Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 2 dicembre 2011 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^6 + 7X^3 - 8$
(a) Trovare le radici di $P(X)$ *nel campo* $\mathbb{C}$ *dei numeri complessi.*
(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ *in* $\mathbb{R}[X]$ *e in* $\mathbb{C}[X]$.

Svolgimento. (a) $t^2 + 7t - 8$ ha come radici 1 e -8. Dobbiamo trovare le radici cubiche di questi due numeri complessi, che sono ζ, $\bar{\zeta}$, 1, e -2, -2ζ, $-2\bar{\zeta}$, ove $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2\pi i/3}$.
(b) In $\mathbb{C}[X]$ si ha $P(X) = (X-1)(X-\zeta)(X-\bar{\zeta})(X+2)(X+2\zeta)(X+2\bar{\zeta})$.
In $\mathbb{R}[X]$ si ha $P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+X+1)(X^2-2X+4)$. □

ESERCIZIO 2. *Sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ *una base dello spazio vettoriale* V *su* $\mathbb{Q}$. *Sia* $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, *ove* $u_1 = v_1 - v_3 + 2v_4$, $u_2 = 2v_1 - 3v_2 - 2v_3 - 2v_4$, $u_3 = -v_2 - 2v_4$, *e sia* W *il sottospazio di* V *definito dal sistema di equazioni omogenee* $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 + 6X_3 - X_4 = 0 \\ 4X_1 + X_2 - 2X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U *e* W. *Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di* V *che si ottiene traslando tutti i vettori di* U *per il vettore* $u_0 = v_1 - v_2 - v_3$.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ *dell'endomorfismo* $\pi : V \to V$ *che si ottiene proiettando i vettori su* U *parallelamente a* W.
(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$ *definito ponendo* $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. *Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di* Φ. *Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di* V *e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per* $\ker\Phi$ *ed* $\mathrm{im}\,\Phi$.

Svolgimento. (a) I generatori di U sono linearmente dipendenti: $2u_1 - u_2 + 3u_3 = 0$. Quindi $\dim U = 2$ ed i vettori u_1, u_2 ne formano una base. Il sistema che definisce W ha rango 2, essendo $5I - 3II - 2III = 0$; il sottospazio ha quindi dimensione 2 ed una base è data dai vettori $w_1 = v_1 + 2v_4$, $w_2 = 2v_2 + v_3$. Equazioni cartesiane per il sottospazio U sono $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ 2X_2 - 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$ da cui si vede che u_0 appartiene ad U e quindi il sottospazio non varia traslando per u_0.
(b) La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Un omomorfismo, $\phi : V \to V$, appartiene a $\ker\Phi$ se, e solo se, $\phi(U) \subseteq U$ e $\phi(W) \subseteq W$. Dunque $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,U) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,W)$ è un sottospazio di dimensione 8. I vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono una base, $\mathcal{U}$, di $V = U \oplus W$ e gli omomorfismi $\lambda_{i,j}$, $\lambda'_{i,j}$, per $1 \le i,j \le 2$, definiti da

$$\lambda_{i,j}(u_j) = u_i \;\text{ e }\; \lambda_{i,j}(x) = 0 \;\text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$
$$\lambda'_{i,j}(w_j) = w_i \;\text{ e }\; \lambda'_{i,j}(x) = 0 \;\text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$

sono una base di $\ker\Phi$.

Un omomorfismo, $\phi : V \to V$, appartiene a $\mathrm{im}\,\Phi$ se, e solo se, $\phi(U) \subseteq W$ e $\phi(W) \subseteq U$. Dunque $\mathrm{im}\,\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,W) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,U)$ si conferma essere un sottospazio di dimensione 8 di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$. Gli omomorfismi $\nu_{i,j}$, $\nu'_{i,j}$, per $1 \le i,j \le 2$, definiti da

$$\nu_{i,j}(u_j) = w_i \;\text{ e }\; \nu_{i,j}(x) = 0 \;\text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$
$$\nu'_{i,j}(w_j) = u_i \;\text{ e }\; \nu'_{i,j}(x) = 0 \;\text{ per ogni altro vettore della base } \mathcal{U};$$

sono una base di $\operatorname{im}\Phi$.

Φ non è una proiezione[(†)], perché non induce l'identità su $\operatorname{im}\Phi$ (ad es. $\Phi(\nu_{i,j}) = -\nu_{i,j}$).

Le matrici nella base $\mathcal{U}$ degli omomorfismi che formano le basi date, costituiscono la base canonica di $M_n(\mathbb{Q})$. Infatti, si ha: $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\lambda_{i,j}) = \varepsilon(i,j)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\lambda'_{i,j}) = \varepsilon(i+2,j+2)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\nu_{i,j}) = \varepsilon(i+2,j)$, $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\nu'_{i,j}) = \varepsilon(i,j+2)$, per $1 \le i,j \le 2$. □

ESERCIZIO 3. *Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 12 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -10 & -7 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -6 & -4 \\ -1 & 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker\phi$, $\operatorname{im}\phi$, $\ker\psi$, $\operatorname{im}\psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.
(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.
(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

Svolgimento. (a) Si ha

$$\ker\phi = \ker\psi = \langle 2v_1 - v_2 + v_3 - 2v_4, v_1 - v_2 - v_3 + v_4 \rangle,$$
$$\operatorname{im}\phi = \langle v_1 + 3v_2 - v_4, 2v_1 - v_3 + 2v_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\psi = \langle w_1 - w_3, 2w_2 + w_3 \rangle.$$

Le equazioni cartesiane sono

$$\ker\phi : \begin{cases} X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}\phi : \begin{cases} 3X_1 - X_2 + 6X_3 = 0 \\ 3X_1 - 2X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}, \quad \operatorname{im}\psi : 2Y_1 - Y_2 + 2Y_3 = 0.$$

(b) I vettori $\psi(v_1) = w_1 - w_3$, $\psi(v_2) = 2w_2 + w_3$ sono linearmente indipendenti e possiamo aggiungere a questi w_3 per ottenere una base, $\mathcal{U}$, di W. Le applicazioni cercate[(†)] sono tutte e sole le applicazioni lineari, ξ, per cui $\xi(\psi(v_1)) = \phi(v_1)$, $\xi(\psi(v_2)) = \phi(v_2)$, mentre $\xi(w_3)$ può essere assegnato ad arbitrio. Si ha quindi

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & c \\ -1 & 2 & d \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi) = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\xi)\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} (2, -1, 2),$$

al variare di (a,b,c,d) in $\mathbb{R}^4$.

(c) I vettori $\phi(v_1) = v_1 + 3v_2 - v_4$, $\phi(v_2) = 2v_1 - v_3 + 2v_4$ sono linearmente indipendenti e possiamo aggiungere a questi v_3, v_4 per ottenere una base, $\mathcal{T}$, di V. Le applicazioni cercate sono tutte e sole le

---

[(†)] È $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$ ad essere una proiezione…

[(†)] Una condizione necessaria per l'esistenza di ξ è $\ker\psi \subseteq \ker\phi$ (perché?). Nel caso in questione i due nuclei coincidono e quindi possiamo procedere a determinare le applicazioni cercate.

applicazioni lineari, η, per cui $\eta(\phi(v_1)) = \psi(v_1)$, $\eta(\phi(v_2)) = \psi(v_2)$, mentre $\eta(v_3)$ ed $\eta(v_4)$ possono essere assegnati ad arbitrio. Si ha quindi

$$\alpha_{\mathcal{T},\mathcal{W}}(\eta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & d \\ 0 & 2 & b & e \\ -1 & 1 & c & f \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{T}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/6 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta) = \alpha_{\mathcal{T},\mathcal{W}}(\eta)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{T}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

al variare di (a, b, c, d, e, f) in $\mathbb{R}^6$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 + 9X^3 + 8$

(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, ove $u_1 = v_1 - v_2 - 2v_3$, $u_2 = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + 3v_4$, $u_3 = 2v_3 + v_4$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ 6X_1 + 2X_2 - X_3 - 3X_4 = 0 \\ 2X_1 - 4X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 - v_2 + v_4$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 & 12 \\ 2 & -7 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker \phi$, $\mathrm{im}\, \phi$, $\ker \psi$, $\mathrm{im}\, \psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 - 7X^3 - 8$

(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, ove $u_1 = 2v_2 + v_3 - v_4$, $u_2 = 3v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 2v_4$, $u_3 = -v_1 - 2v_2$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} X_1 + X_2 - 2X_3 - 2X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_2 - 2X_3 - 6X_4 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + 4X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 - v_3 + v_4$.

(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -10 & -1 & -7 & 2 \\ 12 & 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} -7 & -1 & -5 & 1 \\ -6 & 0 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker \phi$, $\mathrm{im}\, \phi$, $\ker \psi$, $\mathrm{im}\, \psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.

(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 2 dicembre 2011

Nome	Cognome	N. Matricola

D

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^6 - 9X^3 + 8$

(a) Trovare le radici di $P(X)$ nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.
(b) Trovare le fattorizzazioni di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ e in $\mathbb{C}[X]$.

ESERCIZIO 2. Sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una base dello spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$. Sia $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, ove $u_1 = -v_1 + 2v_2 + v_4$, $u_2 = 2v_1 + 2v_2 + 3v_3 - 2v_4$, $u_3 = 2v_2 + v_3$, e sia W il sottospazio di V definito dal sistema di equazioni omogenee $\begin{cases} 2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \\ 6X_1 - X_2 - 3X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 - 4X_4 = 0 \end{cases}$.

(a) Si determinino le rispettive dimensioni ed una base per i sottospazi U e W. Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 + v_3 - v_4$.
(b) Si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che si ottiene proiettando i vettori su U parallelamente a W.
(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \pi \circ \phi - \phi \circ \pi$. Si determinino le dimensioni e delle basi per nucleo ed immagine di Φ. Si tratta di una proiezione? Si fissi una base opportuna di V e si scrivano le matrici degli elementi delle basi scelte per $\ker \Phi$ ed $\mathrm{im}\, \Phi$.

ESERCIZIO 3. Siano V e W spazi vettoriali reali e siano date le rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$. Si considerino gli omomorfismi $\phi : V \to V$ e $\psi : V \to W$ di matrici

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & -1 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i sottospazi $\ker \phi$, $\mathrm{im}\, \phi$, $\ker \psi$, $\mathrm{im}\, \psi$, scrivendo esplicitamente una base ed un sistema di equazioni cartesiane (minimo) per ciascuno di essi.
(b) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi = \xi \circ \psi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$.
(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to W$ tali che $\psi = \eta \circ \phi$ e per ciascuna di esse si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\eta)$. È vero che $\eta \circ \xi = \mathrm{id}_W$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 3 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $n \geq 1$ un numero intero e si consideri la matrice*

$$K_n = \sum_{j=1}^{n} a\varepsilon(j,j) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} b\varepsilon(\left[\tfrac{n+1}{2}\right]+1-j, j) + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} c\varepsilon(n+1-j, \left[\tfrac{n}{2}\right]+j),$$

ove a, b, c sono numeri reali e, come di consueto, $[t]$ indica la parte intera del numero t (ovvero il più grande numero intero minore o uguale a t).

(a) Si scrivano esplicitamente le matrici K_1, K_2, K_3, K_4 e se ne calcolino i rispettivi determinanti.

(b) Si calcolino i determinanti di K_5 e K_6.

(c) Si determini una formula ricorsiva per il determinante $\delta_n = \det K_n$. È vero che per $n \geq 2$ ciascuno dei δ_n è funzione polinomiale di δ_2, δ_3, δ_4? In caso affermativo si dia un'espressione esplicita per tali funzioni, altrimenti si dia un controesempio.

Svolgimento. (a) Si ha

$$K_1 = (a+b+c), \qquad K_2 = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+c \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix}, \qquad K_4 = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix};$$

e quindi $\delta_1 = a+b+c$, $\delta_2 = (a+b)(a+c)$, $\delta_3 = a(a^2-b^2-c^2)$, $\delta_4 = (a^2-b^2)(a^2-c^2)$.

(b) Si ha

$$\delta_5 = \det \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} = \delta_2\delta_3 \qquad \text{e} \qquad \delta_6 = \det \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & a \end{pmatrix} = \delta_2\delta_4.$$

Nel primo caso, lo si può vedere scambiando tra loro le prime due righe e le prime due colonne e poi portando la quarta riga al secondo posto e la quarta colonna al secondo posto. Nel secondo, scambiando tra loro le prime due righe e le prime due colonne e poi portando la quinta riga al secondo posto e la quinta colonna al secondo posto.

(c) Operando in modo analogo sulle righe e le colonne (scriverlo in modo esplicito!), si può affermare che, per $n \geq 5$, si ha

$$\delta_n = \begin{cases} \delta_2\delta_{n-2} & \text{se } n \equiv 1,2 \mod 4 \\ \delta_4\delta_{n-4} & \text{se } n \equiv 3,4 \mod 4 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \delta_n = \begin{cases} \delta_2\delta_3\delta_{n-5} & \text{se } n \equiv 1 \mod 4 \\ \delta_i\delta_{n-i} & \text{se } i \in \{2,3,4\} \text{ e } n \equiv i \mod 4 \end{cases}.$$

Si può quindi dimostrare (ad esempio, per induzione su n) che

$$\delta_n = \delta_2^{1-\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right]} \delta_3^{\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]} \delta_4^{\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]-\left[\frac{n-1}{4}\right]-1}$$

per $n \geq 2$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle 2v_1 + v_2 + 4v_3 - 2v_4 + v_5, v_1 + 2v_3, v_1 - v_2 + 2v_3 + 2v_4 - v_5\rangle$ e*

$$W : \begin{cases} 2X_1 - X_2 - 2X_3 + 4X_5 = 0 \\ X_1 - X_3 + 2X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + 2X_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni e delle basi di U e W. Si verifichi che $V = U \oplus W$ e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ dell'endomorfismo $\pi : V \to V$ che proietta ogni vettore su U, parallelamente a W.*

(b) *Sia $H = \langle 2v_1 + 3v_3 + v_4, 2v_1 + v_2 - v_4\rangle$ e si determinino nucleo ed immagine di $\pi_{|H}$. Si determinino i sottospazi $U^\perp$, $W^\perp$, $H^\perp$ di V^* e si esibisca una base per ciascuno di questi sottospazi. Si dica se $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$.*

(c) *È vero che $H = \{\, u + \phi(u) \mid u \in U \,\}$ per un opportuno omomorfismo $\phi : U \to W$? In caso affermativo si scriva la matrice di ϕ nelle basi di U e W fissate al punto (a). È vero che $H^\perp = \left\{\, u^* + \psi(u^*) \;\middle|\; u^* \in U^\perp \,\right\}$ per un opportuno omomorfismo $\psi : U^\perp \to W^\perp$? Che relazioni ci sono tra ψ e ϕ^*?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti ed una sua base, $\mathcal{U}$, è data da $u_1 = v_1+2v_3$, $u_2 = v_2 - 2v_4 + v_5$. Anche le tre equazioni che definiscono W sono dipendenti ($III = 3II - I$) e tre soluzioni indipendenti del sistema formano la base $\mathcal{W}$, con $w_1 = v_1 + v_3$, $w_2 = v_4$, $w_3 = 2v_1 - v_5$.

La matrice cercata è $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\ker(\pi_{|H}) = \ker\pi \cap H = W \cap H = \langle 0\rangle$, come si verifica sostituendo una combinazione lineare dei generatori di H nelle equazioni che definiscono W. Quindi $\dim(\mathrm{im}(\pi_{|H})) = \dim H - \dim\ker(\pi_{|H}) = 2 = \dim U$ e quindi $\mathrm{im}(\pi_{|H}) = U$. Ciò significa che π induce un isomorfismo tra H ed U.

Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ la base duale di V^*. Una base di $U^\perp$ è $\{2v_1^*-v_3^*, 2v_2^*+v_4^*, v_4^*+2v_5^*\}$. Una base di $W^\perp$ è $\{v_1^*-v_3^*+2v_5^*, v_2^*\}$. Una base di $H^\perp$ è $\{3v_1^*-6v_2^*-2v_3^*, 3v_2^*-v_3^*+3v_4^*, v_5^*\}$. Infine, $H^\perp+W^\perp = (H\cap W)^\perp = V^*$, per quanto visto sopra. Applicando le relazioni di Grassmann si conclude che $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$.

(c) La proiezione, π, induce un isomorfismo tra H ed U e quindi, per ogni vettore $u \in U$ esiste un unico vettore $\phi(u) \in W$ tale che $u+\phi(u) \in H$ e questo definisce l'omomorfismo $\phi : U \to W$ ($\phi = (\mathrm{id}-\pi)\circ(\pi_{|H})^{-1}$). Si ha $u_1 + w_1 + w_2 \in H$ e $u_2 + w_2 + w_3 \in H$, quindi $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Poiché $V^* = H^\perp \oplus W^\perp$, la proiezione $\mathrm{id}-\pi^*$ induce un isomorfismo tra $U^\perp$ ed $H^\perp$; quindi, analogamente a quanto visto sopra, vi è un unico omomorfismo $\psi : U^\perp \to W^\perp$ tale che $H^\perp = \left\{\, u^* + \psi(u^*) \;\middle|\; u^* \in U^\perp \,\right\}$.

Infine, dal fatto che $V^* = U^\perp \oplus W^\perp$, si deduce che $U^\perp \cong V^*/W^\perp \cong W^*$ (esplicitare gli isomorfismi!) e, analogamente, $W^\perp \cong V^*/U^\perp \cong U^*$. Inoltre, per ogni $u \in U$ ed ogni $u^* \in U^\perp$, si ha $u + \phi(u) \in H$ e $u^* + \psi(u^*) \in H^\perp$, e quindi

$$0 = (u + \phi(u)) \circ (u^* + \psi(u^*)) = \phi(u) \circ u^* + u \circ \psi(u^*)$$

da cui si deduce che $\psi = -\phi^*$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 8 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + X^2 + 3X - 5$.

(a) *Si verifichi che* $P(1) = 0$*; si determinino le radici in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $P(X)$ *e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le fattorizzazioni in fattori irriducibili di* $P(X)$ *in* $\mathbb{R}[X]$ *ed in* $\mathbb{C}[X]$.

Svolgimento. $P(X) = (X-1)(X^2+2X+5) = (X-1)(X+1+2i)(X+1-2i)$ e lasciamo al lettore il disegno. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si considerino i vettori* $v = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ *e* $w = \begin{pmatrix} 2i+1 \\ i-2 \end{pmatrix}$ *di* $\mathbb{C}^2$.

(a) *Si determinino le dimensioni sui rispettivi campi di base, dei sottospazi* $\langle v, w\rangle_{\mathbb{C}}$ *e* $\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}}$.

(b) *Si dica se esiste un endomorfismo di* $\mathbb{C}$*–spazi vettoriali,* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$*, tale che* $\phi(v) = v$ *e* $\phi(w) = -w$*. In caso affermativo se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica* $\{e_1, e_2\}$*. Si dica se esiste un endomorfismo di* $\mathbb{R}$*–spazi vettoriali,* $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$*, tale che* $\phi(v) = v$ *e* $\phi(w) = -w$ *e* $\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$*. In caso affermativo se ne scriva la matrice rispetto alla base* $\mathcal{R} = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2\}$.

(c) *Nel caso in cui esista l'endomorfismo* ϕ *del punto precedente, si consideri l'endomorfismo* $\alpha_t = 3\mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} - t\phi$*; si calcoli* $\det\alpha_t$ *e si determini una base di* $\ker\alpha_t$*, al variare di* t *in* $\mathbb{C}$ *o in* $\mathbb{R}$ *(a seconda del caso).*

Svolgimento. (a) $w = iv$ e quindi $\langle v, w\rangle_{\mathbb{C}} = \langle v\rangle_{\mathbb{C}}$ ha dimensione 1 come $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. I due vettori sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ e quindi $\dim_{\mathbb{R}} \langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} = 2$.

(b) Poiché $w = iv$ non può esistere un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare che soddisfi alle condizioni dette. I quattro vettori

$$v_1 = v = 2e_1 - ie_1 + e_2 + 2ie_2, \quad v_2 = w = e_1 + 2ie_1 - 2e_2 + ie_2, \quad v_3 = e_2 - ie_2, \quad v_4 = e_2 + ie_2,$$

sono una base, $\mathcal{V}$, di $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale reale e quindi esiste un'unica applicazione lineare ϕ soddisfacente alle condizioni date, e si ha

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{R}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

da cui si conclude che $A = \alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(\phi) = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & -1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & -4/5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Il determinante di α_t è facile da calcolare utilizzando la base $\mathcal{V}$ ed è uguale a $9(9-t^2)$. Si ha $\ker\alpha_3 = \langle v\rangle_{\mathbb{R}}$, $\ker\alpha_{-3} = \langle w\rangle_{\mathbb{R}}$, e $\ker\alpha_t = \langle 0\rangle_{\mathbb{R}}$, per tutti gli altri valori di $t \in \mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia n un numero naturale fissato e si consideri l'applicazione $\phi_n : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, definita da $\phi(A) = -{}^tA$.*

(a) Si verifichi che, per ogni numero naturale $n \geq 1$, ϕ_n è un'applicazione lineare ed una simmetria dello spazio $M_n(\mathbb{R})$. Si determinino, al variare di n, il sottospazio unito ed il sottospazio delle direzioni di riflessione per ϕ_n e le loro dimensioni.

(b) Si calcoli $\det \phi_n$ al variare di n.

(c) Si identifichi lo spazio $M_n(\mathbb{R})$ con il suo duale tramite l'applicazione bilineare $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $g(X,Y) = \operatorname{tr}({}^tXY)$, e si verifichi che tramite tale identificazione la base canonica $\{\varepsilon(i,j) \,|\, 1 \leq i,j \leq n\}$ di $M_n(\mathbb{R})$ coincide con la base duale. Che dire della trasposta di ϕ_n?

Svolgimento. (a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ e ${}^t(cA) = c\,{}^tA$ per ogni scalare reale c. Quindi la trasposizione è un'applicazione lineare, così come lo è la moltiplicazione per lo scalare -1. Quindi ϕ_n è lineare in quanto composizione di applicazioni lineari. Inoltre $\phi_n(\phi_n(A)) = -{}^t(-{}^tA) = A$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{R})$ e quindi ϕ_n è una simmetria. $\phi_n(A) = A$ se, e solo se, ${}^tA = -A$ e quindi gli elementi uniti per ϕ_n formano il sottospazio, A_n, delle matrici antisimmetriche, di dimensione $\binom{n}{2}$. Una sua base è data dalle matrici $\varepsilon(i,j) - \varepsilon(j,i)$ per $1 \leq i < j \leq n$. Le direzioni di riflessione sono le matrici, X, per cui $\phi_n(X) = -X$, ovvero le matrici simmetriche che formano uno sottospazio, S_n, di dimensione $\binom{n+1}{2}$. Una sua base è data dalle matrici $\varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i)$ per $1 \leq i \leq j \leq n$.

(b) $M_n(\mathbb{R}) = A_n \oplus S_n$ e quindi esiste una base fatta con vettori dei due sottospazi. Utilizzando tale base si calcola facilmente $\det \phi_n = (-1)^{\binom{n+1}{2}}$ per ogni intero $n \geq 1$.

(c) Per i vettori della base canonica, si ha

$$\operatorname{tr}({}^t\varepsilon(i,j)\varepsilon(h,k)) = \operatorname{tr}(\varepsilon(j,i)\varepsilon(h,k)) = \operatorname{tr}(\delta_{ih}\varepsilon(j,k)) = \delta_{ih}\delta_{jk}$$

da cui si conclude. Date due matrici, A e B, in $M_n(\mathbb{R})$, si ha

$$g(\phi_n(A), B) = -\operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}{}^t(AB) = -\operatorname{tr}({}^tB{}^tA) = -\operatorname{tr}({}^tA{}^tB) = g(A, \phi_n(B))$$

e quindi ϕ_n coincide con la sua trasposta. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 28 febbraio 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - 11X + 20$.*

(a) *Si verifichi che $P(-4) = 0$; si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le fattorizzazioni in fattori irriducibili di $P(X)$ in $\mathbb{R}[X]$ ed in $\mathbb{C}[X]$.*

Svolgimento. $P(X) = (X+4)(X^2 - 4X + 5) = (X+4)(X-2+i)(X-2-i)$ e lasciamo al lettore il disegno. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base.*

(a) *Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ soddisfacente alle seguenti condizioni*

$$\phi(v_1 + 2v_2) = 2v_3 + 4v_4, \quad \phi(2v_3 + 4v_4) = v_1 + 2v_2, \quad \phi(v_1 - 4v_4) = 2v_3 - 2v_2,$$
$$\phi(2v_3 - 2v_2) = v_1 - 4v_4, \quad \phi(v_1) = v_1.$$

In caso positivo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si dica se $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$. In caso negativo, si dica come modificare l'immagine di $v_1 + v_2$ affinché oltre alle condizioni date, si abbia $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_V$.

(b) *Si determini la decomposizione $V = U \oplus W$ ove U è il sottospazio lasciato invariante da ϕ (asse di simmetria) e W è il sottospazio delle direzioni di simmetria per ϕ.*

(c) *Sia T uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e si consideri l'applicazione $\Phi : Hom_{\mathbb{C}}(T, V) \to Hom_{\mathbb{C}}(T, V)$ definita da $\Phi(\xi) = \phi \circ \xi$. Si mostri che Φ è una simmetria dello spazio $Hom_{\mathbb{C}}(T, V)$ e si determinino la decomposizione in somma diretta ad essa associata (direzioni unite e direzioni di simmetria) e le dimensioni dei relativi sottospazi. Si calcoli $\det(2\mathrm{id} - \Phi)$.*

Svolgimento. (a) I vettori

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_1 + 2v_2, \quad w_3 = 2v_3 + 4v_4, \quad w_4 = v_1 - 4v_4,$$

sono linearmente indipendenti e formano quindi una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, di V. Si possono quindi assegnare le immagini dei vettori della base secondo quanto scritto sopra ed ottenere un'applicazione lineare, $\phi : V \to V$. Essendo, $2v_3 - 2v_2 = -w_2 + w_3 + w_4$, si ottiene $\phi(2v_3 - 2v_2) = \phi(-w_2 + w_3 + w_4) = -(2v_3 + 4v_4) + (v_1 + 2v_2) + (2v_3 - 2v_2) = v_1 - 4v_4$ e sono soddisfatte tutte le condizioni richieste. Si ha quindi

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix},$$
$$A = PBP^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A^2 = B^2 = \mathbf{1}_4$ e quindi ϕ è una simmetria.

(b) $U = \langle v_i + \phi(v_i) \,|\, i = 1, \dots, 4 \rangle = \langle v_1, v_1 - 2v_2 - 2v_3 - 4v_4, v_3, v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 4v_4 \rangle = \langle v_1, v_3, v_2 + 2v_4 \rangle$ e $W = \langle v_i - \phi(v_i) \,|\, i = 1, \dots, 4 \rangle = \langle v_1 + 2v_2 - 2v_3 - 4v_4 \rangle$.

(c) Per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, V)$, si ha $\Phi(\Phi(\xi)) = \phi \circ (\phi \circ \xi) = \xi$ e quindi $\Phi^2 = \mathrm{id}$ e Φ è una simmetria di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, V)$. Essendo $V = U \oplus W$, si ha $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, U) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, W)$ (esplicitare l'isomorfismo!) e il sottospazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, U)$, di dimensione $3n$, è il sottospazio delle direzioni unite, mentre $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T, W)$, di dimensione n, è il sottospazio delle direzioni di simmetria. Infine, se ξ è una direzione unita, si ha $(2\mathrm{id} - \Phi)(\xi) = \xi$; mentre, se η è una direzione di simmetria, si ha $(2\mathrm{id} - \Phi)(\eta) = 3\eta$. Quindi, prendendo una base fatta di direzioni unite e di direzioni di simmetria per Φ, si calcola facilmente $\det(2\mathrm{id} - \Phi) = 3^n$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ -6 & -3 & 9 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

(a) *Si determini il rango di A e si determinino, se esistono, una matrice colonna $c \in M_{5\times 1}(\mathbb{Q})$ ed una matrice riga $r \in M_{1\times 5}(\mathbb{Q})$, tali che $A = cr$. È vero che, per ogni intero $n \geq 2$, qualsiasi matrice di rango 1 in $M_n(\mathbb{Q})$ è prodotto di una colonna per una riga? La colonna e la riga in questione, se esistono, sono univocamente determinate?*

(b) *Sia $n \geq 2$ e siano $A_1 = c_1 r_1$ ed $A_2 = c_2 r_2$ due matrici in $M_n(\mathbb{Q})$, prodotto di una colonna $0 \neq c_i \in M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$ e di una riga $0 \neq r_i \in M_{1\times n}(\mathbb{Q})$, $(i = 1, 2)$. Si descrivano nucleo ed immagine di A_1, A_2 ed $A_1 + A_2$ in relazione alle dimensioni dei sottospazi $\langle c_1, c_2\rangle$ e $\langle r_1, r_2\rangle$.*

(c) *Sia*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Q}).$$

Si determini $r = \mathrm{rk} B$. Si determinino, se esistono, r matrici di rango 1, $B_1, \dots, B_r$ tali che $B = B_1 + \cdots + B_r$. Le matrici in questione, se esistono, sono univocamente determinate (a meno dell'ordine)? Se non sono uniche, come possono variare?

Svolgimento. (a) La matrice A ha rango 1, come si può vedere facilmente applicando il procedimento di eliminazione di Gauss alle colonne. Posto $c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed $r = (2, 1, -3, -1, 3)$, si verifica con un calcolo diretto che $A = cr$.

Più in generale, se una matrice $A \in M_n(\mathbb{Q})$ ha rango 1, tutte le sue colonne $a_1, \dots, a_n$ sono multipli di una di queste, ovvero esiste una colonna $a \neq 0$ di A e degli scalari, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tali che $a_i = \alpha_i a$, per $i = 1, \dots, n$. Indicata con b la riga $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, si ha quindi $A = ab$. La colonna a è determinata a meno del prodotto per uno scalare $\rho \neq 0$ e, posto $a' = \rho a$, si ha $A = a'b'$ con $b' = (\rho^{-1} b)$.

(b) Poiché le righe e le colonne non possono essere nulle, entrambo le matrici A_1 ed A_2 hanno rango esattamente uguale ad 1 e $\mathrm{im}\, A_i = \langle c_i\rangle$, $\ker A_i = \langle r_i\rangle^\perp$, ove $\mathbb{Q}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{Q})$ e $\mathbb{Q}^{n*} = M_{1\times n}(\mathbb{Q})$.

Se $\dim\langle c_1, c_2\rangle = 2 = \dim\langle r_1, r_2\rangle$, dato un vettore $x \in \mathbb{Q}^n$, si ha $(A_1 + A_2)x = c_1(r_1 \circ x) + c_2(r_2 \circ x)$ (col tondino indichiamo la dualità canonica, ovvero il prodotto riga per colonna) e quindi $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) \subseteq \langle c_1, c_2\rangle$ ed i due sottospazi sono uguali perché, essendo r_1 ed r_2 linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}^{n*}$, esistono vettori x_1, x_2 in $\mathbb{Q}^n$, tali che $r_1 \circ x_1 = 1 = r_2 \circ x_2$ e $r_1 \circ x_2 = 0 = r_2 \circ x_1$ (perché?). D'altro canto, essendo c_1 e c_2 linearmente indipendenti in $\mathbb{Q}^n$, un vettore x appartiene al nucleo di $A_1 + A_2$ se, e solo se, $r_1 \circ x = 0 = r_2 \circ x$. Dunque, $\ker\,(A_1 + A_2) = \langle r_1, r_2\rangle^\perp$.

Se, invece $\dim\langle c_1, c_2\rangle = 1$ e $c_1 = \alpha_1 c$, $c_2 = \alpha_2 c$ per un vettore $c \in \mathbb{Q}^n$ ed α_1, α_2 in $\mathbb{Q}$, allora $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) = \langle c\rangle$ e $\ker\,(A_1 + A_2) = \langle \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2\rangle^\perp$. Analogamente, se $r_1 = \alpha_1 r$, $r_2 = \alpha_2 r$, per un vettore $r \in \mathbb{Q}^{n*}$ ed α_1, α_2 in $\mathbb{Q}$, allora $\mathrm{im}\,(A_1 + A_2) = \langle \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2\rangle$ e $\ker\,(A_1 + A_2) = \langle r\rangle^\perp$.

(c) Applicando la tecnica di eliminazione alle righe o alle colonne di B, si verifica facilmente che $\mathrm{rk} B = 2$. In particolare, se consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si ha che v_3, v_4, v_5 sono una base del nucleo di B ed i vettori v_1 e v_2 li completano ad una base di $\mathbb{Q}^5$. Infine, i vettori

$$w_1 = Bv_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = Bv_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono una base dell'immagine di B. Se consideriamo la base duale $v_1^*, \dots, v_5^*$ di ${\mathbb{Q}^5}^*$, ovvero,

$$v_1^* = (1,0,1,1,1)\,, \quad v_2^* = (0,1,1,-1,-3)\,, \quad v_3^* = (0,0,1,0,0)\,, \quad v_4^* = (0,0,0,1,0)\,, \quad v_5^* = (0,0,0,0,1)\,,$$

si ha $B = w_1 v_1^* + w_2 v_2^*$[(†)], prodotto di colonne per righe.

Possiamo modificare la scelta della base $\mathcal{V}$, prendendo come v_1, v_2 una qualsiasi altra coppia di generatori di un complementare del nucleo di B. In corrispondenza a questa coppia, sono univocamente determinati i vettori $w_1 = Bv_1$ e $w_2 = Bv_2$ ed i vettori v_1^*, v_2^*, ortogonali al nucleo di B, e tali che $v_i^* \circ v_j = \delta_{ij}$ per $1 \le i, j \le 2$. □

(†) Detta $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'applicazione lineare di matrice B rispetto alla base canonica, nelle notazioni del sesto foglio di esercizi, si potrebbe scrivere $\phi = w_1 \otimes v_1^* + w_2 \otimes v_2^* = \phi(v_1) \otimes v_1^* + \phi(v_2) \otimes v_2^*$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 giugno 2012

ESERCIZIO 1. *Si consideri il numero complesso $z_0 = 2 - i$.*

(a) Si verifichi che l'applicazione $\phi_{z_0}\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da $\phi_{z_0}(z) = z_0 z$, per ogni $z \in \mathbb{C}$, è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare e se ne scriva la matrice nella base canonica, $\mathcal{I} = \{1, i\}$. Si calcoli $\det \phi_{z_0}$.

(b) Identificando il piano di Gauss col piano euclideo, per cui la base $\mathcal{I}$ è ortonormale, si mostri che ϕ_{z_0} è composizione di una dilatazione e di una rotazione (che commutano). Si scrivano le corrispondenti matrici nella base canonica.

Svolgimento. (a) La matrice cercata è $A = \alpha_{\mathcal{I},\mathcal{I}}(\phi_{z_0}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\det \phi_{z_0} = 5 = |z_0|^2$.

(*b*) $z_0 = |z_0| e^{i \operatorname{Arg} z_0} = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + i\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Quindi $A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{Q}) \qquad e \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{Q}).$$

(a) Si determinino nucleo ed immagine delle applicazioni lineari associate alle due matrici (nelle basi canoniche di $\mathbb{Q}^3$ e $\mathbb{Q}^4$) e si scrivano delle equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi così determinati.

(b) Si determinino tutte le inverse destre, sinistre o bilatere per ciascuna delle due matrici.

(c) Sia $\Phi : M_3(\mathbb{Q}) \to M_4(\mathbb{Q})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = A_0 X B_0$ per ogni $X \in M_3(\mathbb{Q})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ indicando, in particolare le dimensioni e delle equazioni cartesiane per ciascuno di questi sottospazi (le coordinate vanno riferite alla base canonica dello spazio delle matrici).

(d) Sia S l'insieme delle applicazioni lineari $\Psi : M_4(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ tali che $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{M_3(\mathbb{Q})}$. Sia D l'insieme delle applicazioni lineari $\chi : M_4(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ tali che $\Phi \circ \chi = \mathrm{id}_{M_4(\mathbb{Q})}$. Si dimostri che S e D sono sottovarietà lineari di $\mathbb{A}(Hom_{\mathbb{Q}}(M_4(\mathbb{Q}), M_3(\mathbb{Q}))$ e se ne calcolino le dimensioni. Che relazioni ci sono con le inverse delle matrici A_0 e B_0?

Svolgimento. (a) A_0 e B_0 hanno entrambe rango 3 (si vedano, ad esempio, il minore estratto dalle prime tre righe della prima ed il minore estratto dalle ultime tre colonne della seconda). Dunque, il nucleo di A_0 è $\langle 0 \rangle$, mentre l'immagine di A_0 è l'iperpiano di equazione $X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$.

Analogamente, l'immagine di B_0 è tutto $\mathbb{Q}^3$, mentre il nucleo ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In particolare delle equazioni cartesiane sono date dal sistema lineare omogeneo di matrice B_0.

(*b*) A_0 ha solo inverse sinistre del tipo $A_1 + \begin{pmatrix} a & -a & -a & a \\ b & -b & -b & b \\ c & -c & -c & c \end{pmatrix}$, ove $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Analogamente, B_0 ha solo inverse destre del tipo $B_1 + \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, ove $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

(*c*) Φ è iniettiva, perché, se $\Phi(X) = A_0 X B_0 = 0$, moltiplicando a sinistra per A_1 ed a destra per B_1, si deduce che $X = 0$. Quindi $\operatorname{im}\Phi$ è un sottospazio di dimensione $9 = \dim_{\mathbb{Q}} M_3\mathbb{Q}$, ed una matrice $X = (X_{ij})_{1 \le i,j \le 4}$

appartiene a questo sottospazio se, e solo se, sono soddisfatte le equazioni omogenee

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} - x_{31} + x_{41} = 0 \\ x_{12} - x_{22} - x_{32} + x_{42} = 0 \\ x_{13} - x_{23} - x_{33} + x_{43} = 0 \\ x_{14} - x_{24} - x_{34} + x_{44} = 0 \\ x_{11} - x_{12} - x_{13} + x_{14} = 0 \\ x_{21} - x_{22} - x_{23} + x_{24} = 0 \\ x_{31} - x_{32} - x_{33} + x_{34} = 0 \\ x_{41} - x_{42} - x_{43} + x_{44} = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha rango 7 (si potrebbe cancellare un'equazione).

(d) Φ è iniettiva, ma non suriettiva, quindi ha solo inverse sinistre, per cui l'insieme D è la sottovarietà lineare vuota, di dimensione -1. Per quanto riguarda S, si tratta di una sottovarietà lineare passante per l'applicazione Ψ_1 ($\Psi_1(Y) = A_1 Y B_1$) e di dimensione 63. Detto K un complementare di $\operatorname{im}\Phi$ in $M_4(\mathbb{Q})$ ($\dim_{\mathbb{Q}} K = 7$), il sottospazio direttore è isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, M_3(\mathbb{Q}))$ che ha quindi la dimensione indicata sopra. Le inverse sinistre di Φ che si ottengono in modo analogo a Ψ_1, prendendo delle altre inverse in luogo di A_1 e B_1, formano una sottovarietà lineare di dimensione 6 contenuta in S. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 luglio 2012

ESERCIZIO 1. *Si identifichi il piano di Gauss con il piano euclideo reale, per cui i vettori $1, i$ formano una base ortonormale e si considerino i numeri complessi $a = 2 - i$ e $b = 2 - 3i$.*

(a) Si verifichi che l'applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definita da $z \mapsto az + b$, è un'affinità del piano euclideo. Si scriva la matrice di f nel riferimento $\mathcal{I} = \{O, 1, i\}$

(b) Si mostri che f è una similitudine del piano euclideo reale, ovvero si determini una costante reale positiva, λ tale che, per ogni coppia di numeri complessi, z_1, z_2, si abbia $\|f(z_1) - f(z_2)\| = \lambda\|z_1 - z_2\|$. È vero che esiste un'omotetia del piano euclideo reale che composta dopo f produce una rotazione? È vero che esiste un'omotetia del piano euclideo reale che composta dopo f produce una simmetria rispetto ad una retta?

Svolgimento. (a) L'applicazione è affine come applicazione complessa e quindi, a maggior ragione, come applicazione dello spazio reale. L'applicazione lineare associata è $z \mapsto az$ e la matrice di f nel riferimento $\mathcal{I}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(*b*) La decomposizione al punto precedente fa vedere che f è composizione di un'isometria diretta (rotazione) e di un'omotetia di centro l'origine e coefficiente di dilatazione $\lambda = \sqrt{5}$. Quindi composta con l'omotetia inversa produce una rotazione, ma non può mai produrre una simmetria perché le omotetie del piano hanno tutte determinante positivo così come f. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici*

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3\times 4}(\mathbb{C}). \qquad \text{e} \qquad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

(a) Si determinino nucleo ed immagine delle applicazioni lineari associate alle due matrici (nelle basi canoniche di $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C}^4$) e si scrivano delle equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi così determinati.

(b) Si determinino tutte le inverse destre, sinistre o bilatere per ciascuna delle due matrici.

(c) Sia $\Phi : M_4(\mathbb{C}) \to M_3(\mathbb{C})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = A_0XB_0$ per ogni $X \in M_4(\mathbb{C})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ indicando in particolare delle basi per ciascuno di questi sottospazi.

(d) Per ogni numero naturale n, si identifichi lo spazio vettoriale $M_n(\mathbb{C})$ col suo duale tramite l'applicazione bilineare non degenere $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,{}^tAB$. Cosa si può dire dell'applicazione trasposta di Φ? Indicata con $\varepsilon_n(ij)$ la base canonica di $M_n(\mathbb{C})$, scrivere la matrice di Φ^* nelle basi canoniche.

Svolgimento. (a) A_0 e B_0 hanno entrambe rango 3 (si vedano, ad esempio, il minore estratto dalle prime tre colonne della prima ed il minore estratto dalle ultime tre righe della seconda). Dunque, l'immagine di A_0 è $\mathbb{C}^3$, mentre il nucleo di A_0 è generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e delle equazioni cartesiane per il nucleo sono date dal sistema lineare omogeneo di matrice A_0.

Il nucleo di B_0 è $\langle 0 \rangle$, mentre l'immagine è l'iperpiano di equazione $X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$.

(*b*) A_0 ha solo inverse destre del tipo $B_1 + \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, ove $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Analogamente, B_0 ha solo inverse sinistre del tipo $A_1 + \begin{pmatrix} a & -a & -a & a \\ b & -b & -b & b \\ c & -c & -c & c \end{pmatrix}$, ove $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(*c*) Φ è suriettiva, perché, comunque si prenda $Y \in M_3(\mathbb{C})$ e si consideri la matrice $X = A_1YB_1 \in M_4(\mathbb{C})$, si ha $\Phi(X) = A_0(A_1YB_1)B_0 = (A_0A_1)Y(B_1B_0) = Y$, e quindi $Y \in \mathrm{im}\,\Phi$. Una base dell'immagine è quindi la base canonica di $M_3(\mathbb{C})$.

$\ker\Phi$ è un sottospazio di dimensione 7 di $M_4(\mathbb{C})$. Una matrice $X = (x_{ij})_{1\le i,j\le 4}$ appartiene a questo sottospazio se, e solo se, $X(\operatorname{im} B_0) \subseteq \ker A_0$; ovvero sta nel sottospazio generato dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

che non sono una base del nucleo, ma solo dei generatori (per ottenere una base basta cancellare una qualsiasi di queste matrici).

(*d*) $\Phi^* : M_3(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C})$ è iniettiva, perché $\ker\Phi^* = (\operatorname{im}\Phi)^\perp = \langle 0 \rangle$. Inoltre, $\operatorname{im}\Phi^* = (\ker\Phi)^\perp$. Infine

$$\Phi^*(\varepsilon_3(ij)) \circ \varepsilon_4(hk) = \varepsilon_3(ij) \circ \Phi(\varepsilon_4(hk)) = \operatorname{tr}(\varepsilon_3(ji)A_0\varepsilon_4(hk)B_0) = a_{ih}b_{kj}$$

che permette di calcolare la matrice di Φ^* (come?). $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Siano z_1 e z_2 le radici del polinomio $P(X) = X^2 + iX + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Si determinino modulo e argomento del numero complesso $(z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2)^3$.*

Svolgimento. $z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 = (z_1 + z_2) z_1 z_2 = -i$ e $(-i)^3 = i$. Quindi il modulo è 1 e l'argomento $\frac{\pi}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo C e sia W un suo sottospazio. È vero che, per ogni spazio vettoriale T su C, si ha*

$$Hom_C(V/W, T) \cong \ker\left(Hom_C(V, T) \xrightarrow{R} Hom_C(W, T)\right),$$

ove l'applicazione R associa ad ogni omomorfismo $f : V \to T$ la sua restrizione al sottospazio W?

[In caso affermativo dare una dimostrazione in caso negativo proporre un controesempio.]

Svolgimento. È vero, e l'identificazione (canonica) tra i due insiemi è la seguente. Grazie alla proiezione canonica $\pi : V \to V/W$, dato un omomorfismo $u : V/W \to T$, possiamo considerare l'applicazione composta $u \circ \pi$, che è un elemento del nucleo di R. Viceversa, dato un omomorfismo $f : V \to T$ che si annulli sui vettori di W, è ben definita l'applicazione (lineare) che ad ogni elemento $x+W$ di V/W associa $f(x)$. Infatti, il valore di $f(x)$ non dipende dal rappresentante scelto per $x + W$ e l'applicazione è lineare. Queste due corrispondenze sono l'una l'inversa dell'altra. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino nucleo ed immagine di ϕ ed i sottospazi $\ker\phi + \operatorname{im}\phi$ e $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi$ scrivendo esplicitamente una base per ciascun sottospazio.*

(b) *Si scrivano delle basi per i sottospazi $\ker\phi^n$ e $\operatorname{im}\phi^n$ al variare di n tra i numeri interi positivi e si dica se esistano degli interi n tali che $\ker\phi^n \oplus \operatorname{im}\phi^n$.*

(c) *Sia $\Phi : M_5(\mathbb{R}) \to M_5(\mathbb{R})$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(X) = AXA$ per ogni $X \in M_5(\mathbb{R})$. Si determinino nucleo ed immagine di Φ e le loro dimensioni, giustificando chiaramente la risposta.*

(d) *È vero che esistono due matrici rettangolari, B_0 e C_0, tali che ogni elemento di $\operatorname{im}\Phi$ si scriva come $B_0 X C_0$ al variare di X in $M_3(\mathbb{R})$? In caso affermativo, si dica come determinare tali matrici e se la corrispondenza $M_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{im}\Phi$, che manda X su $B_0 X C_0$, è un isomorfismo di spazi vettoriali?*

Svolgimento. (a) Si ha

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \ker\phi + \operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b) Si ha

$$\ker\phi^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{im}\phi^2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\0\\3\\-1\end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\ker\phi^n = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \operatorname{im}\phi^n = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{per ogni } n \geq 3.$$

In particolare, $V = \ker\phi^n \oplus \operatorname{im}\phi^n$ per ogni $n \geq 3$.

(c) Identifichiamo $M_5(\mathbb{R})$ con $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$, tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}} : \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \to M_5(\mathbb{R})$. Un'applicazione lineare $\xi : V \to V$ appartiene a $\ker\Phi$ se, e solo se, $\xi(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. Viste le dimensioni di nucleo ed immagine di ϕ, si deduce che ξ varia in un sottospazio vettoriale di dimensione 16 (i vettori di $\operatorname{im}\phi$ devono essere mandati in vettori di $\ker\phi$, mentre i vettori di un complementare di $\operatorname{im}\phi$ possono essere mandati in arbitrari vettori di V).

Un'applicazione lineare $\eta : V \to V$ appartiene a $\operatorname{im}\Phi$ se, e solo se, $\operatorname{im}\eta \subseteq \operatorname{im}\phi$ e $\ker\eta \supseteq \ker\phi$. Infatti, se indichiamo con W un complementare di $\ker\phi$ e con w_1, w_2, w_3 una sua base, i vettori $\phi(w_1), \phi(w_2), \phi(w_3)$ formano una base di $\operatorname{im}\phi$, che possiamo completare con dei vettori u_4, u_5, ad una base di V. I vettori $\eta(w_i)$, $i = 1,2,3$, appartengono ad $\operatorname{im}\phi$ e quindi esistono dei vettori x_i tali che $\eta(w_i) = \phi(x_i)$, per $i = 1,2,3$. Se consideriamo l'applicazione lineare, $\xi : V \to V$, definita da $\xi(\phi(w_i)) = x_i$, per $i = 1,2,3$, e $\xi(u_4) = \xi(u_5) = 0$, si ha $\eta = \phi \circ \xi \circ \phi$.

(d) Si ha

$$\ker\phi^\perp = \langle v_1^* + v_3^*, 3v_2^* + 2v_4^*, v_4^* + 3v_5^* \rangle \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\phi = \langle v_1 + v_3, v_4, 2v_2 + v_5 \rangle\,.$$

Consideriamo quindi le matrici

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad C_0 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0\\0&3&0&2&0\\0&0&0&1&3 \end{pmatrix}.$$

Presa una qualsiasi matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$, l'applicazione lineare $\eta : V \to V$ tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\eta) = B_0XC_0$, manda a zero i vettori di $\ker\phi$ ed ha l'immagine contenuta in $\operatorname{im}\phi$. La corrispondenza $M_3(\mathbb{R}) \to \operatorname{im}\Phi$, che manda X su B_0XC_0, è un omomorfismo di spazi vettoriali che è iniettivo, perché B_0 e C_0 hanno entrambo rango 3 e perciò B_0 è invertibile a sinistra e C_0 è invertibile a destra (spiegarsi bene questo fatto!). Quindi la corrispondenza è un isomorfismo. Dalla costruzione è chiaro come fare a determinare altre possibili matrici B_0 e C_0 che risolvano il problema dato. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ un'applicazione affine. È vero che se f assume lo stesso valore su due punti distinti allora assume lo stesso valore su tutti i punti? È vero che esiste un'applicazione affine $f : \mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ tale che $f(1+i) = 1+i$ e $f(1-i) = 3-i$? In caso affermativo, si determini l'espressione di f nel riferimento canonico di $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$.*

Svolgimento. Un'applicazione affine della retta complessa si scrive nel riferimento canonico nella forma $z \mapsto az + b$, per opportuni numeri complessi a, b. Se $z_1 \neq z_2$ e $az_1 + b = az_2 + b$, allora $a = 0$ e l'applicazione manda tutti i punti della retta complessa in b.

Per trovare l'applicazione in questione, basta risolvere il sistema lineare $\begin{cases} a(1+i) + b = 1+i \\ a(1-i) + b = 3-i \end{cases}$, che porge $a = 1+i$, $b = 1-i$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi. Data l'applicazione lineare $\phi : V \to W$ di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

si determinino delle basi per il nucleo e l'immagine di ϕ. Detto r il rango di ϕ, determinare (se esistono) r vettori $w_1, \dots, w_r$ in W ed r forme lineari $\xi_1, \dots, \xi_r$ in V^* tali che $\phi = w_1 \otimes \xi_1 + \cdots + w_r \otimes \xi_r$ e si scrivano le matrici nelle basi date delle applicazioni $w_i \otimes \xi_i$, $i = 1, \dots, r$.

Svolgimento. L'omomorfismo ϕ ha rango 2 e

$$\operatorname{im}\phi = \langle w_1 - w_3 + w_4, 2w_2 + w_3 \rangle, \qquad \ker\phi = \langle v_1 - v_2 + v_3, 3v_1 + v_3 - v_4, 2v_1 + v_3 - v_5 \rangle.$$

I vettori v_1 e v_3, generano un complementare di $\ker\phi$, perché le loro immagini tramite ϕ costituiscono la base dell'immagine scritta sopra. In particolare, $v_1 + \ker\phi$ e $v_3 + \ker\phi$ sono una base di $V/\ker\phi$ e $\ker\phi^\perp \subset V^*$ si può identificare con il duale di $V/\ker\phi$ [in che modo?]. Le forme lineari $\xi_1 = v_1^* + v_2^* + 3v_4^* + 2v_5^*$ e $\xi_2 = v_2^* + v_3^* + v_4^* + v_5^*$ sono la base di $\ker\phi^\perp$ duale della base fissata e quindi

$$\phi = \phi(v_1) \otimes \xi_1 + \phi(v_3) \otimes \xi_2 = (w_1 - w_3 + w_4) \otimes (v_1^* + v_2^* + 3v_4^* + 2v_5^*) + (2w_2 + w_3) \otimes (v_2^* + v_3^* + v_4^* + v_5^*).$$

In termini di matrici si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che è una decomposizione del tipo richiesto. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^7$ dotato della base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_7\}$, e siano fissati i sottospazi $V = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $W = \langle e_5, e_6, e_7 \rangle$.*

(a) Si determinino, se esistono, le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle condizioni

$$\phi(e_1 + e_3) = e_5 + e_6 + 2e_7, \qquad \phi(e_2 + e_4) = 3e_5 + 3e_6 + 6e_7,$$
$$\phi(e_1 + e_2 + e_3) = e_5 + 3e_6 + 7e_7, \qquad \phi(e_2 - e_3 + e_4) = 4e_5 + 2e_6 + 3e_7.$$

e se ne scriva la matrice nelle basi date. Di tali applicazioni si determinino nucleo ed immagine, scrivendo esplicitamente una base per ciascun sottospazio.

(b) Si consideri il sottoinsieme $U = \{ v + \phi(v) \in \mathbb{R}^7 \mid v \in V \}$. Si mostri che U è un sottospazio, detto il grafico dell'applicazione lineare ϕ, e si determinino la dimensione e delle equazioni cartesiane per U. Vi sono relazioni con il rango di ϕ? Si determinino delle eventuali basi per i sottospazi $U \cap V$ e $U \cap W$.

(c) Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché un sottospazio G di $\mathbb{R}^7$ sia il grafico di un'applicazione lineare $\psi : V \to W$.

(d) Sia $\mathbb{R}^{7*}$ lo spazio duale di $\mathbb{R}^7$ con la base duale $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_7^*\}$. Si determinino una base e delle equazioni cartesiane per il sottospazio $U^\perp$ e si dica che relazioni vi sono (se ve ne sono) tra questo sottospazio ed il grafico dell'applicazione trasposta $\phi^* : W^* \to V^*$.

Svolgimento. (a) I vettori $e_1 + e_3$, $e_2 + e_4$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_2 - e_3 + e_4$ sono una base di V e quindi l'applicazione lineare ϕ esiste ed è unica. Detta B la sua matrice nella basi date, si ha

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \operatorname{im}\phi = \langle 2e_5 - e_7, 2e_6 + 5e_7 \rangle , \quad \ker\phi = \langle e_1 - e_2 + 2e_3, 2e_1 + e_3 - e_4 \rangle .$$

(b) La verifica che U è sottospazio è immediata. Infatti, $0 = 0 + \phi(0) \in U$ e, dati v_1, v_2 in V ed a_1, a_2 in $\mathbb{Q}$, si ha $a_1(v_1 + \phi(v_1)) + a_2(v_2 + \phi(v_2)) = (a_1v_1 + a_2v_2) + \phi(a_1v_1 + a_2v_2) \in U$, perché ϕ è lineare.

Un vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}$ appartiene ad U se, e solo se, $\begin{cases} x_5 = 2x_1 - x_3 + 3x_4 \\ x_6 = 2x_2 + x_3 + x_4 \\ x_7 = -x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 \end{cases}$ e quindi si tratta di un sottospazio di dimensione 4 (soluzione di un sistema lineare omogeneo di rango 3 in 7 incognite). La dimensione di U coincide con la dimensione di V, indipendentemente dal rango di ϕ. In particolare, i vettori di $U \cap V$ hanno le ultime tre componenti uguali a 0 e quindi sono i vettori di $\ker\phi$, una cui base è scritta sopra; mentre $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e non c'è una base.

(c) Un sottospazio G di $\mathbb{R}^7 = V \oplus W$ è il grafico di un omomorfismo $\psi : V \to W$ se, e solo se, $\dim G = \dim V$ e $G \cap W = \langle 0 \rangle$. Sotto queste ipotesi, la restrizione a G della proiezione su V, parallelamente a W, è un'applicazione iniettiva (il suo nucleo è $G \cap W$) e quindi, per motivi di dimensione, è suriettiva su V. Quindi, per ogni vettore $x \in V$ esiste un unico vettore $x + w \in G$, con $w \in W$. L'applicazione $x \mapsto w$ è l'omomorfismo cercato e quindi le condizioni date sono sufficienti. Lasciamo al lettore la verifica che le condizioni sono anche necessarie.

(d) I vettori $e_1 + \phi(e_1), \dots, e_4 + \phi(e_4)$ sono una base di U, quindi un vettore $y_1e_1^* + \cdots + y_7e_7^*$ appartiene a $U^\perp$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano al sistema

$$\begin{cases} Y_1 + 2Y_5 - Y_7 = 0 \\ Y_2 + 2Y_6 + 5Y_7 = 0 \\ Y_3 - Y_5 + Y_6 + 3Y_7 = 0 \\ Y_4 + 3Y_5 + Y_6 + Y_7 = 0 \end{cases}$$

ed una base è data dai vettori

$$2e_1^* - e_3^* + 3e_4^* - e_5^*, \quad 2e_2^* + e_3^* + e_4^* - e_6^*, \quad -e_1^* + 5e_2^* + 3e_3^* + e_4^* - e_7^*.$$

Il sottospazio $V^\perp = \langle e_5^*, e_6^*, e_7^* \rangle$ si identifica con W^* prendendo la base data come base duale della base e_5, e_6, e_7 di W; ed analogamente si identifica $W^\perp = \langle e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^* \rangle$ con lo spazio V^*. Con queste identificazioni $U^\perp$ è il grafico di $-\phi^*$. $\square$