 2w_3, \qquad \phi(v_1 - v_3) = 2\phi(v_2 - v_3) = -2w_1 + 4w_2,$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Si determinino inoltre nucleo ed immagine di tali applicazioni.
(b) [4 punti] Sia U uno spazio vettoriale reale di dimensione k ed indichiamo con $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, U) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, U)$, l'applicazione $\alpha \mapsto \alpha \circ \phi$, ove ϕ è una delle applicazioni descritte nel punto precedente. Si calcolino, in ogni caso, le dimensioni dei sottospazi $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$ (giustificare le risposte).
(c) [4 punti] Sia $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_k\}$ una base di U e indichiamo con r il rango di ϕ. Si fissi una base $\mathcal{V}' = \{v'_1, \dots, v'_4\}$ di V completando una base $v'_{r+1}, \dots, v'_4$ di $\ker \phi$ e Si fissi una base $\mathcal{W}' = \{w'_1, \dots, w'_3\}$ di W completando la base $w'_1 = \phi(v'_1), \dots, w'_r = \phi(v'_r)$ di $\mathrm{im}\, \phi$. Si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W}',\mathcal{U}}(\alpha)$ al variare di $\alpha \in \ker \Phi$ e le matrici $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{U}}(\beta)$ al variare di $\beta \in \mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2, ed indichiamo con $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base canonica di V e con $\mathcal{B}^* = \{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ la base duale di V^*. Dato un polinomio $P(X) \in V$, si consideri l'applicazione $\varphi_P : V \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$$\varphi_P(Q(X)) = P(2)Q(2) + P(-2)Q(-2) \qquad \text{al variare di } Q(X) \in V.$$

(a) [4 punti] Si verifichi che $\varphi_P \in V^*$, qualunque sia il polinomio $P(X)$ in V. Si verifichi che l'applicazione $\varphi : V \to V^*$ che manda $P(X)$ su φ_P è un omomorfismo di spazi vettoriali reali.
(b) [4 punti] Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}^*}(\varphi)$ e se ne calcolino nucleo ed immagine. Si dica se esiste un polinomio $P(X) \in V$ tale che

$$\partial_0(Q(X)) = Q'(0) = \phi_P(Q(x)) \qquad \text{per ogni } Q(X) \in V,$$

ove $Q'(0)$ è la derivata del polinomio $Q(X)$, calcolata in $X = 0$. In caso affermativo si determinino tutti i possibili $P(X)$; in caso negativo si dimostri perché non possa esistere.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3