Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X^2 + 4)^2$ e quindi gli autovalori sono $2i$ e $-2i$, entrambi con molteplicità (algebrica) 2. Gli autovettori relativi all'autovalore $2i$ generano il sottospazio $\langle e_1 - ie_3 \rangle$ e gli autovettori relativi all'autovalore $-2i$ generano il sottospazio $\langle e_1 + ie_3 \rangle$. Dunque, ci sono autovettori generalizzati di periodo maggiore di 1 per entrambo gli autovalori ed il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico.

(b) Si ha

$$A - 2i\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -2i & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2i & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A - 2i\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} -8 & -4i & 8i & -4 \\ 0 & -8 & 0 & 8i \\ -8i & 4 & -8 & -4i \\ 0 & -8i & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $v_4 = e_2 - ie_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore $2i$ e si pone $v_3 = (\phi - 2i)(v_4) = e_1 - ie_3$. Analogamente, $v_2 = e_2 + ie_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore $-2i$ e si pone $v_1 = (\phi + 2i)(v_2) = e_1 + ie_3$. La base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è costituita da autovettori generalizzati per ϕ e le matrici cercate sono

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia r la retta per il punto $P_0 = O + e_3 - 2e_4$ e parallela al vettore $v = e_1 - e_2 + e_3$, e sia s la retta per il punto $Q_0 = O + 2e_1 + e_3$ e parallela al vettore $w = e_2 + 2e_4$; ove $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$ è il riferimento canonico.*

(a) [3 punti] Si determinino equazioni cartesiane, distanza ed angolo tra le due rette.

(b) [3 punti] Si determinino i punti $P_1 \in r$ e $Q_1 \in s$ di distanza minima.

(c) [4 punti] Si determini il volume (tridimensionale) del tetraedro di vertici P_0, P_1, Q_0, Q_1.

Svolgimento. (a) Le equazioni cartesiane sono

$$r : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x_1 = 2 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

L'angolo $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tra le due rette è determinato dalla condizione $\cos\vartheta = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}$. La distanza, d, tra le due rette possiamo determinarla come un rapporto tra volumi (di parallelepipedi), ovvero $d = \frac{vol^3(Q_0 - P_0, v, w)}{vol^2(v,w)}$. Indicata con $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $Q_0 - P_0$, v, w e con Y la matrice che ha come colonne le coordinate di v e w, si ha

$$vol^3\,(Q_0 - P_0, v, w) = \sqrt{\det {}^tTT} = 2\sqrt{7} \qquad \text{e} \qquad vol^2\,(v, w) = \sqrt{\det {}^tYY} = \sqrt{14}.$$

Dunque, la distanza tra le rette è $d = \sqrt{2}$.

(b) Un generico punto della retta r è del tipo $P = O + te_1 - te_2 + (1+t)e_3 - 2e_4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$, ed un generico punto della retta s è del tipo $Q = O + 2e_1 + se_2 + e_3 + 2se_4$ al variare di $s \in \mathbb{R}$. I punti P_1 e Q_1, di minima distanza, sono individuati dalla condizione $Q_1 - P_1 \in \langle v, w\rangle^\perp$, ovvero dal sistema $\begin{cases} 3t + s = 2 \\ t + 5s = -4 \end{cases}$, da cui si ricava $P_1 = O + e_1 - e_2 + 2e_3 - 2e_4$ e $Q_1 = O + 2e_1 - e_2 + e_3 - 2e_4$ (che conferma $d = \|Q_1 - P_1\| = \sqrt{2}$).

(c) Analogamente a quanto visto nel punto (a), il volume del tetraedro è $\frac{1}{6} vol^3 (Q_0 - P_0, P_1 - P_0, Q_1 - P_0) = \frac{\sqrt{7}}{3}$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano $\pi : x - 2y + z = 2$ e la retta $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$.*

(a) [3 punti] Si determini la posizione reciproca di r e π e se ne calcoli la reciproca distanza.

(b) [6 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ e $g = \rho \circ \sigma$.

(c) [3 punti] Si classifichi la trasformazione f e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

Svolgimento. (a) La retta r passa per $P = O + e_1 - e_3$ ed è parallela al vettore $v = e_1 + e_2 + e_3$; il piano π passa per il punto $Q = O + 2e_2$ ed è ortogonale al vettore $n = e_1 - 2e_2 + e_3$. Si ha $v \cdot n = 0$, ma $P \notin \pi$; quindi il piano e la retta sono paralleli e la distanza di r da π coincide con la distanza di P da π, ovvero $d = \frac{|n\cdot(Q-P)|}{\|n\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(b) Le matrici cercate sono

$$S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -4/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \qquad R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

ed

$$F = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = SR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 0 & 1 \\ -1/3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(g) = RS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) f è la glissoriflessione che si ottiene componendo la riflessione rispetto al piano $\tau : y - z = 0$ con la traslazione di vettore $t_0 = \frac{1}{3}(2e_1 - e_2 - e_3)$. Non ci sono punti uniti, ma sono unite tutte le rette del piano di riflessione parallele al vettore t_0; così come è unito il piano di riflessione ed i piani perpendicolari ad esso e paralleli a t_0 (cioè il fascio di piani perpendicolari alla retta r). □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determnino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia r la retta per il punto $P_0 = O + e_1 - 2e_2$ e parallela al vettore $v = e_1 - e_3 + e_4$, e sia s la retta per il punto $Q_0 = O + e_1 + 2e_4$ e parallela al vettore $w = 2e_2 + e_3$; ove $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$ è il riferimento canonico.

(a) [3 punti] Si determinino equazioni cartesiane, distanza ed angolo tra le due rette.

(b) [3 punti] Si determinino i punti $P_1 \in r$ e $Q_1 \in s$ di distanza minima.

(c) [4 punti] Si determini il volume (tridimensionale) del tetraedro di vertici P_0, P_1, Q_0, Q_1.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, si considerino il piano $\pi : x + y - 2z = 2$ e la retta $r : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$.

(a) [3 punti] Si determini la posizione reciproca di r e π e se ne calcoli la reciproca distanza.

(b) [6 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ e $g = \rho \circ \sigma$.

(c) [3 punti] Si classifichi la trasformazione f e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determnino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia r la retta per il punto $P_0 = O - 2e_1 + e_2$ e parallela al vettore $v = e_2 + e_3 - e_4$, e sia s la retta per il punto $Q_0 = O + e_2 + 2e_3$ e parallela al vettore $w = 2e_1 + e_4$; ove $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$ è il riferimento canonico.

(a) [3 punti] Si determinino equazioni cartesiane, distanza ed angolo tra le due rette.

(b) [3 punti] Si determinino i punti $P_1 \in r$ e $Q_1 \in s$ di distanza minima.

(c) [4 punti] Si determini il volume (tridimensionale) del tetraedro di vertici P_0, P_1, Q_0, Q_1.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, si considerino il piano $\pi : 2x-y-z = -2$ e la retta $r : \begin{cases} x - y = -1 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

(a) [3 punti] Si determini la posizione reciproca di r e π e se ne calcoli la reciproca distanza.

(b) [6 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ e $g = \rho \circ \sigma$.

(c) [3 punti] Si classifichi la trasformazione f e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 29 marzo 2011 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determnino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, sia r la retta per il punto $P_0 = O + e_1 - 2e_3$ e parallela al vettore $v = e_1 + e_2 - e_4$, e sia s la retta per il punto $Q_0 = O + e_1 + 2e_2$ e parallela al vettore $w = 2e_3 + e_4$; ove $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$ è il riferimento canonico.

(a) [3 punti] Si determinino equazioni cartesiane, distanza ed angolo tra le due rette.

(b) [3 punti] Si determinino i punti $P_1 \in r$ e $Q_1 \in s$ di distanza minima.

(c) [4 punti] Si determini il volume (tridimensionale) del tetraedro di vertici P_0, P_1, Q_0, Q_1.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, si considerino il piano $\pi : x + y - 2z = 2$ e la retta $r : \begin{cases} x - z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

(a) [3 punti] Si determini la posizione reciproca di r e π e se ne calcoli la reciproca distanza.

(b) [6 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ e $g = \rho \circ \sigma$.

(c) [3 punti] Si classifichi la trasformazione f e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		A

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [3 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [3 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 su $\mathbb{R}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo di rango 6 e con polinomio minimo $\lambda_\psi(X) = X^5$. Si determinino le possibili forme di Jordan per le matrici di ψ, ψ^2 e ψ^3.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e $\tau = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$.

(a) [4 punti] Si determinino, dimensioni, equazioni cartesiane, posizione reciproca e distanza tra π e τ.

(b) [4 punti] Si determini la sottovarietà lineare di $\mathbb{E}^4$ generata dai punti $P \in \pi$ e $Q \in \tau$ di minima distanza tra i due piani, determinandone una rappresentazione parametrica e delle equazioni cartesiane.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano $\pi : x - z = 2$ e la retta r, passante per $P = O + 2e_1 - e_3$ e parallela all'asse y.

(a) [4 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ ed $f^2 = f \circ f$.

(b) [4 punti] Si classifichino le trasformazioni f ed f^2 e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

(c) [4 punti] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice di una rotazione del piano euclideo. Si scrivano, al variare di α, le coordinate del centro di rotazione in funzione delle coordinate del vettore ${}^t(a, b)$ e dell'angolo α e si discuta cosa accade del centro di rotazione al tendere di α verso 0.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [3 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [3 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 su $\mathbb{R}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo di rango 7 e con polinomio minimo $\lambda_\psi(X) = X^4$. Si determinino le possibili forme di Jordan per le matrici di ψ, ψ^2 e ψ^3.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e $\tau = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$.

(a) [4 punti] Si determinino, dimensioni, equazioni cartesiane, posizione reciproca e distanza tra π e τ.

(b) [4 punti] Si determini la sottovarietà lineare di $\mathbb{E}^4$ generata dai punti $P \in \pi$ e $Q \in \tau$ di minima distanza tra i due piani, determinandone una rappresentazione parametrica e delle equazioni cartesiane.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano $\pi : x - y = -2$ e la retta r, passante per $P = O - e_1 + 2e_2$ e parallela all'asse z.

(a) [4 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ ed $f^2 = f \circ f$.

(b) [4 punti] Si classifichino le trasformazioni f ed f^2 e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

(c) [4 punti] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice di una rotazione del piano euclideo. Si scrivano, al variare di α, le coordinate del centro di rotazione in funzione delle coordinate del vettore ${}^t(a, b)$ e dell'angolo α e si discuta cosa accade del centro di rotazione al tendere di α verso 0.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		C

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [3 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [3 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 su $\mathbb{R}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo di rango 7 e con polinomio minimo $\lambda_\psi(X) = X^5$. Si determinino le possibili forme di Jordan per le matrici di ψ, ψ^2 e ψ^3.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e $\tau = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$.

(a) [4 punti] Si determinino, dimensioni, equazioni cartesiane, posizione reciproca e distanza tra π e τ.

(b) [4 punti] Si determini la sottovarietà lineare di $\mathbb{E}^4$ generata dai punti $P \in \pi$ e $Q \in \tau$ di minima distanza tra i due piani, determinandone una rappresentazione parametrica e delle equazioni cartesiane.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano $\pi : x - y = 2$ e la retta r, passante per $P = O + 2e_1 - e_2$ e parallela all'asse z.

(a) [4 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ ed $f^2 = f \circ f$.

(b) [4 punti] Si classifichino le trasformazioni f ed f^2 e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

(c) [4 punti] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice di una rotazione del piano euclideo. Si scrivano, al variare di α, le coordinate del centro di rotazione in funzione delle coordinate del vettore ${}^t(a, b)$ e dell'angolo α e si discuta cosa accade del centro di rotazione al tendere di α verso 2π.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 4 aprile 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		D

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [3 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [3 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 10 su $\mathbb{R}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo di rango 7 e con polinomio minimo $\lambda_\psi(X) = X^6$. Si determinino le possibili forme di Jordan per le matrici di ψ, ψ^2 e ψ^3.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e le sottovarietà lineari $\pi = P_1 \vee P_2 \vee P_3$ e $\tau = Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$.

(a) [4 punti] Si determinino, dimensioni, equazioni cartesiane, posizione reciproca e distanza tra π e τ.

(b) [4 punti] Si determini la sottovarietà lineare di $\mathbb{E}^4$ generata dai punti $P \in \pi$ e $Q \in \tau$ di minima distanza tra i due piani, determinandone una rappresentazione parametrica e delle equazioni cartesiane.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano $\pi : x - z = -2$ e la retta r, passante per $P = O - e_1 + 2e_3$ e parallela all'asse y.

(a) [4 punti] Si scrivano le matrici nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano π, della rotazione, ρ, di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta r e delle applicazioni $f = \sigma \circ \rho$ ed $f^2 = f \circ f$.

(b) [4 punti] Si classifichino le trasformazioni f ed f^2 e se ne determinino le caratteristiche e gli eventuali punti, rette e piani uniti.

(c) [4 punti] Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ b & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ la matrice di una rotazione del piano euclideo. Si scrivano, al variare di α, le coordinate del centro di rotazione in funzione delle coordinate del vettore ${}^t(a, b)$ e dell'angolo α e si discuta cosa accade del centro di rotazione al tendere di α verso 2π.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *[4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per* ϕ.

(b) *[4 punti] Si determinino una matrice di Jordan,* J*, ed una matrice invertibile,* P*, tali che* $J = P^{-1}AP$.

(c) *[4 punti] Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita su* $\mathbb{C}$ *e* $\psi : V \to V$ *un endomorfismo invertibile, con autovalori,* $a_1, \dots, a_r$*, a due a due distinti. Se* $p_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i}$ *e* $\lambda_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{c_i}$*, cosa possiamo dire del polinomio caratteristico e del polinomio minimo delle potenze di* ψ*?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X - 2)^5$ e quindi vi è il solo autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 + e_2 - e_5, e_2 + e_4, e_3 + 3e_4 \rangle$, di dimensione 3. Si ha $(A - 2)^2 = 0$; dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X - 2)^2$.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi di ordine 2 ed uno di ordine 1. Il vettore $v_5 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 e si pone $v_4 = (\phi - 2)(v_5) = -e_2 - e_4$. Analogamente $v_3 = e_5$ e $v_2 = (\phi - 2)(v_3) = 3e_1 + e_3 - 3e_5$. Infine $v_1 = e_3 + 3e_4$. Si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Considerando una forma triangolare superiore (ad esempio la forma di Jordan) per la matrice di ψ si vede che gli autovalori di ψ^k $(k \geq 1)$ sono esattamente $a_1^k, \dots, a_r^k$, con le stesse molteplicità, $m_1, \dots, m_r$. Quindi $p_{\psi^k}(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i^k)^{m_i}$.

Per quanto riguarda il polinomio minimo, possiamo ridurci a considerare la restrizione di ψ a ciascuno dei sottospazi di autovettori generalizzati, $\ker(\psi - a_i)^{m_i}$. Ovvero, possiamo supporre $\psi = a\mathrm{id} + \nu$ con $a \neq 0$, e $\nu^c = 0 \neq \nu^{c-1}$; inoltre, possiamo considerare la filtrazione $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_c$, dove $W_0 = \langle 0 \rangle$ e $W_i = \ker(\nu^i)$, per $i = 1, \dots, c$. Tramite la formula del binomio di Newton, ricordando che $\nu^j = 0$ per $j \geq c$ e che $\binom{k}{j} = 0$ quando $j > k$, si ha che $\psi^k = a^k\mathrm{id} + \mu$, ove $\mu = (a\mathrm{id} + \nu)^k - a^k\mathrm{id} = \sum_{j=1}^{c-1} \binom{k}{j} a^{k-j}\nu^j$, e vogliamo dimostrare che μ è nilpotente, di periodo c. Essendo una combinazione lineare di potenze di ν (di grado positivo), è chiaro che μ è nilpotente e non può avere periodo maggiore del periodo, c, di ν. D'altro canto, dalla scrittura sopra si vede che, se $v \in W_i$, allora $\nu(v) \in W_{i-1}$ e $\mu(v) \in ka^{k-1}\nu(v) + W_{i-2}$. Se ne deduce che, se v ha periodo esattamente c, $\mu^{c-1}(v) = (ka^{k-1})^{c-1}\nu^{c-1}(v) \neq 0$ e quindi μ e ν hanno lo stesso periodo. Si conclude che $\lambda_{\psi^k}(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i^k)^{c_i}$.

Si può dire qualcosa sulla matrice di Jordan di ψ^k? Cosa succede togliendo l'ipotesi che ψ sia invertibile? □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^n$ *con l'usuale prodotto scalare, sia dato un endomorfismo simmetrico* ϕ.

(a) *[4 punti] Indicati con* λ_0 *e* λ_1*, rispettivamente, il minimo ed il massimo valore assoluto degli autovalori di* ϕ*, si dimostri che, per ogni* $v \neq 0$ *in* $\mathbb{R}^n$ *si ha* $\lambda_0 \leq \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda_1$.

(b) *[4 punti] È vero che, se esistono un vettore* $v \neq 0$ *ed uno scalare* λ*, tali che* $\frac{\|\phi(v) - \lambda v\|}{\|v\|} < \varepsilon$*, allora esiste un autovalore* a *di* ϕ *tale che* $|a - \lambda| < \varepsilon$*?*

(c) *[2 punti] Si risponda alle domande precedenti, supponendo che ϕ sia un endomorfismo normale dello spazio $\mathbb{C}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare hermitiano.*

Svolgimento. (a) Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di autovettori per ϕ e siano $a_1, \dots, a_n$ i rispettivi autovalori, con $\lambda_0 = |a_1| \leq |a_1| \leq \cdots \leq |a_n| = \lambda_1$. Dato un vettore $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \neq 0$, si ha $\|v\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$ e

$$\|\phi(v)\|^2 = (x_1a_1v_1 + \cdots + a_nx_nv_n) \cdot (x_1a_1v_1 + \cdots + a_nx_nv_n) = |x_1a_1|^2 + \cdots + |x_na_n|^2.$$

Se ne deduce che $\lambda_0\|v\| \leq \|\phi(v)\| \leq \lambda_1\|v\|$ che permette di concludere, essendo $\|v\| > 0$.

(b) Proseguiamo con le notazioni del punto precedente ed osserviamo che, posto $\delta = \min\{|a_i - \lambda| \;:\; i = 1, \dots, n\}$, si ha

$$\varepsilon^2\|v\|^2 \geq \|\phi(v) - \lambda v\|^2 = |x_1(a_1 - \lambda)|^2 + \cdots + |x_n(a_n - \lambda)|^2 \geq \delta^2\|v\|^2$$

e quindi $\varepsilon \geq \delta$.

(c) Anche per un endomorfismo normale esiste una base ortonormale di autovettori e possiamo ripetere passo dopo passo i ragionamenti fatti sopra. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si consideri il piano $\pi_1 : x + z - 2 = 0$.*

(a) *[4 punti] Si determinino le equazioni cartesiane dei piani, π_2 e π_3, che si ottengono ruotando il piano π_1 attorno all'asse $O + \langle e_2 \rangle$ di angoli $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, rispettivamente. Si determini un punto e lo spazio direttore della retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$.*

(b) *[4 punti] Sia ρ la rotazione di asse r ed angolo $\frac{\pi}{4}$ e sia σ la riflessione rispetto al piano π_1. Si scrivano le matrici $R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho)$ ed $S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)$ e si classifichi l'isometria $f = \rho \circ \sigma$ determinandone le caratteristiche e le eventuali sottovarietà lineari che restano fisse.*

Svolgimento. (a) Il piano π_1 passa per il punto $P = O + e_1 + e_3$ ed è ortogonale al vettore $n = e_1 + e_3$. Detta λ la rotazione attorno all'asse $O + \langle e_2 \rangle$, di angolo $\frac{2\pi}{3}$, si ha

$$\pi_2 = \left\{\, X \in \mathbb{E}^3 \mid \lambda(n) \cdot (X - \lambda(P)) = 0 \,\right\} \qquad \text{e} \qquad \pi_3 = \left\{\, X \in \mathbb{E}^3 \;\middle|\; \lambda^2(n) \cdot (X - \lambda^2(P)) = 0 \,\right\}.$$

La rotazione λ ha matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$, ed i piani cercati hanno quindi equazioni cartesiane $\pi_2 : (\sqrt{3}+1)x - (\sqrt{3}-1)z + 4 = 0$ e $\pi_3 : (\sqrt{3}-1)x - (\sqrt{3}+1)z - 4 = 0$. Un punto della retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$ è $P_0 = O - 2e_1 - 2e_3$ ed il sottospazio direttore è $\langle e_2 \rangle$.

(b) Le matrici sono

$$R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2(\sqrt{2}-1) & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'isometria composta ha matrice

$$F = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = RS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4\sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

f è un'isometria inversa e gli autovettori relativi all'autovalore -1 sono i multipli di $n_0 = e_1 + (\sqrt{2}+1)e_3$. Il vettore $t = -2e_1 + (4\sqrt{2} - 2)e_3$ si decompone nella somma $n_0 + v_0$ con $v_0 = -3e_1 - 3(1 - \sqrt{2})e_3 \in \langle n_0 \rangle^\perp$. Si tratta quindi della glissoriflessione che si ottiene componendo la riflessione rispetto al piano $\omega : O + \frac{1}{2}n_0 + \langle n_0 \rangle^\perp$ con la traslazione di vettore v_0. Non vi sono punti uniti, ma restano unite le rette del piano ω, di direzione $\langle v_0 \rangle$ ed i piani ortogonali ad ω e paralleli a $\langle v_0 \rangle$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [4 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo invertibile, con autovalori, $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinti. Se $p_\psi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)^{m_i}$ e $\lambda_\psi(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - a_i)^{c_i}$, cosa possiamo dire del polinomio caratteristico e del polinomio minimo delle potenze di ψ?

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con l'usuale prodotto scalare, sia dato un endomorfismo simmetrico ϕ.

(a) [4 punti] Indicati con λ_0 e λ_1, rispettivamente, il minimo ed il massimo valore assoluto degli autovalori di ϕ, si dimostri che, per ogni $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ si ha $\lambda_0 \leq \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda_1$.

(b) [4 punti] È vero che, se esistono un vettore $v \neq 0$ ed uno scalare λ, tali che $\frac{\|\phi(v) - \lambda v\|}{\|v\|} < \varepsilon$, allora esiste un autovalore a di ϕ tale che $|a - \lambda| < \varepsilon$?

(c) [2 punti] Si risponda alle domande precedenti, supponendo che ϕ sia un endomorfismo normale dello spazio $\mathbb{C}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare hermitiano.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si consideri il piano $\pi_1 : y + z - 2 = 0$.

(a) [4 punti] Si determinino le equazioni cartesiane dei piani, π_2 e π_3, che si ottengono ruotando il piano π_1 attorno all'asse $O + \langle e_1 \rangle$ di angoli $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, rispettivamente. Si determini un punto e lo spazio direttore della retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$.

(b) [4 punti] Sia ρ la rotazione di asse r ed angolo $\frac{\pi}{4}$ e sia σ la riflessione rispetto al piano π_1. Si scrivano le matrici $R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho)$ ed $S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)$ e si classifichi l'isometria $f = \rho \circ \sigma$ determinandone le caratteristiche e le eventuali sottovarietà lineari che restano fisse.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [4 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo invertibile, con autovalori, $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinti. Se $p_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i}$ e $\lambda_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{c_i}$, cosa possiamo dire del polinomio caratteristico e del polinomio minimo delle potenze di ψ?

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con l'usuale prodotto scalare, sia dato un endomorfismo simmetrico ϕ.

(a) [4 punti] Indicati con λ_0 e λ_1, rispettivamente, il minimo ed il massimo valore assoluto degli autovalori di ϕ, si dimostri che, per ogni $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ si ha $\lambda_0 \leq \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda_1$.

(b) [4 punti] È vero che, se esistono un vettore $v \neq 0$ ed uno scalare λ, tali che $\frac{\|\phi(v) - \lambda v\|}{\|v\|} < \varepsilon$, allora esiste un autovalore a di ϕ tale che $|a - \lambda| < \varepsilon$?

(c) [2 punti] Si risponda alle domande precedenti, supponendo che ϕ sia un endomorfismo normale dello spazio $\mathbb{C}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare hermitiano.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si consideri il piano $\pi_1 : x + y - 2 = 0$.

(a) [4 punti] Si determinino le equazioni cartesiane dei piani, π_2 e π_3, che si ottengono ruotando il piano π_1 attorno all'asse $O + \langle e_3 \rangle$ di angoli $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, rispettivamente. Si determini un punto e lo spazio direttore della retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$.

(b) [4 punti] Sia ρ la rotazione di asse r ed angolo $\frac{\pi}{4}$ e sia σ la riflessione rispetto al piano π_1. Si scrivano le matrici $R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho)$ ed $S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)$ e si classifichi l'isometria $f = \rho \circ \sigma$ determinandone le caratteristiche e le eventuali sottovarietà lineari che restano fisse.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 luglio 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		D

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) [4 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{C}$ e $\psi : V \to V$ un endomorfismo invertibile, con autovalori, $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinti. Se $p_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i}$ e $\lambda_\psi(X) = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{c_i}$, cosa possiamo dire del polinomio caratteristico e del polinomio minimo delle potenze di ψ?

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ con l'usuale prodotto scalare, sia dato un endomorfismo simmetrico ϕ.

(a) [4 punti] Indicati con λ_0 e λ_1, rispettivamente, il minimo ed il massimo valore assoluto degli autovalori di ϕ, si dimostri che, per ogni $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$ si ha $\lambda_0 \leq \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|} \leq \lambda_1$.

(b) [4 punti] È vero che, se esistono un vettore $v \neq 0$ ed uno scalare λ, tali che $\frac{\|\phi(v) - \lambda v\|}{\|v\|} < \varepsilon$, allora esiste un autovalore a di ϕ tale che $|a - \lambda| < \varepsilon$?

(c) [2 punti] Si risponda alle domande precedenti, supponendo che ϕ sia un endomorfismo normale dello spazio $\mathbb{C}^n$ dotato dell'usuale prodotto scalare hermitiano.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si consideri il piano $\pi_1 : x + y - 2 = 0$.

(a) [4 punti] Si determinino le equazioni cartesiane dei piani, π_2 e π_3, che si ottengono ruotando il piano π_1 attorno all'asse $O + \langle e_1 \rangle$ di angoli $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$, rispettivamente. Si determini un punto e lo spazio direttore della retta $r = \pi_2 \cap \pi_3$.

(b) [4 punti] Sia ρ la rotazione di asse r ed angolo $\frac{\pi}{4}$ e sia σ la riflessione rispetto al piano π_1. Si scrivano le matrici $R = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho)$ ed $S = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)$ e si classifichi l'isometria $f = \rho \circ \sigma$ determinandone le caratteristiche e le eventuali sottovarietà lineari che restano fisse.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 agosto 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *[4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.*

(b) *[4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = X^2(X+2)^3$ e quindi vi sono gli autovalori 0 e -2, con molteplicità (algebrica) 2 e 3, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi + 2) = \langle e_2 \rangle$, e $\ker \phi = \langle e_1 + e_3 \rangle$, entrambo di dimensione 1; dunque il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine massimo per ciascuno degli autovalori. Si ha

$$A + 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $v_3 = e_1$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -2 e si pone $v_2 = (\phi+2)(v_3) = 3e_4$ e $v_1 = (\phi+2)^2(v_3) = -6e_2$. Ricordando che $\mathrm{im}\,(\phi+2)^3 = \ker(\phi^2)$, si vede che il vettore $v_5 = e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 0 e si pone $v_4 = \phi(v_5) = 3e_1 + 3e_3$. Si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita.*

(a) *[4 punti] Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile e sia $W \subset V$ un sottospazio non banale, tale che $\phi(W) \subseteq W$. È vero che la restrizione di ϕ a W è un endomorfismo diagonalizzabile? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).*

(b) *[4 punti] Sia $\psi : V \to V$ un endomorfismo e sia $W \subset V$ un sottospazio non banale, tale che $\psi(W) \subseteq W$. È vero che esiste un sottospazio T di V tale che $V = T \oplus W$ e $\psi(T) \subseteq T$? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).*

(c) *[2 punti] Si discuta la domanda nel punto (b) ponendo l'ulteriore ipotesi che ψ sia un endomorfismo diagonalizzabile.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di $\phi_{|W}$ divide il polinomio caratteristico di ϕ e lo stesso si può dire per i rispettivi polinomi minimi (spiegare bene questo fatto!). Poiché ϕ è diagonalizzabile il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti e quindi lo stesso deve accadere per il polinomio minimo della restrizione. Questo è sufficiente per concludere.

(b) L'affermazione è falsa se la dimensione dello spazio è maggiore di 1. Sia, ad esempio, V uno spazio di dimensione 2 e ψ l'endomorfismo di matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ rispetto ad una opportuna base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ di V. Il sottospazio $W = \langle v_1 \rangle$ è mandato in sé da ψ, ma non può esistere un complementare T di W tale che $\psi(T) \subset T$, perché, se così fosse, allora ψ sarebbe diagonalizzabile (spiegare bene questo fatto!).

(c) Nell'ipotesi che ψ sia diagonalizzabile, il controesempio precedente cade e l'affermazione diventa vera ed è conseguenza del fatto che, quando ψ è diagonalizzabile, ogni insieme di autovettori linearmente indipendenti può essere completato ad una base di autovettori (spiegare bene questo fatto!). □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano π e la retta r di equazioni:*

$$\pi : x + z = 0, \qquad r : \begin{cases} 2x - y + z = -1 \\ y - 2x = 1 \end{cases}.$$

(a) [4 punti] Si determinino $r \cap \pi$ e l'angolo, ϑ, formato dalla retta r con la retta perpendicolare al piano π. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione (simmetria ortogonale) rispetto al piano π.

(b) [4 punti] Si scriva la matrice nel riferimento canonico della rotazione, ρ, di asse r ed angolo ϑ. Si determinino le equazioni cartesiane di tutte le sottovarietà lineari invarianti rispetto a ρ.

(c) [4 punti] Siano τ ed s, rispettivamente, un piano ed una retta dello spazio euclideo, non paralleli tra loro. Si indichi con σ la riflessione rispetto al piano τ e con ρ_ϑ la rotazione di asse s ed angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $\sigma \circ \rho_\vartheta = \rho_\vartheta \circ \sigma$.

Svolgimento. (a) L'intersezione tra r e π è costituita unicamente dal punto $P_0 = O + e_2$. Un vettore ortogonale al piano π è $n = e_1 + e_3$ ed un vettore parallelo alla retta r è $v = e_1 + 2e_2$. Quindi il coseno dell'angolo tra le due rette è uguale a

$$\cos\vartheta = \frac{|n \cdot v|}{\|n\|\,\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

La matrice cercata è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sia dato un generico punto $X = O + xe_1 + ye_2 + ze_3$ dello spazio e sia $v_0 = \frac{v}{\|v\|}$ un versore della retta r. Posto $x = X - P_0$, si ha (cf. Esercizio 1.23 del testo)

$$\rho(X) = P_0 + \cos\vartheta (v_0 \times x) \times v_0 + \sin\vartheta v_0 \times x + (v_0 \cdot x) v_0.$$

Con un calcolo esplicito, si ottiene da ciò la matrice $\frac{1}{5\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2-2\sqrt{10} & 4+\sqrt{10} & -2+2\sqrt{10} & 6\sqrt{5} \\ \sqrt{10}-1 & -2+2\sqrt{10} & 1+4\sqrt{10} & -3\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5} & -6\sqrt{5} & 3\sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$.

Oltre all'asse di rotazione, sono invarianti tutti i piani ad esso ortogonali, ovvero i piani di equazione $x + 2y = \lambda$, al variare di λ in $\mathbb{R}$.

(c) Possiamo fissare un riferimento che abbia come origine il punto di intersezione, $\{P\} = \tau \cap s$, e per il quale il piano τ abbia equazione $x_3 = 0$ (perché?). Entrambe le trasformazioni lasciano quindi fissa l'origine e sono completamente determinate dalle matrici ortogonali

$$\text{riflessione: } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{rotazione: } R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La condizione $RS = SR$ implica $a_{13} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$ e quindi a_{33} deve essere un autovalore reale della matrice (ortogonale) R.

Se $a_{33} = 1$, allora l'asse della rotazione è parallelo al terzo vettore del riferimento, ovvero alla direzione perpendicolare al piano τ e questa condizione è sufficiente affinché σ e ρ_ϑ commutino, indipendentemente dal valore dell'angolo ϑ.

Se $a_{33} = -1$, allora $\vartheta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, e la matrice della rotazione ha la forma $R = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ove $\cos\frac{\alpha}{2} v_1 + \sin\frac{\alpha}{2} v_2$ è la direzione della retta s (asse di rotazione) e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ è la base ortonormale associata al riferimento fissato. Dunque la retta s è parallela al piano τ e questo è escluso dalle ipotesi date. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 agosto 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita.

(a) [4 punti] Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile e sia $W \subset V$ un sottospazio non banale, tale che $\phi(W) \subseteq W$. È vero che la restrizione di ϕ a W è un endomorfismo diagonalizzabile? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).

(b) [4 punti] Sia $\psi : V \to V$ un endomorfismo e sia $W \subset V$ un sottospazio non banale, tale che $\psi(W) \subseteq W$. È vero che esiste un sottospazio T di V tale che $V = T \oplus W$ e $\psi(T) \subseteq T$? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).

(c) [2 punti] Si discuta la domanda nel punto (b) ponendo l'ulteriore ipotesi che ψ sia un endomorfismo diagonalizzabile.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino il piano π e la retta r di equazioni:

$$\pi : x + y = 0, \qquad r : \begin{cases} x + 2y - z = -1 \\ z - 2y = 1 \end{cases}.$$

(a) [4 punti] Si determinino $r \cap \pi$ e l'angolo, ϑ, formato dalla retta r con la retta perpendicolare al piano π. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione (simmetria ortogonale) rispetto al piano π.

(b) [4 punti] Si scriva la matrice nel riferimento canonico della rotazione, ρ, di asse r ed angolo ϑ. Si determinino le equazioni cartesiane di tutte le sottovarietà lineari invarianti rispetto a ρ.

(c) [4 punti] Siano τ ed s, rispettivamente, un piano ed una retta dello spazio euclideo, non paralleli tra loro. Si indichi con σ la riflessione rispetto al piano τ e con ρ_ϑ la rotazione di asse s ed angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $\sigma \circ \rho_\vartheta = \rho_\vartheta \circ \sigma$.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 settembre 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^5$ e quindi vi è l'unico autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_2, e_1 + e_3 \rangle$. Si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^3 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-2)^3$.

(*b*) Si ha quindi $\mathrm{rk}(\phi - 2) = 3$ e $\mathrm{rk}(\phi - 2)^2 = 1$, per cui la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_3 = e_1$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore 2 e si pone $v_2 = (\phi - 2)(v_3) = 3e_4$ e $v_1 = (\phi - 2)^2(v_3) = 6e_2$. Il vettore $v_5 = e_5$, appartiene a $\ker(\phi - 2)^2$, ma non al sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ e lo stesso vale per $v_4 = (\phi - 2)(v_5) = 3e_1 + 3e_3$. Si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Un sottospazio $W \subset V$, si dice ϕ-stabile se $\phi(W) \subseteq W$.*

(a) [4 punti] Sia $\lambda_\phi(X) = (X-a)g(X)$ il polinomio minimo di ϕ e $g(a) \neq 0$. Si consideri l'endomorfismo $\frac{g(\phi)}{g(a)} : V \to V$; se ne determinino nucleo ed immagine e si verifichi che sono sottospazi ϕ-stabili. È vero che si tratta di una proiezione?

(b) [4 punti] Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo triangolarizzabile e $\lambda_\phi(X) = (X-a_1)^{c_1}, \cdots (X-a_r)^{c_r}$ il suo polinomio minimo, con $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti. Si ponga $W_i = \ker(\phi - a_i)^{c_i}$, per ogni $i = 1, \dots, r$. È vero che, per ogni sottospazio ϕ-stabile W, si ha $W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_r)$? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).

(c) [2 punti] Si determinino tutti i sottospazi ϕ-stabili di V ponendo l'ulteriore ipotesi che ϕ sia un endomorfismo normale.

Svolgimento. (a) Si tratta della proiezione su $\ker(\phi - a)$, parallelamente al sottospazio $\ker g(\phi)$. Infatti, per il Lemma di Decomposizione, si ha $V = \ker(\phi - a) \oplus \ker g(\phi)$ e, per ogni $v \in V$, $(\phi - a)g(\phi)(v) = \lambda_\phi(\phi)(v) = 0$. Quindi $\mathrm{im}\, \frac{g(\phi)}{g(a)} \subseteq \ker(\phi - a)$. Inoltre, se $v \in \ker(\phi - a)$, $g(\phi)(v) = g(a)v$ e quindi $\frac{g(\phi)}{g(a)}(v) = v$. I due sottospazi sono stabili per ϕ (perché?).

(*b*) Per qualunque sottospazio, W, si ha $(W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_r) \subseteq W$. Se W è ϕ-stabile, il polinomio minimo di $\phi_{|W}$ divide $\lambda_\phi(X)$ (spiegare bene questo fatto!) e quindi il sottospazio W ha una base fatta da autovettori generalizzati per ϕ. Si conclude che $W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_r)$.

(c) Un endomorfismo normale è diagonalizzabile e quindi i sottospazi ϕ-stabili sono tutti e soli quelli che ammettono una base fatta da autovettori per ϕ (spiegare bene questo fatto!). $\square$

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + 2y - x = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 4x - y + 4z = 15 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}.$$

(a) [4 punti] Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza.
(b) [4 punti] Si determini una rototraslazione, ρ, che porti la retta r sulla retta s e se ne scriva la matrice nel riferimento dato.
(c) [4 punti] Si determini una rotoriflessione, σ, che porti la retta r sulla retta s e se ne scriva la matrice nel riferimento dato. Che dire dell'applicazione composta $\sigma^{-1}\rho$?

Svolgimento. (a) La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il vettore differenza tra un generico punto di s ed un generico punto di r è $u = Q - P + sw - tv = \begin{pmatrix} 4+s-t \\ t \\ -1-s \end{pmatrix}$, che è ortogonale ad entrambo le rette se, e solo se, $u \cdot v = 0 = u \cdot w$, ovvero se, e solo se, $\begin{cases} 2t - s = 4 \\ t - 2s = 5 \end{cases}$, che è equivalente a $\begin{cases} t = 1 \\ s = -2 \end{cases}$. Dunque i punti di minima distanza tra le due rette sono $P_0 = P + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $Q_0 = Q - 2w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e la distanza tra le due rette è $d = \|Q_0 - P_0\| = \sqrt{3}$. Il coseno dell'angolo tra le due rette è $\frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} = \frac{1}{2}$, e le due rette formano un angolo di $\frac{\pi}{6}$.
(b) Per portare la retta r sulla retta s, possiamo quindi fare una rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta $P_0 \vee Q_0$, seguita dalla traslazione di vettore $Q_0 - P_0$. La rotazione ha matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(c) Per portare la retta r sulla retta s, possiamo quindi fare una rotazione di angolo $\frac{\pi}{6}$ attorno alla retta $P_0 \vee Q_0$, seguita dalla riflessione rispetto al piano, π, parallelo ad r ed s, passante per il punto $M = \frac{Q_0 + P_0}{2}$. La matrice della rotazione l'abbiamo già calcolata sopra. La riflessione ha matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7/3 & 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 7/3 & -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 7/3 & -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = RS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché le componenti rotatorie si elidono (perché?), l'applicazione composta $\sigma^{-1}\rho$ è la composizione della riflessione rispetto a π con la traslazione per il vettore $Q_0 - P_0$, ortogonale al piano di riflessione. Si tratta quindi della riflessione rispetto al piano parallelo a π passante per $Q_0 = M + \frac{Q_0 - P_0}{2}$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 20 settembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola
		B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Un sottospazio $W \subset V$, si dice ϕ-stabile se $\phi(W) \subseteq W$.

(a) [4 punti] Sia $\lambda_\phi(X) = (X - a)g(X)$ il polinomio minimo di ϕ e $g(a) \neq 0$. Si consideri l'endomorfismo $\frac{g(\phi)}{g(a)} : V \to V$; se ne determinino nucleo ed immagine e si verifichi che sono sottospazi ϕ-stabili. È vero che si tratta di una proiezione?

(b) [4 punti] Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_\phi(X) = (X - a_1)^{c_1}, \cdots (X - a_r)^{c_r}$ il suo polinomio minimo, con $a_1, \dots, a_r$ a due a due distinti. Si ponga $W_i = \ker(\phi - a_i)^{c_i}$, per ogni $i = 1, \dots, r$. È vero che, per ogni sottospazio ϕ-stabile W, si ha $W = (W \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (W \cap W_r)$? (in caso affermativo, dimostrarlo; in caso negativo, dare un controesempio).

(c) [2 punti] Si determinino tutti i sottospazi ϕ-stabili di V ponendo l'ulteriore ipotesi che ϕ sia un endomorfismo normale.

ESERCIZIO 3. Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:

$$r : \begin{cases} 2x - y + 2z = 4 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases}.$$

(a) [4 punti] Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza.

(b) [4 punti] Si determini una rototraslazione, ρ, che porti la retta r sulla retta s e se ne scriva la matrice nel riferimento dato.

(c) [4 punti] Si determini una rotoriflessione, σ, che porti la retta r sulla retta s e se ne scriva la matrice nel riferimento dato. Che dire dell'applicazione composta $\sigma^{-1}\rho$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3