Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 4 maggio 2012 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{Q})$ una matrice strettamente triangolare superiore ($i \geq j \Rightarrow a_{ij} = 0$). È vero o falso che il polinomio minimo di A è uguale a X^n se, e solo se, $a_{i,i+1} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$?

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-3)^5$ e quindi vi è il solo autovalore 3, con molteplicità (algebrica) 5. Gli autovettori relativi all'autovalore 3 generano il sottospazio $\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle e_2, e_1 + e_4 \rangle$. Si ha

$$A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3\mathbf{1})^3 = \mathbf{0};$$

e il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-3)^3$.

(b) La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_5 = e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $v_4 = (\phi - 3\mathrm{id})(v_5) = 3e_2 + 4e_3 - 4e_5$, $v_3 = (\phi - 3\mathrm{id})^2(v_5) = 4e_1 - 12e_2 + 4e_4$ e, $v_2 = e_1$, $v_1 = (\phi - 3\mathrm{id})(v_2) = 2e_1 + 2e_4$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice A ha polinomio caratteristico X^n e quindi è una matrice nilpotente (Teorema di Hamilton-Cayley). Il suo polinomio minimo coincide col polinomio caratteristico se, e solo se, la sua forma di Jordan è costituita da un unico blocco (di ordine n) e ciò accade se, e solo se, il nucleo di A ha dimensione 1, ovvero se, e solo se, $\mathrm{rk}\, A = n - 1$.

Se qualcuna tra le entrate $a_{i,i+1}$ della matrice A fosse nulla, tutti i minori di ordine $n-1$ di A sarebbero nulli e quindi A dovrebbe necessariamente avere rango minore di $n-1$. Ciò permette di concludere. $\square$

ESERCIZIO 2. *Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti P, Q, R ed i vettori w_1, w_2, ove*

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino equazioni parametriche e cartesiane dei piani $\mathbb{L} = P \vee Q \vee R$ ed $\mathbb{M} = O + \langle w_1, w_2 \rangle$. Si dica quale sia la reciproca posizione dei due piani.*

(b) *Detti U e W i rispettivi sottospazi direttori di $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ si verifichi che è ben definita la simmetria, σ_1, di asse $\mathbb{L}$ e direzione W e si scriva la sua matrice nel riferimento canonico. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, σ_2, di asse $\mathbb{M}$ e direzione U.*

(c) *È vero che la composizione $\sigma_1 \circ \sigma_2$ è un'omotetia? Con quale centro e quale coefficiente di dilatazione? Date due rette sghembe, r ed s in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, ed un punto $X_0 \notin r \vee s$, esistono sempre un piano π, passante per X_0, ed un sottospazio W_0 tali che la simmetria di asse π e direzione W_0 trasformi la retta r nella retta s?*

Svolgimento. (a) I due piani (dimensione 2), hanno equazioni parametriche

$$\mathbb{L}: \begin{cases} X_1 = 2 - t_1 - 2t_2 \\ X_2 = 3t_1 + t_2 \\ X_3 = -1 + t_1 + 2t_2 \\ X_4 = 1 - t_1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M}: \begin{cases} X_1 = s_1 - s_2 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = -s_1 + 2s_2 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

e quindi equazioni cartesiane

$$\mathbb{L}: \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 + 5X_4 = 6 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M}: \begin{cases} X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}.$$

I due piani sono incidenti nel punto $P_0 = O + 7e_1 - 6e_3$, ovvero $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \{P_0\}$.

(b) Per quanto visto, i sottospazio direttori dei due piani sono complementari e quindi sono ben definite le due simmetrie. In particolare, σ_1 è quell'unica trasformazione affine per cui $\sigma_1(X) - X \in W$ e $\frac{\sigma_1(X)+X}{2} \in \mathbb{L}$ per ogni punto X di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$. L'applicazione lineare associata a σ_2 è l'opposto dell'applicazione lineare associata a σ_1 ed il piano $\mathbb{M}$ contiene l'origine. Da ciò si ricava

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 4 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) La composizione tra le due simmetrie (in qualunque ordine) lascia invariato il punto $P_0 = \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e trasforma ogni vettore di $\mathbb{R}^4$ nel suo opposto. Quindi si tratta dell'omotetia di centro P_0 e coefficiente -1.

Siano $r = P_1 + \langle v_1 \rangle$ ed $s = P_2 + \langle v_2 \rangle$, e poniamo $M = \frac{P_1+P_2}{2}$, $v_3 = P_2 - P_1$, $v_4 = X_0 - M$. Le ipotesi date ci garantiscono che $\mathscr{V} = (M, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ è un riferimento nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$. L'applicazione affine f di matrice

$$\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è la simmetria cercata, ovvero la simmetria di asse $\pi = M + \langle v_1 + v_2, v_4 \rangle$ e direzione $W_0 = \langle v_1 - v_2, v_3 \rangle$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 maggio 2012

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Sia $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{Q})$ una matrice strettamente triangolare inferiore ($i \le j \Rightarrow a_{ij} = 0$). È vero o falso che il polinomio minimo di A è uguale a X^n se, e solo se, $a_{i+1,i} \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-1$?

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti P, Q, R ed i vettori w_1, w_2, ove

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino equazioni parametriche e cartesiane dei piani $\mathbb{L} = P \vee Q \vee R$ ed $\mathbb{M} = O + \langle w_1, w_2 \rangle$. Si dica quale sia la reciproca posizione dei due piani.

(b) Detti U e W i rispettivi sottospazi direttori di $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ si verifichi che è ben definita la simmetria, σ_1, di asse $\mathbb{L}$ e direzione W e si scriva la sua matrice nel riferimento canonico. Si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, σ_2, di asse $\mathbb{M}$ e direzione U.

(c) È vero che la composizione $\sigma_2 \circ \sigma_1$ è un'omotetia? Con quale centro e quale coefficiente di dilatazione? Date due rette sghembe, r ed s in $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$, ed un punto $X_0 \notin r \vee s$, esistono sempre un piano π, passante per X_0, ed un sottospazio W_0 tali che la simmetria di asse π e direzione W_0 trasformi la retta r nella retta s?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 19 giugno 2012 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo E^3 si considerino i piani di equazioni $\pi_1 : 2X - Y + Z = 3$ e $\pi_2 : Y + Z = 2$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$.*

(a) Sia σ_1 la riflessione rispetto al piano π_1 e si scriva la matrice nel riferimento canonico dell'isometria che si ottiene applicando la traslazione τ di vettore $3e_1$, dopo la riflessione σ_1.

(b) Si decomponga l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ nella composizione di una riflessione con una traslazione parallela al piano di riflessione. Detta σ_2 la riflessione di piano π_2, si scriva la matrice dell'isometria $f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1$ e la si classifichi secondo Eulero indicando quali siano le sottovarietà lineari unite per questa trasformazione.

(c) Si determinino il punto P_1 di π_1 ed il punto P_2 di π_2 a distanza minima dall'origine. Si determinino la distanza e l'angolo formati dalla retta $P_1 \vee P_2$ con le rette unite per l'isometria f.

Svolgimento. (a) La matrice è $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau \circ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(*b*) Il vettore $t_0 = 5e_1 - e_2 + e_3$ è la somma di $t' = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3$ perpendicolare al piano π_1 e di $t_1 = e_1 + e_2 - e_3$ parallelo al piano. Quindi l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ è la glissoriflessione che si ottiene componendo la simmetria, σ, rispetto al piano $\pi : 2X - Y + Z - 6 = 0$ (parallelo a π_1 e passante per $O + t'/2$) con la traslazione, τ_1, di vettore t_1. Ovvero $\tau \circ \sigma_1 = \tau_1 \circ \sigma = \sigma \circ \tau_1$.

La riflessione σ_2 rispetto al piano π_2, lascia invariante il vettore t_1 che è parallelo a π e a π_2. Quindi

$$f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma$$

è una roto-traslazione, composta da una rotazione di asse la retta $\pi \cap \pi_2$ e della traslazione τ_1. In particolare

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2 & 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2 & -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 3 & -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

e quindi è la rotazione di un angolo piatto (seguita dalla traslazione τ_1).

(*c*) $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi $P_1 \vee P_2 = P_2 + \langle 2e_1 - 3e_2 - e_3 \rangle$. La retta unita per f è l'asse di rotazione, $h = \pi \cap \pi_2 = P_3 + \langle e_1 + e_2 - e_3 \rangle$, ove $P_3 = O + 4e_1 + 2e_2$. La distanza tra le due rette è $d = 2\sqrt{\frac{6}{7}}$ e l'angolo tra le due rette è $\frac{\pi}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} 2X_2 + X_3 = -4 \\ X_1 - 2X_4 = -3 \end{cases}.$$

(a) Si determini un sistema di equazioni cartesiane per la retta $r = P_1 \vee P_2$. Si determinino la posizione reciproca, la distanza e i punti di minima distanza tra la retta r ed il piano π. Detto Q il punto di π a minima distanza da r, si determini l'area del triangolo P_1P_2Q.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane ed una rappresentazione parametrica della proiezione ortogonale della retta r su π. In uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 4$, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è sempre una retta? Si dia una dimostrazione di questo fatto o si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la proiezione sia una retta.

(c) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^4$ che inducono lo stesso orientamento. È vero o falso che $v_1 + 3w_1, \dots, v_4 + 3w_4$ è una base di $\mathbb{R}^4$, concorde con le basi date?

Svolgimento. (*a*) I punti della retta r sono le soluzioni del sistema lineare $\begin{cases} 2X_1 + X_4 = 2 \\ 2X_2 + X_4 = 0 \\ X_3 - X_4 = -2 \end{cases}$.

Si considerino i vettori, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il punto $P_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta r è parallela al vettore $v_1 = P_1 - P_2$ ed il sottospazio direttore di π è $W = \langle v_2, v_3 \rangle$. P_3 è un punto di π e v_4 è un vettore ortogonale ad entrambe le sottovarietà lineari ($\langle v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\perp$). Quindi la distanza tra r e π è la lunghezza della proiezione ortogonale di $P_1 - P_3$ lungo v_4, ovvero $\frac{|(P_1 - P_3) \cdot v_4|}{\|v_4\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Si ha $P_1 - P_3 = \frac{4}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 + \frac{8}{5}v_3 + \frac{2}{5}v_4$ e quindi

$$P = P_1 - \frac{4}{5}v_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -4/5 \\ -2/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \in r \qquad \text{e} \qquad Q = P_3 + \frac{2}{5}v_2 + \frac{8}{5}v_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -8/5 \\ -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} \in \pi$$

sono i punti di minima distanza ($P - Q \in \langle v_4 \rangle$). L'altezza del triangolo relativa al lato P_1, P_2 è uguale alla distanza di π da r quindi l'area cercata è uguale $\frac{1}{2}\|P_1 - P_2\|\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

(*b*) Sia $W = \langle v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio direttore di π. La proiezione ortogonale di r sul piano π si ottiene intersecando la sottovarietà lineare $H = P_1 + \langle v_1 \rangle + W^\perp$ con il piano π, ed ha equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} 2X_1 + X_4 = 2 \\ 2X_2 + X_3 = -4 \\ X_1 - 2X_4 = -3 \end{cases} \qquad \text{e rappresentazione parametrica } s = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -8/5 \\ -4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Quindi s è la sottovarietà lineare passante per Q (proiezione ortogonale di $P \in r$) e parallela al sottospazio $\langle w \rangle$ (proiezione ortogonale di $\langle v_1 \rangle$ su W).

In generale, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è una retta se, e solo se, il sottospazio direttore della retta non è contenuto nell'ortogonale del sottospazio direttore del piano.

(*c*) Sia $R = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ la matrice di cambiamento di base che, per le ipotesi fatte, appartiene al gruppo ortogonale speciale SO_4, perché abbiamo due basi ortonormali concordi di $\mathbb{R}^4$. Quindi, la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $v_1 + 3w_1, \dots, v_4 + 3w_4$ rispetto alla base $\mathcal{V}$, è la matrice $\mathbf{1}_4 + 3R$. Dato un vettore v, si ha $(\mathbf{1}_4 + 3R)v = 0$ se, e solo se, $Rv = -\frac{1}{3}v$ che è possibile solo se $v = 0$, perché $\|Rv\| = \|v\|$ per ogni vettore di $\mathbb{R}^4$. Quindi $\mathbf{1}_4 + 3R$ è una matrice invertibile e perciò le sue colonne sono una base di $\mathbb{R}^4$. Per vedere che è concorde con l'orientamento, possiamo ragionare così. La matrice R è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (Teorema Spettrale per operatori normali) e un autovettore v_0 per R, relativo all'autovalore a, è un autovettore per $\mathbf{1}_4 + 3R$ relativo all'autovalore $1 + 3a$. Quindi gli autovalori di $\mathbf{1}_4 + 3R$ sono tutti del tipo $1+3a$, al variare di a tra gli autovalori di R. Poiché R è ortogonale, i suoi autovalori sono numeri complessi di modulo 1 e, se compare l'autovalore -1, deve comparire con molteplicità pari, $2k$, perché $\det R = 1$ e quindi nel determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ compare il fattore $(1 - 3)^{2k} = 4^k > 0$. Inoltre, se compare tra gli autovalori di R il numero complesso a, compare anche il suo coniugato $\overline{a}$ e quindi nel determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ compare il fattore $(1 + 3a)(1 + 3\overline{a}) = |1 + 3a|^2$ che è un numero reale positivo. Quindi, il determinante di $\mathbf{1}_4 + 3R$ è prodotto di numeri reali positivi e quindi la base è concorde con la base $\mathcal{V}$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova scritta del 19 giugno 2012 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo E^3 si considerino i piani di equazioni $\pi_1 : X + 2Y - Z = 3$ e $\pi_2 : X + Z = 2$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3)$.

(a) Sia σ_1 la riflessione rispetto al piano π_1 e si scriva la matrice nel riferimento canonico dell'isometria che si ottiene applicando la traslazione τ di vettore $3e_2$, dopo la riflessione σ_1.

(b) Si decomponga l'isometria $\tau \circ \sigma_1$ nella composizione di una riflessione con una traslazione parallela al piano di riflessione. Detta σ_2 la riflessione di piano π_2, si scriva la matrice dell'isometria $f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1$ e la si classifichi secondo Eulero indicando quali siano le sottovarietà lineari unite per questa trasformazione.

(c) Si determinino il punto P_1 di π_1 ed il punto P_2 di π_2 a distanza minima dall'origine. Si determinino la distanza e l'angolo formati dalla retta $P_1 \vee P_2$ con le rette unite per l'isometria f.

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_4\})$, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ed il piano } \pi : \begin{cases} 2X_3 + X_4 = -4 \\ 2X_1 - X_2 = 3 \end{cases}.$$

(a) Si determini un sistema di equazioni cartesiane per la retta $r = P_1 \vee P_2$. Si determinino la posizione reciproca, la distanza e i punti di minima distanza tra la retta r ed il piano π. Detto Q il punto di π a minima distanza da r, si determini l'area del triangolo $P_1 P_2 Q$.

(b) Si determinino le equazioni cartesiane ed una rappresentazione parametrica della proiezione ortogonale della retta r su π. In uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 4$, dati una retta ed un piano sghembi, la proiezione ortogonale della retta sul piano è sempre una retta? Si dia una dimostrazione di questo fatto o si enunci e si dimostri una condizione necessaria e sufficiente affinché la proiezione sia una retta.

(c) Siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ due basi ortonormali di $\mathbb{R}^4$ che inducono lo stesso orientamento. È vero o falso che $v_1 + 2w_1, \dots, v_4 + 2w_4$ è una base di $\mathbb{R}^4$, concorde con le basi date?

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 giugno 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+2)^5$ e quindi vi è l'unico autovalore -2, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi+2) = \langle e_1 + e_3, 5e_1 - e_2 - e_5 \rangle$. Si ha

$$A+2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+2)^3 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X+2)^3$.

(b) Si ha quindi $\mathrm{rk}(\phi+2) = 3$ e $\mathrm{rk}(\phi+2)^2 = 1$, per cui la matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_3 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -2 e si pone $v_2 = (\phi+2)(v_3) = 3e_3$ e $v_1 = (\phi+2)^2(v_3) = -3e_1 - 3e_3$. Il vettore $v_5 = 5e_4 + e_5$, appartiene a $\ker(\phi+2)^2$, ma non al sottospazio $\langle v_2 \rangle \oplus \ker(\phi+2)$. Aggiungendo il vettore $v_4 = (\phi+2)(v_5) = 5e_1 + 3e_2 + 20e_3 + 3e_5$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e $\phi : V \to V$ un endomorfismo per cui il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico. È vero che esiste un vettore $v \in V$ tale che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ è una base di V? Come fare per trovarlo?* [**sugg.** ...pensare al Lemma di Decomposizione.]

Svolgimento. Sia $p_\phi(X) = \lambda_\phi(X) = (X-a_1)^{c_1} \cdots (X-a_r)^{c_r}$ il polinomio minimo di ϕ con le radici, $a_1, \dots, a_r$, a due a due distinte. Per il Lemma di Decomposizione, posto $W_i = \ker(\phi - a_i)^{c_i}$, per $i = 1, \dots, r$, si ha $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$. In ogni sottospazio W_i, $i = 1, \dots, r$, esiste un autovettore generalizzato, w_i, di periodo esattamente c_i e poniamo $v = w_1 + \cdots + w_r$. Se $P(X)$ è un polinomio tale che $P(\phi)(v) = 0$, deve annullarsi la componente $P(\phi)(w_i)$ per ogni $i = 1, \dots, r$ (spiegarsi bene questo fatto!). Deve quindi aversi $(X - a_i)^{c_i} \mid P(X)$ per $i = 1, \dots, r$, e il grado di $P(X)$ deve essere maggiore o uguale della somma dei c_i, ovvero della dimensione di V. Ne consegue che $v, \phi(v), \dots, \phi^{n-1}(v)$ sono linearmente indipendenti e quindi una base di V. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \sqrt{3}x + y - z - 3 = 0 \\ 3x - y - \sqrt{3}z + 4 + \sqrt{3} = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza, $P_0 \in r$ e $Q_0 \in s$. Presi, un punto $P_1 \in r$ a distanza 1 da P_0 e un punto $Q_1 \in s$ a distanza 1 da Q_0, si calcoli il volume (non orientato) del tetraedro di vertici $P_0P_1Q_0Q_1$.

(b) *Si determini un piano, π, passante per P_0, e parallelo al vettore $P_0 - Q_0$ e a una direzione bisettrice tra la direzione di r e la direzione di s. Si scriva la matrice della riflessione (ortogonale) rispetto a π.*

(c) *Esiste una rotazione di un angolo piatto (ampiezza π) attorno ad un opportuna retta che porti r su s? In caso affermativo si determini l'asse di rotazione e la matrice della rotazione nel riferimento canonico. In caso negativo si spieghi perché non può esistere. Si discuta lo stesso problema per due generiche rette sghembe.*

Svolgimento. (a) La retta r passa per $P = O + e_3$ ed è parallela al vettore e_1. La retta s passa per $Q = O + 4e_2 + e_3$ ed è parallela al vettore $w = e_1 + \sqrt{3}e_3$. La distanza tra le due rette è $d = \frac{|(Q-P)\cdot e_1 \times w}{\|e_1 \times w\|} = 4$ e l'angolo, ϑ, è determinato dalla condizione $\cos\vartheta = \frac{|e_1 \cdot w|}{\|e_1\|\|w\|} = \frac{1}{2}$ ($\vartheta = \frac{\pi}{3}$). I punti di minima distanza sono proprio $P_0 = P$ e $Q_0 = Q$, per cui possiamo prendere $P_1 = P + e_1$ e $Q_1 = Q + \frac{1}{2}w$ ed il volume cercato è uguale a

$$\tfrac{1}{6}vol^3\,(P_1 - P_0, Q_0 - P_0, Q_1 - P_0) = \tfrac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}.$$

(b) Le direzioni bisettrici tra r ed s sono in corrispondenza con i due sottospazi $\langle e_1 + \frac{1}{2}w \rangle$ e $\langle e_1 - \frac{1}{2}w \rangle$. Scegliamo la prima e consideriamo quindi il piano $\pi = P_0 + \langle Q_0 - P_0, e_1 + \frac{1}{2}w \rangle = P_0 + \langle e_2, \sqrt{3}e_1 + e_3 \rangle$, di equazione $\pi : X - \sqrt{3}Z = -\sqrt{3}$ ($X + \sqrt{3}Z = \sqrt{3}$ nell'altro caso). La riflessione ha quindi matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

rispetto al riferimento canonico.

(c) Consideriamo la retta parallela alla direzione bisettrice tra r ed s e passante per il punto medio tra P_0 e Q_0, $M = \frac{P_0 + Q_0}{2} = O + 2e_2 + e_3$. Ovvero la retta $M + \langle \sqrt{3}e_1 + e_3 \rangle$. La rotazione di angolo π rispetto a questa retta ha matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t/2 \\ 4 \\ 1+\sqrt{3}t/2 \end{pmatrix}.$$

Ovvero, tutti i punti della retta r vengono mandati sui punti della retta s. La costruzione si può ripetere per due generiche rette sghembe, fissando opportunamente il sistema di riferimento (. . . come?). □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 luglio 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+3)^2$ e quindi vi sono due autovalori, 2 e -3, rispettivamente con molteplicità (algebrica) 3 e 2 e nullità 2 e 1. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 + e_3, e_4 + e_5 \rangle$ e $\ker(\phi + 3) = \langle 2e_1 + 7e_3 \rangle$. Si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -7 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -35 & -10 & 35 & -19 & 19 \\ 0 & 30 & 0 & 15 & -15 \\ 0 & -20 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix}, \quad A + 3 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-2)^2(X+3)^2$.

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha un blocco di ordine 1 ed uno di ordine 2, relativi all'autovalore 2 e un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore -3. Il vettore $v_3 = 5e_2 - 4e_3 + 10e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 2 e si pone $v_2 = (\phi-2)(v_3) = 18e_1 + 18e_3$ e $v_1 = e_4 + e_5$. Il vettore $v_5 = e_1 - e_3 + 3e_4 - 2e_5$, appartiene a $\operatorname{im}(\phi-2)^2$, ma non a $\ker(\phi+3)$. Aggiungendo il vettore $v_4 = (\phi+3)(v_5) = 4e_1 + 14e_3$, si ottiene la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 18 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -4 & 14 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}^n$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p_\phi(X) = (X-1)^n$. È vero o falso che ϕ è invertibile e simile al proprio inverso?*

Svolgimento. $\det \phi = (-1)^n p_\phi(0) = 1 \neq 0$ e quindi ϕ è invertibile. Inoltre, ϕ ha tutti gli autovalori uguali ad 1 e quindi $\phi = \mathrm{id} + \nu$ con $\nu = \phi - \mathrm{id}$ nilpotente, di ordine $k \geq 1$. Allora $\phi^{-1} = \mathrm{id} - \nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1}$ e i due endomorfismi hanno gli stessi autovalori, essendo $\mu = -\nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1}$ nilpotente. Si ha $\ker \nu^j \subseteq \ker \mu^j$ per $j = 1, \dots, k$ e $\mathbb{Q}^n = \ker \nu^k = \ker \mu^k$. Ricordando che ν ha periodo k, si ha che $\mu^{k-1} = (-\nu)^{k-1}$ e quindi anche $\ker \nu^{k-1} = \ker \mu^{k-1}$. Supponiamo quindi di avere $\ker \nu^j \subseteq \ker \mu^j$ e $\ker \nu^h = \ker \mu^h$ per ogni $h > j$. Se $v \in \ker \mu^j$, deve aversi

$$0 = \mu^j(v) = (-\nu + \nu^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\nu^{k-1})^j(v) = (-\nu)^j(v)$$

perché $\ker \nu^h = \ker \mu^h \supseteq \ker \mu^j$ per ogni $h > j$. Quindi le filtrazioni dei nuclei coincidono ad ogni grado e perciò i due endomorfismi hanno la stessa matrice di Jordan. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r, s e t, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + y - z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x + y - 3z - 4 = 0 \\ 2x + 2y - z - 8 = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino la distanza e l'angolo tra le rette, prese a due a due e si determinino le coppie di punti di minima distanza. Se esistono tre punti, $R \in r$, $S \in s$, $T \in t$, tali che le coppie tra questi siano tutte di minima distanza, si calcoli l'area del triangolo RST.

(b) Si determini, se esiste, una rotazione, ρ, che porti r su s ed s su t e se ne scriva la matrice nel riferimento canonico. In caso affermativo, si scrivano le equazioni dell'immagine di t tramite ρ.

(c) Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione, σ, rispetto al piano $\pi : x + z = 1 + \sqrt{2}$. Se esiste l'applicazione ρ del punto precedente, si determinino la matrice e l'asse della rotoriflessione $\sigma \circ \rho$. In caso contrario si classifichi l'isometria che si ottiene componendo σ, dopo la riflessione nel punto $X_0 = O + e_1 + e_2 + \sqrt{2}e_3$. In ogni caso si indichino le sottovarietà lineari che restano unite.

Svolgimento. (a) Le tre rette sono parallele al vettore $v = e_1 - e_2$ e passano per i punti $R_0 = O + 2\sqrt{2}e_3$, $S_0 = O + 2\sqrt{2}(e_1 + e_2 + e_3)$ e $T_0 = O + 2e_1 + 2e_2$, che sono, a due a due, coppie di minima distanza perché appartengono tutti al piano $\pi = x - y = 0$ che è perpendicolare alle tre rette. Quindi le coppie di minima distanza si ottengono traslando con uno stesso multiplo di v coppie di questi punti. Inoltre, le distanze tra le tre rette sono

$$d(r, s) = \|R_0 - S_0\| = 4, \qquad d(r, t) = \|R_0 - T_0\| = 4, \qquad d(s, t) = \|S_0 - T_0\| = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

L'area del triangolo $R_0S_0T_0$ è uguale a $4\sqrt{2}$.

(b) Una rotazione che mandi la retta r su una retta ad essa parallela, deve avere asse parallelo ad r e quindi lasciare invarianti i piani ad essa ortogonali. Perciò dovrebbe mandare R_0 su S_0 ed S_0 su T_0. Una tale rotazione non può esistere, perché la distanza tra R_0 ed S_0 sarebbe diversa dalle distanze tra le immagini.

(c) La riflessione, σ, rispetto al piano π e la riflessione, τ, rispetto al punto X_0 hanno matrici

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1+\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad \text{e} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}-1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tratta quindi della rotazione di angolo π attorno all'asse

$$h : \begin{cases} x - z = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}; \qquad \text{ovvero } h = O + (1 - \sqrt{2})e_1 + e_2 + \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

L'asse h è una retta di punti uniti. Sono uniti tutti i piani del fascio di asse h e del fascio di piani perpendicolari ad h. Infine sono unite tutte le rette perpendicolari ad h e passanti per un punto di h (le rette perpendicolari ad h nel fascio di piani di asse h). $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-3)^5$ e quindi vi è l'unico autovalore, 3, con molteplicità (algebrica) 5. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 3) = \langle e_1, e_5 \rangle$. Si ha

$$A - 3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-3)^4 = \mathbf{0}_5.$$

dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-3)^4$.

(b) la matrice di Jordan di ϕ ha quindi un blocco di ordine 4 ed uno di ordine 1. Il vettore $v_4 = e_4$ è un autovettore generalizzato di periodo 4 per l'autovalore 3 e si pone $v_3 = (\phi-3)(v_4) = -e_2 - e_3 - 2e_5$, $v_2 = (\phi-3)^2(v_4) = -2e_3 - e_5$ e $v_1 = (\phi-3)^3(v_4) = 2e_1 - 2e_5$. Il vettore $v_5 = e_5$, appartiene a $\ker(\phi-3)$ e completa i vettori dati ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Si consideri l'endomorfismo $R_\phi : \mathrm{Hom}_C(V,V) \to \mathrm{Hom}_C(V,V)$ che manda $\eta : V \to V$ su $\eta \circ \phi$.*

(a) Si dimostri che ϕ ed R_ϕ hanno gli stessi autovalori e lo stesso polinomio minimo.
(b) Si dimostri che ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, lo è R_ϕ. Cosa dire degli spazi di autovettori e del polinomio caratteristico di ϕ ed R_ϕ?

Svolgimento. (a) Sia a un autovalore per R_ϕ e sia $\eta \in \mathrm{Hom}_C(V,V)$ un autovettore relativo ad a. Allora, per ogni vettore $v \in V$, si ha $\eta(\phi(v)) = a\eta(v) = \eta(av)$ e quindi $\eta(\phi(v) - av) = 0$. Ciò significa che $\mathrm{im}(\phi - a) \subseteq \ker\eta$ è un sottospazio diverso da V ($\eta \neq 0$) e quindi $\ker(\phi - a)$ deve avere dimensione positiva; ovvero a è un autovalore per ϕ. D'altra parte, sia a un autovalore per ϕ ed $\eta : V \to V$ un'applicazione lineare, non-nulla, che si annulli su tutti i vettori del sottospazio $\mathrm{im}(\phi - a)$ [spiegarsi bene perché esiste!]. Per ogni vettore v di V, si ha $\eta(\phi(v) - av) = 0$, ovvero $\eta(\phi(v)) = \eta(av) = a\eta(v)$ e quindi $R_\phi(\eta) = a\eta$.

È immediato verificare che $P(R_\phi) = R_{P(\phi)}$ per ogni polinomio $P(X) \in C[X]$, e che, dato un endomorfismo ψ, $R_\psi = 0$ se, e solo se, $\psi = 0$ [verificare i necessari dettagli!]. Da ciò si conclude che $P(R_\phi) = 0$ se, e solo se, $P(\phi) = 0$ e quindi che i due polinomi minimi coincidono.

(b) L'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile se, e solo se, il suo polinomio minimo è prodotto di fattori lineari distinti in $C[X]$. Poiché il polinomio minimo di ϕ coincide con quello di R_ϕ, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile.

Sia a un autovalore di ϕ. Abbiamo visto nel punto precedente che gli autovettori di R_ϕ relativi all'autovalore a, sono le applicazioni lineari $\eta : V \to V$ che si annullano su $\mathrm{im}(\phi - a)$. Indicato con W_a

un complementare di $\mathrm{im}(\phi-a)$ in $V = W_a \oplus \mathrm{im}(\phi-a)$, si ha che le $\eta : V \to V$, che si annullano su $\mathrm{im}(\phi-a)$, sono in corrispondenza biunivoca con gli elementi di $\mathrm{Hom}_C(W_a, V)^{(\dagger)}$. Ora,

$$\dim W_a = \dim V - \dim \mathrm{im}(\phi - a) = \dim \ker(\phi - a) = \mathrm{null}_\phi(a).$$

Quindi, la nullità (molteplicità geometrica) di a per R_ϕ è uguale a

$$\dim \mathrm{Hom}_C(W_a, V) = (\dim W_a)(\dim V) = (\mathrm{null}_\phi(a))(\dim V).$$

In particolare, se ϕ è diagonalizzabile, ciò significa che la molteplicità di a per per R_ϕ è uguale a $n\mathrm{molt}_\phi(a)$, ove $n = \dim V$. Si conclude che $P_{R_\phi}(X) = P_\phi(X)^n$. Nel caso in cui ϕ non sia diagonalizzabile, si può ragionare in modo analogo dimostrando che gli autovettori generalizzati in $\ker(R_\phi - a)^k$ sono gli endomorfismi nel nucleo di $R_{(\phi-a)^k}$ ovvero gli endomorfismi che si annullano su $\mathrm{im}(\phi - a)^k$. Dalle dimensioni dei sottospazi di autovettori generalizzati si può dedurre la molteplicità di un autovalore e quindi il polinomio caratteristico di R_ϕ è, in ogni caso, uguale a $P_\phi(X)^{\dim V}$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo, $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico, $\mathscr{R} = (O, \{e_1, \dots, e_3\})$, si considerino le rette r ed s, di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino la distanza e l'angolo tra le due rette ed i punti di minima distanza.
(b) Si dimostri che, ruotando la retta s attorno alla retta r di un qualsiasi angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, si ottiene una retta sghemba con s.

Svolgimento. (a) La retta r passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. La retta s passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore differenza tra un generico punto di s ed un generico punto di r è $u = P - Q - t_2 w + t_1 v = \begin{pmatrix} 1+t_1-t_2 \\ -1+t_1-2t_2 \\ -t_1-t_2 \end{pmatrix}$, che è ortogonale ad entrambe le rette se, e solo se, $u \cdot v = 0 = u \cdot w$, ovvero se, e solo se, $\begin{cases} 3t_1 - 2t_2 = 0 \\ 2t_1 - 6t_2 = 1 \end{cases}$, che è equivalente a $\begin{cases} t_1 = -\frac{1}{7} \\ t_2 = -\frac{3}{14} \end{cases}$. Dunque i punti di minima distanza tra le due rette sono $P_0 = P - \frac{1}{7} v = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -1/7 \\ 1/7 \end{pmatrix}$ e $Q_0 = Q - \frac{3}{14} w = \begin{pmatrix} -3/14 \\ 8/14 \\ -3/14 \end{pmatrix}$ e la distanza tra le due rette è $d = \|Q_0 - P_0\| = \frac{5\sqrt{14}}{14}$. Il coseno dell'angolo tra le due rette è $\frac{|v \cdot w|}{\|v\|\|w\|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(b) Possiamo supporre di fissare un sistema di riferimento ortonormale con l'origine nel punto P_0, la retta r come asse Z e la retta $P_0 + \langle Q_0 - P_0 \rangle$ come asse X. Allora la retta s ha equazione parametrica $s : \begin{cases} X = d \\ Y = s_0 t \\ Z = c_0 t \end{cases}$, ove t varia in $\mathbb{R}$, $c_0^2 + s_0^2 = 1$ e c_0 è il coseno dell'angolo tra r ed s. Fissato un angolo ϑ la rotazione di asse r ed angolo ϑ, ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{ove } c = \cos\vartheta,\ s = \sin\vartheta.$$

La retta s viene trasformata nella retta di equazioni parametriche $s' : \begin{cases} X = cd - ss_0 t \\ Y = sd + cs_0 t \\ Z = c_0 t \end{cases}$. Perché le due rette siano parallele, dovrebbe aversi $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ s_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -ss_0 \\ cs_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \right\rangle$, che è possibile solo se $c = 1$, $s = 0$, ovvero $\vartheta \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(†) Per i puristi, sarebbe preferibile scrivere $\mathrm{Hom}_C(V/\mathrm{im}(\phi - a), V)$ in luogo di $\mathrm{Hom}_C(W_a, V)$, considerando superflua la scelta di un complementare per $\mathrm{im}(\phi - a)$. Resta però un'opinione diffusa che, per gli spazi vettoriali, sia preferibile utilizzare i complementari in luogo dei quozienti ogni volta sia possibile (sic!). Forse qualcuno preferirebbe anche scrivere $\mathrm{coker}(\phi - a)$ per indicare il quoziente $V/\mathrm{im}(\phi - a)$.

Affinché le due rette siano incidenti deve aver soluzione il sistema lineare

$$\begin{cases} d = cd - ss_0t_2 \\ s_0t_1 = sd + cs_0t_2 \\ c_0t_1 = c_0t_2 \end{cases}$$

da cui si deduce di nuovo $c = 1$.

Si potevano evitare i calcoli osservando che, se una retta fosse parallela alla sua ruotata allora la sua direzione sarebbe un autovettore per l'applicazione lineare associata all'isometria e quindi dovrebbe essere parallela all'asse di rotazione. D'altra parte, se una retta e la sua ruotata si intersecassero in un punto, P; preso il piano per P ortogonale all'asse di rotazione, tale punto dovrebbe essere un punto unito e quindi appartenere all'asse di rotazione. Entrambe le condizioni sono escluse nelle nostre ipotesi. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 settembre 2012

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Si determini, se esiste, un vettore w, per cui i vettori

$$w_1 = w, \quad w_2 = \phi(w), \quad w_3 = \phi^2(w), \quad w_4 = \phi^3(w), \quad w_5 = \phi^4(w)$$

formino una base, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ (giustificando la scelta). Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^3(X-1)^2$ e quindi vi sono i due autovalori, 1 e -1, con molteplicità (algebrica) 2 e 3, rispettivamente. I relativi sottospazi di autovettori sono $\ker(\phi - 1) = \langle 3e_1 + 2e_3 \rangle$ e $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 + e_3 \rangle$. Necessariemente, il polinomio minimo coincide con il polinomio caratteristico, perché per ogni autovalore vi è un unico blocco di Jordan.

(b) Si ha

$$A+1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -12 & 0 & 11 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^3 = \begin{pmatrix} 24 & 10 & -24 & 0 & 42 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -12 \\ 16 & 6 & -16 & 0 & 26 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A-1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

la matrice di Jordan di ϕ ha quindi un blocco di ordine 3 relativo all'autovalore -1 ed uno di ordine 2 relativo all'autovalore 1. Il vettore $v_3 = -6e_2 + e_3 + 2e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore -1 e si pone $v_2 = (\phi+1)(v_3) = -4e_1 - 4e_3 + 2e_4$, $v_1 = (\phi+1)^2(v_3) = 4e_1 + 4e_3$. Il vettore $v_5 = e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4 - 2e_5 \in \operatorname{im}(\phi+1)^3 = \ker(\phi-1)^2$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 relativo all'autovalore 1 e si pone $v_4 = (\phi-1)(v_5) = -6e_1 - 4e_3$. Si ha così una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Il vettore $w = v_3 + v_5 = e_1 - 4e_2 + 2e_3 - e_4$, è somma di due autovettori generalizzati di periodo massimo. Poiché lo spazio è somma diretta dei sottospazi di autovettori generalizzati e ϕ induce endomorfismi su quei sottospazi [Lemma di Decomposizione], il vettore w si annulla applicando l'endomorfismo $P(\phi)$, con $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, se, e solo se, si annullano le due componenti nei sottospazi di autovettori generalizzati; quindi se, e solo se, $P(X)$ è divisibile sia per $(X+1)^3$ che per $(X-1)^2$ e ha quindi grado almeno 5. Ciò permette di concludere (perché?). La matrice di ϕ nella base $\mathcal{W}$ è la matrice compagna del polinomio minimo di ϕ, ovvero.

$$C = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione affine $f : \mathbb{A}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

nei riferimenti (O, e_1, e_2, e_3) e $(O', \varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Si determinino equazioni cartesiane per l'immagine di f, per la controimmagine di un generico punto, $O' + y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2$, e per la controimmagine di una generica retta $a_1Y_1 + a_2Y_2 = a_0$.

Svolgimento. Per ogni punto $P = O+x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$, si ha $f(P) = O'+(x_1+2x_2+4x_3)\varepsilon_1+(2x_1+4x_2 + 8x_3 + 1)\varepsilon_2$ e quindi le coordinate di $f(P)$ soddisfano all'equazione $2Y_1 - Y_2 + 1 = 0$, che è l'equazione cartesiana di $\operatorname{im} f$. Se un punto $Q \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ appartiene all'immagine (risp. se un sottoinsieme U di $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ ha intersezione non banale con $\operatorname{im} f$), la controimmagine di Q ha equazione $f^{-1}(Q) : X_1 + 2X_2 + 4X_3 = y_1$, ove $Q = O' + y_1\varepsilon_1 + (2y_1 + 1)\varepsilon_2$ (risp. $f^{-1}(U)$ è unione di iperpiani paralleli a $X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 0$; uno per ogni punto di $U \cap \operatorname{im} f$).

Se la retta $r : a_1Y_1 + a_2Y_2 = a_0$ non è parallela a $\operatorname{im} f : 2Y_1 - Y_2 + 1 = 0$, interseca quest'ultima in un unico punto, Q, e $f^{-1}(r) = f^{-1}(r \cap \operatorname{im} f) = f^{-1}(Q)$. Quando la retta r è parallela, ma diversa da $\operatorname{im} f$, la controimmagine è $\varnothing$. Infine la controimmagine di $\operatorname{im} f$ è tutto $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. □

ESERCIZIO 3. *Siano P, Q, R, S i vertici di un tetraedro non degenere nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$.*

(a) Si dimostri che, se $P \vee Q$ è ortogonale a $R \vee S$ e $P \vee R$ è ortogonale a $Q \vee S$, allora anche $P \vee S$ è ortogonale a $Q \vee R$.

(b) Si dimostri che, nelle ipotesi del punto (a), le quattro altezze del tetraedro concorrono ad uno stesso punto (tetraedro ortocentrico).

Svolgimento. (a) Siano $Q - P = v_1$, $R - P = v_2$, $S - P = v_3$. Le ipotesi sono quindi equivalenti alle condizioni $v_1 \cdot (v_2 - v_3) = 0$ e $v_2 \cdot (v_1 - v_3) = 0$. Sottraendo la prima dalla seconda si ottiene esattamente $v_3 \cdot (v_1 - v_2) = 0$, ovvero l'ortogonalità della terza coppia di lati opposti.

(b) Scegliamo un riferimento ortonormale per cui il punto P abbia coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$, il punto S abbia coordinate $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ed i punti Q ed R abbiano coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, rispettivamente. Chiaramente $h \neq 0$ ed osserviamo che, se $a = 0$, l'origine del riferimento coincide con S e, nelle ipotesi del punto (a), le tre altezze si incontrano proprio in quel punto.

Supponiamo quindi $a \neq 0$. La condizione che $P \vee Q$ sia ortogonale a $R \vee S$ dà $x_1 = y_1$ e, unita alla condizione che $P \vee R$ sia ortogonale a $Q \vee S$, dà $x_1^2 - ax_1 + x_2y_2 = 0$ (la condizione che $P \vee S$ sia ortogonale a $Q \vee R$ produce la medesima condizione). Da ciò si deduce che il vettore $n = \begin{pmatrix} hx_1 \\ hx_2 \\ ax_1 \end{pmatrix}$ è ortogonale al piano $P \vee R \vee S$ e l'altezza $Q + \langle n_1 \rangle$ incontra l'altezza $O \vee P$ nel punto X di coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -ax_1/h \end{pmatrix}$. Si ha

$$\langle S - X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle R - P, Q - P \rangle^\perp \quad \text{e} \quad \langle R - X \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} hx_1 \\ hy_2 \\ ax_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Q - P, S - P \rangle^\perp$$

e quindi il punto X è l'intersezione delle quattro altezze del tetraedro. □