Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 30 novembre 2012 – Compito **A**

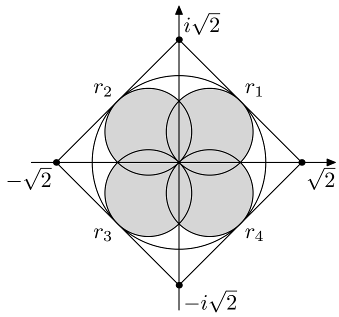
ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^4 - 4 \in \mathbb{C}[X]$.*

(a) Si determinino (in forma algebrica) le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del quadrato, Q, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del quadrato Q nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $I \smallsetminus \lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni al quadrato Q.

Svolgimento. (a) $P(X) = X^4 - 4 = (X - \sqrt{2})(X - i\sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X + i\sqrt{2})$ e disegnamo qui sotto il quadrato che ha come vertici le quattro radici.



(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$\begin{aligned}
r_1 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2\sqrt{2} = 0,\\
r_2 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2\sqrt{2} = 0,\\
r_3 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 2\sqrt{2} = 0,\\
r_4 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2\sqrt{2} = 0.
\end{aligned}$$

(c) Le immagini delle quattro rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le quattro circonferenze ad esse tangenti:

$$\lambda^*(r_1) : \left| z - \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_2) : \left| z + \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2},$$
$$\lambda^*(r_3) : \left| z + \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}, \qquad \lambda^*(r_4) : \left| z - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2}.$$

La parte ombreggiata rappresenta l'insieme $I \smallsetminus \lambda_*(I)$ (compreso il bordo, con l'eccezione dei punti appartenenti ai lati del quadrato). □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).*
(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_1 + 2v_3) = v_2 - 3v_4 = \phi(2v_1 - v_3), \qquad e \qquad \phi(2v_2 + v_4) = 3v_1 - v_3 = \phi(v_2 - 2v_4).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi per nucleo e immagine di ϕ.
(b) Si determinino dei sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ. Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, della proiezione su $\ker\phi$ parallelamente a $\operatorname{im}\phi$.
(c) Si consideri l'insieme $\mathscr{D} = \{ \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \phi \circ \psi \circ \phi = 0 \}$. Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\mathscr{D}' = \{ \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi) \mid \psi \in \mathscr{D} \} \subseteq M_4(\mathbb{Q})$. Si dica come trovare un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per $\langle \mathscr{D}' \rangle$.

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + 2v_3$, $2v_1 - v_3$, $2v_2 + v_4$, $v_2 - 2v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V. Quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V$ soddisfacente alle condizioni date. La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 9/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & -3/5 & 0 & 1/5 \\ -9/5 & 0 & -3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker\phi = \langle v_1 - 3v_3, v_2 + 3v_4 \rangle$, e $\operatorname{im}\phi = \langle v_2 - 3v_4, 3v_1 - v_3 \rangle$.
(b) Due sistemi di equazioni cartesiane sono

$$\operatorname{im}\phi : \begin{cases} 3X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 3X_3 = 0 \end{cases}, \qquad \ker\phi : \begin{cases} 3X_2 - X_4 = 0 \\ 3X_1 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente (come?) che $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi = \langle 0 \rangle$, e quindi $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$. La matrice della proiezione $\pi : V \to V$ su $\ker\phi$, parallelamente a $\operatorname{im}\phi$ è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1/8 & 0 & -3/8 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/6 \\ 3/8 & 0 & 9/8 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) $\mathscr{D}$ è un sottospazio e $\psi \in \mathscr{D}$ se, e solo se, $\psi(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. Dunque ψ manda i vettori deel sottospazio $\operatorname{im}\phi$ nel sottospazio $\ker\phi$, ed i vettori del complementare $\ker\phi$ in V. Dunque

$$\mathscr{D} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im}\phi, \ker\phi) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\ker\phi, V)$$

(come è fatta questa somma diretta? scegliere una base opportuna per descriverla in termini di matrici) e quindi $\dim \mathscr{D} = 12$.

L'insieme $\mathscr{D}' = \langle \mathscr{D}' \rangle$ (è un sottospazio) e una matrice $X \in M_4(\mathbb{Q})$ appartiene a $\mathscr{D}'$ se, e solo se, soddisfa alle condizioni

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che forniscono un sistema di equazioni cartesiane nelle entrate della matrice X. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 novembre 2012 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^4 + 4 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino (in forma algebrica) le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X)$ e le si disegni nel piano di Gauss.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del quadrato, Q, avente come vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del quadrato Q nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I) \cap I$ ove si indichino con I i punti interni o sul bordo del quadrato Q.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(2v_2 + v_4) = v_1 - 3v_3 = \phi(2v_4 - v_2), \qquad \text{e} \qquad \phi(2v_1 + v_3) = 3v_4 - v_2 = \phi(v_1 - 2v_3).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si determinino dei sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ. Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, della proiezione su $\ker\phi$ parallelamente a $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si consideri l'insieme $\mathscr{D} = \{\, \psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \phi \circ \psi \circ \phi = 0 \,\}$. Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e se ne calcoli la dimensione. Sia $\mathscr{D}' = \{\, \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi) \mid \psi \in \mathscr{D} \,\} \subseteq M_4(\mathbb{Q})$. Si dica come trovare un sistema (minimale) di equazioni cartesiane per $\langle \mathscr{D}' \rangle$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 28 gennaio 2013

ESERCIZIO 1. [12 punti] *Nello spazio vettoriale complesso* $V = \mathbb{C}^2$*, con la base canonica* $\{e_1, e_2\}$*, si considerino i sottospazi*

$$U = \left\{ c \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{C} \right\} \qquad e \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid 2iz_1 - z_2 = 0 \right\}.$$

(a) *Si determinino tutti gli endomorfismi (*$\mathbb{C}$*-lineari)* $\phi : V \to V$ *tali che* $W \subseteq \ker(\phi - \mathrm{id})$ *e* $U \subseteq \mathrm{im}(\phi - \mathrm{id})$*; se ne scrivano le matrici in base canonica e se ne calcoli il determinante.*

(b) *Si dica se gli endomorfismi del punto precedente sono tutti diagonalizzabili e si determinino autovalori e autovettori per ciascun endomorfismo.*

(c) *Si determinino gli endomorfismi* $\phi : V \to V$ *quale spazio vettoriale reale tali che* $W \subseteq \ker(\phi - \mathrm{id})$ *e* $U \subseteq \mathrm{im}(\phi - \mathrm{id})$ *e si dica quando sono invertibili. È vero che ognuno di questi endomorfismi è diagonalizzabile?*

Svolgimento. (a) Si ha $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$ e quindi $\ker(\phi - \mathrm{id}) = W = \langle (2i, -1) \rangle^\perp$ e $\mathrm{im}(\phi - \mathrm{id}) = U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$. Quindi le possibili matrici $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ sono tutte e sole quelle che soddisfano alla condizione

$$A - \mathbf{1}_2 = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (2i \ \ -1) = \begin{pmatrix} 2ic & -c \\ -2ic & c \end{pmatrix}, \qquad \text{al variare di } c \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}.$$

Si ha quindi, $\det A = (1 + 2ic)(1 + c) - 2ic^2 = 1 + (1 + 2i)c$.

(b) Si possono evitare calcoli tediosi osservando che, per costruzione, ϕ ha l'autovalore 1 con nullità maggiore o uguale a 1. Quindi se ϕ ha un altro autovalore distinto da 1 l'endomorfismo è certamente diagonalizzabile. Il prodotto degli autovalori è $\det \phi = 1 + (1 + 2i)c$, che è diverso da 1 per $c \neq 0$ e quindi ϕ è diagonalizzabile in ogni caso. Lo spazio di autovettori relativi a 1 è W, mentre lo spazio di autovettori relativi all'autovalore $1 + (1 + 2i)c$ è U (quest'ultima affermazione si può verificare con un calcolo diretto, oppure...).

(c) Come nel caso complesso si ha $\mathbb{C}^2 = U \oplus W$ e quindi $\ker(\phi - \mathrm{id}) = W = \langle (2i, -1) \rangle^\perp$ e $\mathrm{im}(\phi - \mathrm{id}) = U = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle$. Prendendo una base $\mathcal{V} = \{w_1, w_2, u_1, u_2\}$, ove $W = \langle w_1, w_2 \rangle$ e $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, si vede che le possibili matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ soddisfano alla condizione

$$A - \mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}, \qquad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Quindi ϕ è invertibile se, e solo se, -1 non è un autovalore per $\phi - \mathrm{id}$ (ovvero per $(\phi - \mathrm{id})_{|U}$; perché $\phi_{|W} = \mathrm{id}_W$). Ciò accade quando $1 + (a + d) + (ad - bc) \neq 0$. Non è vero che ϕ è sempre diagonalizzabile; ad esempio, se $a = d$ e $c = 0 \neq b$, ϕ ha l'autovalore $1 + a$ con molteplicità 2 e nullità 1. □

ESERCIZIO 2. [6 punti] *Sia* V *uno spazio vettoriale di dimensione finita. Sia* $\phi : V \to V$ *un endomorfismo e* W *un sottospazio (proprio) di* V *tale che* $\phi(w) \in W$*, per ogni* $w \in W$*. Si indichi con* $\phi_0 : W \to W$ *la restrizione di* ϕ *a* W*, e con* $\phi_1 : V/W \to V/W$ *l'endomorfismo* $x + W \mapsto \phi(x) + W$*. Si verifichi che* ϕ_1 *è ben definito e si dica quali tra le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.*

(a) $\mathrm{tr}\phi = \mathrm{tr}\phi_0 + \mathrm{tr}\phi_1$.

(b) $\det \phi = (\det \phi_0)(\det \phi_1)$.

(c) $rk\phi = rk\phi_0 + rk\phi_1$.

Svolgimento. Sia $w_1, \dots, w_k$ una base di W e la si completi ad una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ di V. Poiché $\phi(W) \subseteq W$, la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ ha la forma (a blocchi) $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, ove A è quadrata di ordine k, B è $k \times (n-k)$ e C è quadrata di ordine $n-k$.

A è la matrice, nella base $w_1, \dots, w_k$, di ϕ_0. Inoltre, poiché le classi laterali $w_{k+1}+W, \dots, w_n+W$ sono una base di V/W, C è la matrice di ϕ_1 in questa base. Da ciò si ricava facilmente che (a) e (b) sono vere, mentre (c) è falsa, visto che nulla si può dire su B dalla sola conoscenza di A e C. □

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Siano date le basi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali V e W e sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ nelle basi date.*

(a) Si determinino gli elementi degli insiemi

$$\mathscr{L} = \{\, \xi \in Hom(W, V) \mid \xi \circ \phi = \mathrm{id}_V \,\} \qquad e \qquad \mathscr{R} = \{\, \xi \in Hom(W, V) \mid \phi \circ \xi = \mathrm{id}_W \,\}$$

e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) Siano ora V e W spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente n ed m sul campo $\mathbb{F}_{37}$ e sia $\phi : V \to W$ un omomorfismo suriettivo. Si determini in questo caso il numero di elementi degli insiemi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{L}$.

Svolgimento. (a) $\mathscr{L} = \varnothing$ perché ogni applicazione lineare del tipo $\xi \circ \phi$ ha rango al più $2 = \dim W$, mentre l'identità ha rango 3.

ϕ è suriettiva e quindi $\mathscr{R} = \xi_0 + \mathrm{Hom}\,(W, \ker\phi)$, ove $\xi_0 : W \to V$ manda ciascuno dei vettori di base in una delle sue controimmagini (scelta arbitrariamente). Nel caso in questione, possiamo prendere $u_1 = v_1 - v_3$, $u_2 = v_3$, $u_3 = v_1 + v_2 + v_3$ e si ha $\phi(u_1) = w_1$, $\phi(u_2) = w_2$, $\langle u_3 \rangle = \ker\phi$. I tre vettori formano una base, $\mathcal{U}$, di V e $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi, se $\xi \in \mathscr{R}$, si ha $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$, al variare di a e b in $\mathbb{R}$. Le matrici cercate sono tutte e sole quelle del tipo

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\mathrm{id})\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\xi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi) = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ a & b \\ a-1 & b+1 \end{pmatrix}.$$

(b) L'esistenza di un omomorfismo suriettivo garantisce che $n \geq m$. Se $n = m$, ϕ è un isomorfismo e i due insiemi $\mathscr{R}$ e $\mathscr{L}$ contengono entrambi il solo ϕ^{-1}. Se $n > m$, analogamente al caso reale, $\#\mathscr{L} = 0$ e $\#\mathscr{R} = \#(\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{37}}(W, \ker\phi)) = 37^{m(n-m)}$. □

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ tale che

$$\phi(-2e_2+e_4) = -2e_2+e_4, \quad \phi(2e_1-e_3) = -4e_1+2e_3, \quad \phi(3e_1-e_3) = 9e_1-3e_3, \quad \phi(e_2-e_4) = -4e_2+4e_4.$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ e si calcoli $\det A$.

(b) Si determini il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$, gli autovalori ed autovettori razionali e si dica se ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$. In caso positivo, si determinino una marice diagonale, D, e una matrice invertibile P tali che $P^{-1}AP = D$.

Svolgimento. I quattro vettori

$$v_1 = -2e_2 + e_4, \quad v_2 = 2e_1 - e_3, \quad v_3 = 3e_1 - e_3, \quad v_4 = e_2 - e_4,$$

sono linearmente indipendenti e formano quindi una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ e si ha

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e \quad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre,

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e, quindi} \quad A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = BP^{-1} = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 10 \\ -5 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è costituita da autovettori per ϕ, perché si ha $\phi(v_1) = v_1$, $\phi(v_2) = -2v_2$, $\phi(v_3) = 3v_3$, $\phi(v_4) = -4v_4$. Quindi ϕ è diagonalizzabile e il suo polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)(X+2)(X-3)(X+4)$. Inoltre, $\det A = \det \phi = 24$ e una matrice diagonale per ϕ è

$$D = P^{-1}B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque $D = P^{-1}AP$ e lo svolgimento è concluso. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 gennaio 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^2 + (1-i)X - (2+2i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici di $P(X)$ *e si disegni nel piano di Gauss la retta (reale),* r*, che le contiene.*

(b) Si scriva l'equazione di r *nelle coordinate* z *e* $\bar{z}$*. Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo* r *lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione del semipiano soprastante ad* r*.*

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, definita per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(a) Si ha

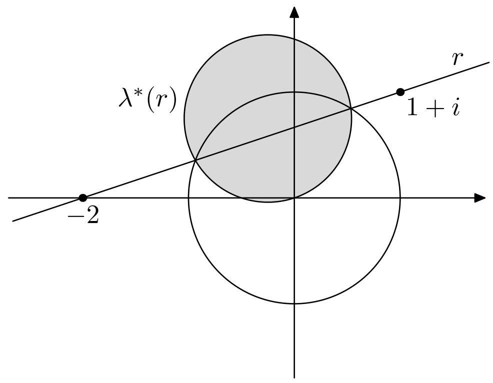
$$P(X) = X^2 + (1-i)X - (2+2i) = (X-1-i)(X+2).$$

Le due radici sono quindi -2 e $1+i$ e la retta r è rappresentata nel disegno a fianco.

(b) L'equazione della retta è

$$r : (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 4 = 0.$$

La circonferenza riflessa, $\lambda^*(r)$ ha quindi centro in $\frac{3i-1}{4}$ e raggio $\frac{\sqrt{10}}{4}$.



Il semipiano soprastante la retta r è $\{ z \in \mathbb{C} \mid (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} + 4 < 0 \}$ (la disequazione ha senso perché il membro di sinistra è un numero reale, qualsiasi sia il numero complesso z). Nella riflessione lungo la circonferenza unitaria viene trasformato nell'insieme $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z\bar{z} + \frac{1+3i}{4}z + \frac{1-3i}{4}\bar{z} < 0 \right\}$ che è quindi costituito dai punti interni alla circonferenza. $\square$

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale (complesso)* $V = M_2(\mathbb{C})$ *delle matrici* 2×2 *ad elementi in* $\mathbb{C}$ *e siano*

$$S = \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, {}^tA = A \right\} \qquad e \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i & i \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Si verifichi che S *è un sottospazio e si determinino le dimensioni e una base per i sottospazi* S, U, $S \cap U$, $S + U$.

(b) Fissata una matrice $A \in V$ *si consideri l'applicazione* $f_A : V \to \mathbb{C}$*, definita da* $f_A(X) = \mathrm{tr}({}^tAX)$*, al variare di* X *in* V*. Si verifichi che* $f_A \in V^*$*. Determinare nucleo e immagine dell'applicazione* $f : V \to V^*$, $A \mapsto f_A$.

(c) Si dica se esiste una forma lineare $\zeta \in V^*$ *tale che* $\zeta(X) = \zeta(Y)$ *per ogni* $X, Y \in S$ *e* $\zeta(T) = 2 + i$*, quando* $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$*. In caso affermativo, si dica se esiste una matrice* A *in* V *tale che* $\zeta = f_A$ *e si spieghi come trovarla.*

Svolgimento. (a) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V$. $A \in S$ se, e solo se, $b = c$ e quindi S è un sottospazio perché insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo nelle coordinate di V. Il sistema ha rango 1, quindi $\dim S = 3$ ed una base è costituita, ad esempio, dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

I due generatori di U sono linearmente indipendenti e quindi il sottospazio ha dimensione 2 e i generatori dati sono una base. Un generico elemento di U è della forma $\begin{pmatrix} 2i\beta & 2\alpha+i\beta \\ -i\alpha-\beta & \alpha \end{pmatrix}$, al variare di $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$; questo elemento sta in S se, e solo se,

$$2\alpha + i\beta = -i\alpha - \beta, \qquad \text{ovvero} \qquad (2+i)\alpha + (1+i)\beta = 0.$$

Quindi $S \cap U$ ha dimensione 1 ed è generato da $\begin{pmatrix} 2-4i & 3 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix}$ $(\alpha = 1+i,\ \beta = -2-i)$.

Per le relazioni di Grassmann, $\dim(S+U) = 4 = \dim V$ e quindi $S + U = V$ ed una base di tale spazio è, ad esempio, la base canonica delle matrici 2×2.

(b) La traccia di una matrice è la somma degli elementi posti sulla diagonale principale. Quindi, posto

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{si ha} \qquad \mathrm{tr}({}^tAX) = a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22},$$

che è un polinomio lineare omogeneo nelle entrate della matrice X (forma lineare). Quindi $f_A \in V^*$ e l'applicazione $A \mapsto f_A$ è lineare, perché l'espressione precedente è lineare anche rispetto alle entrate di A(†).

Dalla formula scritta sopra si deduce che, se $a_{ij} \neq 0$, allora $f_A(\varepsilon(ij)) = 1$ ($\varepsilon(ij)$ è l'elemento della base canonica di V che ha tutte le entrate nulle, eccetto quella di posto (i, j) che è uguale ad 1). Quindi l'unica matrice A per cui la forma f_A è identicamente nulla è $A = 0$. Ciò significa che $f : V \to V^*$ è iniettiva e quindi suriettiva (formula delle dimensioni).

(c) Da quanto appena visto possiamo concludere che, se esiste una forma lineare, ζ, soddisfacente alle condizioni poste, allora esiste una matrice A tale che $f_A = \zeta$, perché f è suriettiva.

$T \in U \smallsetminus (U \cap S)$ e quindi $V = S \oplus \langle T \rangle$, quindi esiste un'unica forma lineare ζ soddisfacente alle condizioni poste. Dovendo annullarsi su S e valere $2 + i$ sulla matrice T, si ha $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (usare la formula esplicita di f_A per scrivere un sistema lineare nelle entrate della matrice A). □

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Sia V uno spazio vettoriale reale e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Un sottospazio W di V si dice stabile rispetto a ϕ se $\phi(w) \in W$ per ogni $w \in W$. Sia W un sottospazio stabile rispetto a ϕ; allora*

(a) È vero che $W + \ker\phi$ è stabile rispetto a ϕ?
(b) È vero che $W^\perp$ è stabile rispetto a ϕ^*?
(c) È vero che $\phi_1 : v + W \mapsto \phi(v) + W$ è un endomorfismo di V/W?
(d) È vero che ϕ è completamente determinato se si conoscono $\phi_1 : V/W \to V/W$ e $\phi_0 = \phi_{|W} : W \to W$?

Svolgimento. (a) Se $x \in W$ e $y \in \ker\phi$, $\phi(x + y) = \phi(x) \in W \subseteq W + \ker\phi$, perché W è stabile. Quindi si tratta di un sottospazio stabile.

(b) Se $v^* \in W^\perp$, e $x \in W$, allora $\phi^*(w^*) \circ x = w^* \circ \phi(x) = 0$, perché, $\phi(x) \in W$. Quindi $W^\perp$ è stabile rispetto a ϕ^*.

(c) Sia ora $v \in V$ e sia $v + w$ un altro rappresentante della classe laterale $v + W$ in V/W. Allora $\phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \in \phi(v) + W$, perché $\phi(w) \in W$. Dunque l'applicazione $\phi_1 : V/W \to V/W$ è ben definita ed è un endomorfismo, perché ϕ lo è.

(d) Infine, la conoscenza di ϕ_0 e ϕ_1 non determina completamente ϕ (farsi un esempio). □

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile. Si mostri che l'endomorfismo trasposto $\phi^* : V^* \to V^*$ è diagonalizzabile e si scrivano le relazioni esistenti tra gli autovalori e le rispettive molteplicità per i due endomorfismi. Si dica quali relazioni vi sono tra i sottospazi di autovettori dei due endomorfismi.*

Svolgimento. Sia $c \in C$ uno scalare e consideriamo il sottospazio $\ker(\phi^* - c)$. Si ha

$$\ker(\phi^* - c) = \ker(\phi - c)^* = \mathrm{im}(\phi - c)^\perp,$$

(†) Detto in altro modo, $f : V \to V^*$ è l'applicazione lineare associata all'applicazione bilineare $(A, X) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAX)$.

e quindi i sottospazi $\ker(\phi^* - c)$ e $\ker(\phi - c)$ hanno la stessa dimensione. Ciò significa che $\phi^* : V^* \to V^*$ ha gli stessi autovalori con le stesse molteplicità geometriche (nullità) di ϕ. Dunque ϕ^* è diagonalizzabile se (e solo se) ϕ lo è.

Siano $a_1, \ldots, a_r$ gli autovalori di ϕ, a due a due distinti. Allora si ha

$$V = \ker(\phi - a_1) \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r).$$

Se un vettore $0 \neq v \in \ker(\phi - a_j)$, si ha $(\phi - a_1)(v) = (a_j - a_1)v$, che è diverso da 0 se $j \neq 1$ e quindi

$$\operatorname{im}(\phi - a_1) = \ker(\phi - a_2) \oplus \cdots \oplus \ker(\phi - a_r),$$

da cui si deduce che

$$\ker(\phi^* - a_1) = \operatorname{im}(\phi - a_1)^\perp = \ker(\phi - a_2)^\perp \cap \cdots \cap \ker(\phi - a_r)^\perp$$

e quindi i sottospazi $\ker(\phi^* - a_1)$ e $\ker(\phi - a_1)$ sono naturalmente in dualità (ovvero la restrizione del tondino $\circ : V^* \times V \to C$ ai due sottospazi è un'applicazione bilineare non degenere). Il ragionamento è analogo per gli altri autovalori. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 febbraio 2013 – Compito **A**

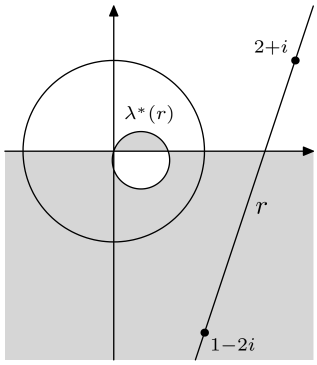
ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si determinino i numeri complessi z_1, z_2 tali che* $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 - i \\ z_1 z_2 = 4 - 3i \end{cases}$.

(a) *Si disegni nel piano di Gauss la retta (reale), r, che le contiene z_1 e z_2 e si determini l'equazione di r nelle coordinate z e $\bar{z}$.*

(b) *Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo r lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione dei punti del piano che si trovano tra l'asse reale e la retta r.*

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, definita per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(a) I punti z_1 e z_2 sono le radici del polinomio $P(X) = X^2 - (3 - i)X + (4 - 3i)$, ovvero $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 1 - 2i$. La retta che li contiene ha equazione $(3 - i)\bar{z} + (3 + i)z - 10 = 0$ ed è rappresentata nel disegno a fianco.



(b) La circonferenza riflessa, $\lambda^*(r)$ ha equazione $z\bar{z} - \frac{3-i}{10}\bar{z} - \frac{3+i}{10}z = 0$ e quindi centro in $\frac{3-i}{10}$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{10}}$. La regione delimitata dall'asse reale e dalla retta r si compone delle due parti

$$\begin{cases} i\bar{z} - iz > 0 \\ (3 - i)\bar{z} + (3 + i)z - 10 > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} i\bar{z} - iz < 0 \\ (3 - i)\bar{z} + (3 + i)z - 10 < 0 \end{cases}.$$

La riflessione nella circonferenza unitaria produce le due regioni evidenziate in grigio nella figura (bordi esclusi), ove mettiamo in evidenza il fatto che non appartiene a queste regioni la superficie a sinistra dell'asse immaginario e all'interno della circonferenza $\lambda^*(r)$, il cui colore bianco non risulta abbastanza evidente nelle dimensioni del disegno. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Nello spazio $\mathbb{R}^5$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, si considerino i sottospazi*

$$W_1 = \langle e_1 - 3e_3,\, 2e_1 + e_2 - e_3,\, 3e_1 + 2e_2 + e_3 \rangle, \qquad W_2 = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle,$$

$$W_3 : \begin{cases} 4X_1 + X_3 + 4X_5 = 0 \\ 2X_1 - 3X_2 + X_3 + 3X_5 = 0 \\ X_1 + 2X_2 + X_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Determinare le dimensioni e delle basi per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare delle equazioni cartesiane per $W_1 + W_2$. Si dica se $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.*

(b) *Si dica se è ben definita la simmetria $\sigma_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse W_3 e direzioni $W_1 + W_2$ e, in caso affermativo, se ne determini la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3)$.*

(c) *Dette σ_1 la simmetria di asse W_1 e direzioni $W_2 + W_3$ e σ_2 la simmetria di asse W_2 e direzioni $W_1 + W_3$, si ponga $\phi = 2\sigma_1 - \sigma_2 + 3\sigma_3$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^5$. Si calcolino $\det\phi$ ed il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$. Che dire degli spazi di autovettori relativi?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di W_1 sono linearmente dipendenti, infatti, si ha $(e_1 - 3e_3) - 2(2e_1 + e_2 - e_3) + (3e_1 + 2e_2 + e_3) = 0$; quindi due tra essi danno una base di W_1, ad esempio $w_1 = e_1 - 3e_3$ e $w_2 = 2e_1 + e_2 - e_3$, e $\dim W_1 = 2$.

Chiaramente $\dim W_2 = 1$ e il generatore,$w_3 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$, è una base del sottospazio.

Il sistema omogeneo che definisce W_3 ha rango 3 e due soluzioni linearmente indipendenti sono $w_4 = e_4$ e $w_5 = e_1 - e_2 - 8e_3 + e_5$. Queste sono una base di W_3 che ha dimensione 2.

Il sottospazio $W_1 + W_2$ è soluzione del sistema di equazioni cartesiane $\begin{cases} 3X_1 - 5X_2 + X_3 + X_4 = 0 \\ X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$.

Si osservi che $W_1 \cap W_2 = \langle 0 \rangle$, (tutti gli elementi di W_1 soddisfano l'equazione $X_4 = 0$). Se mostriamo che $(W_1 \oplus W_2) \cap W_3 = \langle 0 \rangle$, i tre spazi sono in somma diretta e, per un calcolo di dimensioni, la loro somma coincide con tutto $\mathbb{R}^5$. Un generico elemento di W_3 ha coordinate ${}^t(s, -s, -8s, t, s)$, al variare di $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, ed appartiene a $W_1 \oplus W_2$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano alle equazioni cartesiane scritte sopra, che danno $\begin{cases} t = 0 \\ s - t = 0 \end{cases}$ e quindi $s = 0 = t$.

(b) I vettori $w_1, \dots, w_5$ del punto precedente sono quindi una base, $\mathcal{W}$, di $\mathbb{R}^5$ e quindi esiste la simmetria σ_3 e si ha

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\sigma_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 18 & -4 & 0 & -3 \\ 6 & -9 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3) = PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 9 & -2 & 0 & -2 \\ -48 & 80 & -17 & 0 & -16 \\ 6 & -10 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & -10 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Utilizzando la base $\mathcal{W}$, si ha

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\det \phi = 0$; il polinomio caratteristico di ϕ è $X^2(X + 6)(X - 2)^2$ e gli spazi di autovettori sono $W_1 = \ker \phi$, $W_2 = \ker(\phi + 6\mathrm{id})$, $W_3 = \ker(\phi - 2\mathrm{id})$. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si determini il sottoinsieme S di $\mathbb{Q}^5$ formato dalle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} X_1 - X_3 - X_4 + X_5 = 0 \\ X_2 + X_4 + 3X_5 = 3 \\ 3X_1 + X_2 - 3X_3 - 2X_4 + 3X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 + 2X_5 = 1 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno lo stesso insieme S di soluzioni.*

(b) *Si determinino tutti gli endomorfismi $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ il cui nucleo contenga S e la cui immagine sia contenuta in S, si dica se formano un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$ e se ne calcoli la dimensione. Si risponda alla stessa domanda con $\langle S \rangle$ in luogo di S.*

(c) *Si determini il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi del punto precedente e si dica quali tra questi sono diagonalizzabili.*

Svolgimento. Con operazioni elementari sulla matrice completa del sistema si ottiene

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ III - 3I \\ IV - I \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \\ III \\ IV - III \\ II + 2III - 3IV \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il sistema ha quindi soluzione e

$$S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) I sistemi cercati si ottengono facendo operazioni elementari sulle prime tre righe della matrice a scalini ottenuta col procedimento di eliminazione. Poiché ogni matrice invertibile è prodotto di matrici elementari, possiamo scrivere che i sistemi minimali che hanno S come soluzione sono tutti e soli quelli della forma

$$\begin{cases} a_{11}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{12}(X_2 - X_4) + a_{13}(X_5 - 1) = 0 \\ a_{21}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{22}(X_2 - X_4) + a_{23}(X_5 - 1) = 0 \\ a_{31}(X_1 - X_3 - X_4 + X_5) + a_{32}(X_2 - X_4) + a_{33}(X_5 - 1) = 0 \end{cases}$$

ove $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 3}$ varia nel gruppo $\mathrm{GL}(3, \mathbb{Q})$.

(b) Il nucleo e l'immagine di un'applicazione lineare sono sottospazi, quindi non può mai aversi $\operatorname{im}\phi \subseteq S$, visto che $0 \notin S$. L'insieme in questione è vuoto. La condizione sensata su ϕ è quindi $\operatorname{im}\phi \subseteq \langle S \rangle \subseteq \ker\phi$. I vettori $s_3 = e_1 + e_3$, $s_4 = e_1 - e_2 + e_4$ e $s_5 = -e_1 + e_5$ sono una base di $\langle S \rangle$ e possiamo completarli ad una base $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_5\}$ di $\mathbb{Q}^5$ con i vettori $s_1 = e_1$, $s_2 = e_2$. La condizione posta su ϕ dà

$$\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left[\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} a+c-e & b+d-f & -a-c+e & -a+b-c+d+e-f & a+c-e \\ -c & -d & c & c-d & -c \\ a & b & -a & -a+b & a \\ c & d & -c & -c+d & c \\ e & f & -e & -e+f & e \end{pmatrix} \right]$$

da cui si vede chiaramente che (essendo $\xi \mapsto \alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\xi)$ un isomorfismo di spazi vettoriali) gli endomorfismi in questione formano un sottospazio di dimensione 6 di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$.

(c) Infine, dalla matrice scritta sopra, si vede che il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi descritti al punto precedente è X^5 e quindi che l'unico autovalore è 0 con molteplicità (algebrica) 5. La molteplicità geometrica (ovvero la dimensione di $\ker\phi$) uguaglia quella algebrica solo quando $\phi = 0$, che è quindi l'unico endomorfismo diagonalizzabile di quell'insieme. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 febbraio 2013 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. [6 punti] Si determinino i numeri complessi z_1, z_2 tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 3i \\ z_1 z_2 = 3i - 4 \end{cases}$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss la retta (reale), r, che le contiene z_1 e z_2 e si determini l'equazione di r nelle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Si determinino centro e raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo r lungo la circonferenza unitaria. Si disegni l'immagine tramite questa riflessione dei punti del piano che si trovano tra l'asse immaginario e la retta r.

ESERCIZIO 2. [12 punti] Nello spazio $\mathbb{R}^5$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$, si considerino i sottospazi

$$W_1 = \langle e_4 - 3e_5,\, e_3 + 2e_4 - e_5,\, 2e_3 + 3e_4 + e_5 \rangle, \qquad W_2 = \langle e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 \rangle,$$

$$W_3 : \begin{cases} 4X_1 + 4X_4 + X_5 = 0 \\ 3X_1 - 3X_3 + 2X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 + 2X_3 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) Determinare le dimensioni e delle basi per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare delle equazioni cartesiane per $W_1 + W_2$. Si dica se $\mathbb{R}^5 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

(b) Si dica se è ben definita la simmetria $\sigma_3 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse W_3 e direzioni $W_1 + W_2$ e, in caso affermativo, se ne determini la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_3)$.

(c) Dette σ_1 la simmetria di asse W_1 e direzioni $W_2 + W_3$ e σ_2 la simmetria di asse W_2 e direzioni $W_1 + W_3$, si ponga $\phi = 2\sigma_1 - \sigma_2 + 3\sigma_3$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^5$. Si calcolino $\det \phi$ ed il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$. Che dire degli spazi di autovettori relativi?

ESERCIZIO 3. [12 punti] Si determini il sottoinsieme S di $\mathbb{Q}^5$ formato dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_2 - 3X_3 + X_4 + 3X_5 = 0 \\ 3X_1 + X_2 + X_4 = 3 \\ X_1 - X_2 - X_3 + X_5 = 0 \\ 2X_1 - X_3 + X_4 + X_5 = 1 \end{cases}.$$

(a) Si determinino tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno lo stesso insieme S di soluzioni.

(b) Si determinino tutti gli endomorfismi $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ il cui nucleo contenga S e la cui immagine sia contenuta in S, si dica se formano un sottospazio di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^5$ e se ne calcoli la dimensione. Si risponda alla stessa domanda con $\langle S \rangle$ in luogo di S.

(c) Si determini il polinomio caratteristico di tutti gli endomorfismi del tipo $\mathrm{id} + \phi$, ove ϕ varia tra gli omomorfismi del punto precedente e si dica in quali casi $\mathrm{id} + \phi$ è diagonalizzabile.

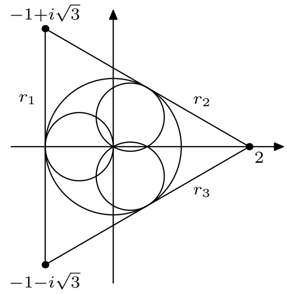
Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 18 giugno 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss tutti i numeri complessi z tali che $z^2 - 2\bar{z} = 0$.*

(a) Si determinino le equazioni delle rette del piano di Gauss che uniscono le coppie di numeri, diversi da 0, che soddisfano la condizione data. Si disegnino tali rette nel piano di Gauss.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss.

Svolgimento. (a) Il numero complesso 0 soddisfa alle condizioni date.
Se $z \neq 0$ soddisfa a tali condizioni, deve aversi $|z| = 2$ e quindi $\bar{z} = \frac{4}{z}$. I numeri complessi $z \neq 0$, soddisfacenti alle condizioni date, sono le radici del polinomio $X^3 - 8$. Quindi, i numeri cercati sono 0 e le radici terze di 8, 2, $2e^{2\pi i/3} = -1 + i\sqrt{3}$, $2e^{4\pi i/3} = -1 - i\sqrt{3}$. Le rette cercate hanno equazioni



$$r_1 : z + \bar{z} + 1 = 0, \qquad r_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 4 = 0,$$
$$r_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 4 = 0.$$

Le tre rette sono tangenti alla circonferenza unitaria nei punti corrispondenti alle radici terze di -1.
(b) Le circonferenze hanno tutte raggio 1/2 e centri in $-1/2$, $(1 + i\sqrt{3})/4$, $(1 - i\sqrt{3})/4$, rispettivamente. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Nello spazio vettoriale reale V, con la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si considerino i sottospazi*

$$W_1 : \begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ X_1 - 3X_2 + 2X_4 = 0 \end{cases}, \qquad e \qquad W_2 = \langle v_1 + v_3,\, v_2 + v_3,\, v_1 - 2v_2 + v_4 \rangle .$$

(a) Determinare la dimensione ed un sistema minimale di equazioni cartesiane per ciascuno dei sottospazi dati. Determinare una base per ciascuno dei sottospazi W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$.

(b) Si considerino i seguenti sottoinsiemi

$$\mathscr{U} = \{ \phi \in Hom_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \phi(W_1) \subseteq W_2,\ \phi(W_2) \subseteq W_1 \}$$
$$\mathscr{W} = \{ \psi \in Hom_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \psi(W_1) \subseteq W_1,\ \psi(W_2) \subseteq W_2 \} .$$

Si verifichi se sono sottospazi vettoriali e si determinino le eventuali dimensioni.

(c) In caso affermativo, si determini la dimensione di $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ e si dica se $\mathscr{U} + \mathscr{W} = Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$. In ogni caso, è vero che l'applicazione $\eta : \mathscr{U} \times \mathscr{U} \to \mathscr{W}$, definita da $(\psi, \phi) \mapsto \psi \circ \phi$ è suriettiva?

Svolgimento. (a) Le tre equazioni non sono indipendenti, essendo $(I - II - III = 0)$. Il sistema ha rango 2 e quindi $\dim W_1 = 2$. Invece, i tre generatori di W_2 sono linearmente indipendenti e perciò $\dim W_2 = 3$. Dei sistemi di equazioni minimali per i due sottopazi sono

$$W_1 : \begin{cases} X_1 + 2X_2 - X_4 = 0 \\ 5X_2 - 3X_4 = 0 \end{cases}, \qquad e \qquad W_2 : X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0.$$

Si ha quindi

$$W_1 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4, v_3 \rangle , \quad W_2 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4, v_2 + v_3, v_1 + v_3 \rangle ,$$
$$W_1 \cap W_2 = \langle v_1 - 3v_2 + 7v_3 - 5v_4 \rangle , \quad W_1 + W_2 = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle ;$$

e i generatori indicati sono basi.

(b) Posto, $U_1 = \langle v_3 \rangle$, $U_2 = \langle v_2 + v_3, v_1 + v_3 \rangle$, e $U_3 = W_1 \cap W_2$, si ha $W_1 = U_1 \oplus U_3$, $W_2 = U_2 \oplus U_3$ e $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$. Si hanno quindi le decomposizioni 'a blocchi' degli endomorfismi, ovvero

$$\begin{aligned}\mathscr{U} &= \{\, \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \phi(U_1) \subseteq U_2 \oplus U_3,\ \phi(U_2) \subseteq U_1 \oplus U_3,\ \phi(U_3) \subseteq U_3 \,\}\\ \mathscr{W} &= \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \phi(U_1) \subseteq U_1 \oplus U_3,\ \phi(U_2) \subseteq U_2 \oplus U_3,\ \phi(U_3) \subseteq U_3 \,\}.\end{aligned}$$

Da cui si deduce $\dim \mathscr{U} = 3 + 4 + 1 = 8$ e $\dim \mathscr{W} = 2 + 6 + 1 = 9$.

(c) Gli endomorfismi appartenenti a $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ sono tutti e soli quelli che mandano tutti i vettori di V in $U_3 = W_1 \cap W_2$ e quindi $\mathscr{U} \cap \mathscr{W}$ è un sottospazio di dimensione 4, da cui si ottiene $\dim(\mathscr{U} + \mathscr{W}) = 13 < \dim \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$. Infatti, la somma dei due sottospazi contiene solo endomorfismi che lasciano stabile il sottospazio U_3.

Infine, tutti gli endomorfismi $\phi \in \mathscr{U}$ hanno un nucleo di dimensione positiva, perché mandano il sottospazio W_2, di dimensione 3, in W_1, di dimensione 2. Quindi, se ψ e ϕ appartengono ad $\mathscr{U}$, si ha $\det(\psi \circ \phi) = (\det \psi)(\det \phi) = 0$, mentre $\mathscr{W}$ contiene endomorfismi invertibili (ad esempio l'identità id_V). Dunque, l'applicazione η non può essere suriettiva. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si considerino i sottospazi U e W dello spazio vettoriale $\mathbb{Q}^4$, definiti dalle condizioni*

$$U : \begin{cases} 4X_1 - 2X_2 + 2X_3 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 - 3X_4 = 0 \\ 6X_1 - 3X_2 + 3X_3 + X_4 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\2\\-1\\1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Si determinino una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane per ciascuno dei due sottospazi e si determini un sottospazio, T, tale che $(U \cap W) \oplus T = W$. È vero che per ogni tale sottospazio, T, si ha $U \oplus T = \mathbb{Q}^4$?

(b) Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\pi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, è la proiezione su U, parallelamente a T.

(c) Si indichi con $\sigma : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ la simmetria di asse U e direzione T e si considerino gli endomorfismi $\phi_a = 2\pi - a\sigma$, con $a \in \mathbb{Q}$. Si calcoli il determinante di ϕ_a al variare di $a \in \mathbb{Q}$. Che dire dei determinanti degli endomorfismi $Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4) \to Hom_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ così definiti,

$$\Phi : \psi \mapsto \phi_a \circ \psi, \qquad \Psi : \psi \mapsto \psi \circ \phi_a, \qquad \Xi : \psi \mapsto \phi_a \circ \psi \circ \phi_a.$$

Svolgimento. (a) Il sistema che definisce U ha rango 2. Una base di U è costituita dai vettori $u_1 = e_1 + 2e_2$ e $u_2 = e_2 + e_3$; un sistema minimale che definisce tale sottospazio è, ad esempio, $\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$.

I tre generatori dati di W sono una base di tale spazio che è definito dall'equazione cartesiana $2X_1 - X_2 + 2X_3 = 0$. Quest'equazione non è soddisfatta dal vettore u_2 e quindi l'intersezione $U \cap W$ si limita al sottospazio $\langle u_1 \rangle$.

Possiamo prendere $T = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove $w_1 = e_1 - e_3$, $w_2 = e_4$ e si ha $W = \langle u_1 \rangle \oplus T$ e $\mathbb{Q}^4 = U \oplus T$. Ogni altro sottospazio T, tale che $W = (U \cap W) \oplus T$, è del tipo $T_{(a,b)} = \langle w_1 + au_1, w_2 + bu_1 \rangle$, al variare di $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$. Ognuno di questi sottospazi ha dimensione 2 e si ha $T_{(a,b)} \cap U = (T_{(a,b)} \cap W) \cap U = T_{(a,b)} \cap (W \cap U) = \langle 0 \rangle$. Si conclude che $U \oplus T_{(a,b)} = \mathbb{Q}^4$, per ogni valore di $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$.

(b) Scegliamo $T = \langle w_1, w_2 \rangle$, ove $w_1 = e_1 - e_3$, $w_2 = e_4$ e si ottiene la matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left[A - \begin{pmatrix} 2a & -a & a & b \\ 4a & -2a & 2a & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ scegliendo } T_{(a,b)}. \right]$$

(c) Prendendo la base u_1, u_2, w_1, w_2 per $\mathbb{Q}^4$, si calcola immediatamente, $\det \phi_a = a^2(2-a)^2$. Ragionando analogamente, si ha $\det \Phi = (\det \phi_a)^4 = \det \Psi$ e $\det \Xi = (\det \Phi)(\det \Psi)$ per il Teorema di Binet. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

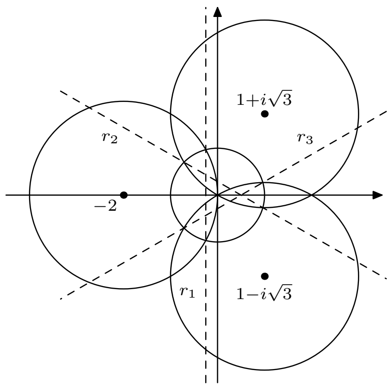
prova scritta del 9 luglio 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss tutti i numeri complessi z tali che $\bar{z}^2 + 2z = 0$.*

(a) *Si determinino le equazioni delle circonferenze passanti per l'origine del piano di Gauss e con centro nei numeri, diversi da 0, che soddisfano la condizione data. Si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss.*

(b) *Si determinino le equazioni delle rette che si ottengono riflettendo le circonferenze del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali rette nel piano di Gauss.*

Svolgimento. Il numero complesso 0 soddisfa alle condizioni date.



Se $z \neq 0$ soddisfa a tali condizioni, deve aversi $|z| = 2$ e quindi $\bar{z} = \frac{4}{z}$. I numeri complessi $z \neq 0$, soddisfacenti alle condizioni date, sono le radici del polinomio $X^3 + 8$. Quindi, i numeri cercati sono 0 e le radici terze di -8; ovvero -2, $2e^{\pi i/3} = 1 + i\sqrt{3}$, $2e^{5\pi i/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

(a) Le circonferenze cercate hanno equazioni

$$C_1 : \bar{z}z + 2z + 2\bar{z} = 0, \qquad C_2 : \bar{z}z - (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 0,$$
$$C_3 : \bar{z}z - (1 + i\sqrt{3})z - (1 - i\sqrt{3})\bar{z} = 0$$

e ciascuna interseca la circonferenza unitaria in una coppia di punti uniti per la riflessione, che determinano quindi la retta che si ottiene per riflessione nella circonferenza unitaria.

(b) Le tre rette hanno quindi equazioni

$$r_1 : 2z + 2\bar{z} + 1 = 0, \quad r_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0, \quad r_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0$$

rispettivamente. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Dato lo spazio vettoriale V su $\mathbb{Q}$, con la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, si dica se esiste un endomorfismo $\phi : V \to V$ tale che*

$$\phi^{-1}(\{2v_2 - v_4\}) = (2v_4 - 4v_2) + \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle \qquad \text{e} \qquad v_1 \in \phi^{-1}(\{v_3\}).$$

(a) *In caso affermativo, si determinino $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, autovalori e autovettori per ϕ. In caso negativo, si spieghi perché non può esistere e si dica come modificare $\phi^{-1}(\{2v_2-v_4\})$ affinché esista. Si determinino per tale ϕ le quantità descritte sopra.*

(b) *Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_4^*\}$ la base duale di V^*. Si mostri che gli endomorfismi $v_j \otimes v_i^* : V \to V$, definiti ponendo $x \mapsto v_j(v_i^* \circ x)$, per ogni $x \in V$, con $1 \leq i, j \leq 4$, sono una base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e si scriva ϕ come combinazione lineare dei vettori di questa base. Si determinino, se esistono, r vettori $w_1, \dots, w_r$ di V ed r forme lineari $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ di V^* tali che $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + \cdots + w_r \otimes \zeta_r$, ove $r = \mathrm{rk}\phi$ è il rango di ϕ. Che dire dei sottospazi $\langle w_1, \dots, w_r\rangle$ e $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_r\rangle$?*

(c) *Il sottoinsieme $\mathscr{W} = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid (\mathrm{id}_V - \psi) \circ \phi = \phi \,\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ o una sottovarietà lineare dello spazio affine associato? In ogni caso si determinino dimensione ed un sistema di equazioni cartesiane per $\mathscr{W}$ nel riferimento associato alla base $v_j \otimes v_i^*$, con $1 \leq i, j \leq 4$.*

Svolgimento. (a) Se un tale ϕ esiste, deve aversi,

$$\phi(v_1) = v_3, \quad \phi(v_1 - v_3) = 0, \quad \phi(v_2 + v_4) = 0, \quad \phi(2v_2 - v_4) = -\frac{1}{2}(2v_2 - v_4)).$$

I quattro vettori v_1, $v_1 - v_3$, $v_2 + v_4$, $2v_2 - v_4$ sono una base di V e quindi una tale ϕ esiste ed è unica. In particolare, $\ker\phi = \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle$, $\operatorname{im}\phi = \langle 2v_2 - v_4, v_3\rangle$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}$, gli autovalori sono 0, $-1/2$ e 1, con i rispettivi autospazi $\ker\phi = \langle v_1 - v_3, v_2 + v_4\rangle$, $\ker(\phi + 1/2) = \langle 2v_2 - v_4\rangle$, $\ker(\phi - 1) = \langle v_3\rangle$.

(b) Per verificare che i sedici endomorfismi $v_j \otimes v_i^*$, per $1 \le i, j \le 4$, sono una base di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ è sufficiente verificare che sono linearmente indipendenti (o che generano lo spazio). Sia $\sum_{1\le i,j\le 4} a_{ij} v_j \otimes v_i^* = 0$ e si prenda il vettore v_h della base $\mathcal{V}$. Deve aversi

$$0 = \sum_{1\le i,j\le 4} a_{ij} v_j (v_i^* \circ v_h) = \sum_{1\le j\le 4} a_{hj} v_j;$$

da cui si deduce $a_{h1} = \cdots = a_{h4} = 0$, perché i vettori $v_1, \dots, v_4$ sono linearmente indipendenti in V. Si conclude così che gli endomorfismi dati sono linearmente indipendenti in $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$.

La matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ ha rango 2 e si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Possiamo quindi considerare i vettori $w_1 = v_3$, $w_2 = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{6}v_4$ e le forme lineari $\zeta_1 = v_1^* + v_3^*$, $\zeta_2 = v_2^* - v_4^*$, ed osservare che $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + w_2 \otimes \zeta_2$, come richiesto. In particolare, $\langle w_1, w_2\rangle = \operatorname{im}\phi$ e $\langle \zeta_1, \zeta_2\rangle = (\ker\phi)^\perp$.

(c) $(\mathrm{id}_V - \psi)\circ\phi = \phi$ se, e solo se, $\psi\circ\phi = 0$ e quindi $\mathscr{W}$ è un sottospazio in quanto è il nucleo dell'applicazione lineare $R_\phi : \psi \mapsto \psi\circ\phi$. Gli endomorfismi $\psi \in \mathscr{W}$ devono annullarsi sui vettori del sottospazio $\operatorname{im}\phi$ e possono assumere valori arbitrari su (la base di) un qualsiasi sottospazio complementare. Quindi $\dim\mathscr{W} = 8$ e una base di $\mathscr{W}$ è costituita dagli endomorfismi $v_1\otimes\eta_1$, $v_2\otimes\eta_1$, $v_3\otimes\eta_1$, $v_4\otimes\eta_1$, $v_1\otimes\eta_2$, $v_2\otimes\eta_2$, $v_3\otimes\eta_2$, $v_4\otimes\eta_2$, ove $\eta_1 = v_1^*$ e $\eta_2 = v_2^* + 2v_4^*$ sono una base di $(\operatorname{im}\phi)^\perp \subset V^*$.

Un sistema di equazioni cartesiane che definisce il sottospazio $\mathscr{W}$ è

$$\begin{cases} a_{13} = 0 \\ a_{23} = 0 \\ a_{33} = 0 \\ a_{43} = 0 \\ 2a_{12} - a_{14} = 0 \\ 2a_{22} - a_{24} = 0 \\ 2a_{32} - a_{34} = 0 \\ 2a_{42} - a_{44} = 0 \end{cases}.$$

Lo si poteva ricavare anche scrivendo una generica matrice X tale che $XA = 0$. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Si considerino i sottospazi U e W dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, definiti dalle condizioni*

$$U : \begin{cases} 4X_1 - X_2 - 2X_3 + 2X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 - X_3 - 2X_4 = 0 \\ 6X_1 - 2X_2 - 3X_3 + 4X_4 = 0 \end{cases} \quad e \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) *Si determinino le dimensioni dei sottospazi U, W, $U\cap W$ e $U+W$ e si completi una base di U ad una base di $U+W$. Se necessario, si completi la base così ottenute ad una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.*

(b) *Se $\mathbb{R}^4 = U\oplus W$ si scriva la matrice in base canonica dell'endomorfismo $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che manda ogni vettore nella sua proiezione in U, parallelamente a W. In caso contrario, si fissi a piacere un complementare T di U e si determini la matrice della proiezione, π, su U, associata a questa decomposizione.*

(c) *Sia B la matrice, in base canonica della simmetria $\sigma = 2\pi - \mathrm{id}$. Si può trovare una matrice ortogonale H (ovvero con ${}^tH = H^{-1}$), tale che la matrice $C_t = tH + (1-t)B$ sia invertibile e U sia contenuto nell'autospazio relativo ad 1, per ogni $t \in [0,1]$?*

Svolgimento. (a) Il sistema che definisce U ha rango 2, quindi $\dim U = 2$ e $U = \langle e_1 + 2e_3, 2e_2 + e_4\rangle$. Anche $\dim W = 2$ e $W = \langle e_1 - e_3, e_2 - e_4\rangle$. Se ne deduce che $U \cap W = \langle 0\rangle$ e la base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, può essere costituita da

$$v_1 = e_1 + 2e_3, \quad v_2 = 2e_2 + e_4, \quad v_3 = e_1 - e_3, \quad v_4 = e_2 - e_4.$$

(b) La matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia $\sigma = 2\pi - \mathrm{id}$ la simmetria di asse U e direzione W; sia $s_U : \mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^4$ la simmetria ortogonale di asse U e indichiamo con p_U e $p_{U^\perp}$ le proiezioni ortogonali su U e $U^\perp$, di modo che $s_U = p_U - p_{U^\perp}$. Poniamo quindi $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma)$ e $H = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(s_U)$. Dato $t \in [0,1]$, indichiamo con $\psi_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da $\psi_t(x) = (1-t)\sigma(x) + ts_U(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^4$. Se $x = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W$, si ha $\sigma(x) = u - w$ e $s_U(x) = u + p_U(w) - p_{U^\perp}(w)$, da cui si deduce

$$\psi_t(x) = u + (2t-1)p_U(w) - p_{U^\perp}(w) = u + 2tp_U(w) - w.$$

Quindi $\psi_t(x) = 0$ se, e solo se, $u + (2t-1)p_U(w) = 0$ e $p_{U^\perp}(w) = 0$ e quindi $w \in W \cap \ker p_{U^\perp} = W \cap U = \langle 0\rangle$; da cui si deduce $u = (1-2t)p_U(w) = 0$. Ciò significa $\ker\psi_t = \langle 0\rangle$ e quindi ψ_t invertibile; e dallo stesso calcolo si ricava $\psi_t(u) = u$ per ogni $u \in U$, qualunque sia $t \in [0,1]$ e ciò permette di concludere che H soddisfa a tutte le condizioni richieste. In particolare, si può verificare che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, ψ_t è una simmetria di asse U. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2013

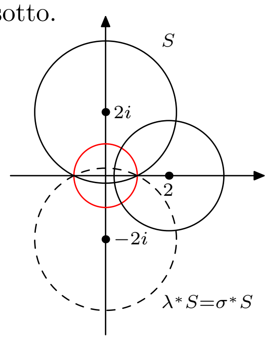
ESERCIZIO 1. *[8 punti]*

(a) Si disegni nel piano di Gauss l'insieme $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - 2i\bar{z} + 2iz - 1 = 0 \}$.

(b) Siano $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nella circonferenza unitaria e* $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *il coniugio. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss gli insiemi* $\lambda^*(S)$ *e* $\sigma^*(S)$.

(c) Si determinino tutte le circonferenze (o rette) del piano di Gauss, C*, per cui* $\lambda^*(C) = \sigma^*(C)$.

Svolgimento. (a) S è la circonferenza di centro $2i$ e raggio $\sqrt{5}$, rappresentata qui sotto.



(b) Si ha

$$\lambda^*(S) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2i\bar{z} - 2iz - 1 = 0 \}$$
$$\sigma^*(S) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} + 2i\bar{z} - 2iz - 1 = 0 \}$$

Quindi i due insiemi coincidono e si tratta della circonferenza di centro $-2i$ e raggio $\sqrt{5}$.

(c) Si consideri una generica circonferenza (o retta) del piano complesso, di equazione $C : az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0$.

Gli insiemi che si ottengono riflettendo nella circonferenza unitaria e nell'asse reale, hanno equazioni

$$\lambda^*(C) : cz\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + a = 0 \quad \text{e} \quad \sigma^*(C) : az\bar{z} + \bar{b}\bar{z} + bz + c = 0.$$

Supponiamo $a, b, c \neq 0$, lasciando al lettore la discussione dei casi particolari (che *è richiesta*). Gli insiemi delle soluzioni coincidono se, e solo se, $\frac{c}{a} = \frac{b}{\bar{b}} = \frac{\bar{b}}{b} = \frac{a}{c}$. Da cui si deduce $a^2 = c^2$ e $b^2 = \bar{b}^2$; o, meglio, $\begin{cases} a = c \\ b = \bar{b} \end{cases}$ e $\begin{cases} a = -c \\ b = -\bar{b} \end{cases}$. Sono quindi due famiglie di circonferenze, la prima del tipo $|z - \alpha| = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|\alpha| \geq 1$, con centri nell'asse reale; e la seconda $|z - i\beta| = \sqrt{\beta^2 + 1}$, ove $\beta \in \mathbb{R}$ con centri nell'asse immaginario. Il lettore è invitato a disegnarsi qualche esempio. □

ESERCIZIO 2. *[12 punti] Siano* U*,* V *e* W *spazi vettoriali su* $\mathbb{Q}$ *su cui siano fissate rispettivamente le basi,* $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\psi : U \to V$ *e* $\phi : W \to U$ *che soddisfano alle condizioni*

$$\phi(w_1 + w_3) = 0 = \phi(w_2 + w_4), \quad \phi(w_1 + w_4) = -3u_1 + u_2 - u_3, \quad \phi(w_2 - w_3) = u_1 + u_2 + 3u_3 + 2u_4.$$
$$\psi(u_1 - u_2 - u_3) = 0 = \psi(u_1 - u_2 + u_4), \quad \psi(u_1 - u_2) = v_1 - v_3, \quad \psi(u_1 + u_2) = v_1 + 2v_2 + v_3;$$

Si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi)$ *e* $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi)$*, e si determinino nucleo ed immagine di tali applicazioni.*

(b) Si consideri l'insieme $\mathcal{X} = \{ \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \phi \circ \xi \circ \psi = 0 \}$*. Si dica se* $\mathcal{X}$ *è un sottospazio o una sottovarietà lineare di* $Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$ *e se ne calcoli in ogni caso la dimensione. Si determinino le matrici delle funzioni appartenenti a* $\mathcal{X}$ *nelle basi date.*

(c) Sia $\mathcal{Y} = \{ C \in M_{4\times4}(\mathbb{Q}) \mid C + AXB = \mathbf{1}_4, \ \exists X \in M_{4\times3}(\mathbb{Q}) \}$*. Si determini una rappresentazione parametrica degli elementi di* $\mathcal{Y}$ *e si dica se si tratta di un sottospazio o di una sottovarietà lineare di* $M_4(\mathbb{Q})$*. È vero che ogni matrice in* $M_4(\mathbb{Q})$*, di rango 1, si può trasformare con operazioni elementari sulle righe e sulle colonne in una matrice di* $\mathcal{Y}$*? E cosa si può dire a questo riguardo per una matrice invertibile?*

Svolgimento. (a) Osserviamo che i vettori, $u_1 - u_2 - u_3, u_1 - u_2 + u_4, u_1 + u_2, u_1 - u_2$ sono una base di U e che i vettori $w_1 + w_3, w_2 + w_4, w_1 + w_4, w_2 - w_3$ sono una base di W; quindi le applicazioni lineari ϕ e ψ, soddisfacenti alle condizioni date, esistono e sono uniche. Inoltre è evidente che

$$\ker\psi = \langle u_1 - u_2 - u_3, u_1 - u_2 + u_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\psi = \langle v_1 - v_3, v_1 + 2v_2 + v_3 \rangle,$$
$$\ker\phi = \langle w_1 + w_3, w_2 + w_4 \rangle, \qquad \operatorname{im}\phi = \langle -3u_1 + u_2 - u_3, u_1 + u_2 + 3u_3 + 2u_4 \rangle.$$

Infine

$$B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Il sottoinsieme $\mathcal{X}$ contiene l'omomorfismo nullo e, presi comunque ξ_1 e ξ_2 in $\mathcal{X}$ e due numeri reali a_1 ed a_2, si ha $\phi \circ (a_1\xi_1 + a_2\xi_2) \circ \psi = a_1\phi \circ \xi_1 \circ \psi + a_2\phi \circ \xi_2 \circ \psi = 0$. Quindi $\mathcal{X}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$. Un'applicazione lineare $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ appartiene a $\mathcal{X}$ se, e solo se, $\xi(\mathrm{im}\,\psi) \subseteq \ker\phi$. Quindi sul sottospazio $\mathrm{im}\,\psi$ (di dimensione 2), ξ deve assumere valori in $\ker\phi$ (che ha pure dimensione 2), mentre in un qualsiasi complementare di $\mathrm{im}\,\psi$ (di dim 1) può assumere qualunque valore in W (di dimensione 4). Dunque il sottospazio $\mathcal{X}$ ha dimensione 8.
Si può facilmente scrivere una base di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$, prendendo 8 matrici linearmente indipendenti che soddisfano alla condizione data; ad esempio

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}.$$

(c) L'applicazione $f : M_{4\times3}(\mathbb{R}) \to M_{4\times4}(\mathbb{R})$, definita da $X \mapsto AXB$, è un'applicazione lineare il cui nucleo è $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$. Quindi $\mathcal{Y} = \mathbf{1}_4 + \mathrm{im}\,f$ è una sottovarietà lineare di dimensione 4 di $M_{4\times4}(\mathbb{R})$, che può essere parametrizzato con l'immagine tramite f di un qualsiasi complementare di $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathcal{X})$. Si ha quindi

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mathbf{1}_4 - A \begin{pmatrix} a&b&0\\c&d&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} B \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a+b-2c-2d & b-2d & a-2c & -a+2c \\ -a-b & 1-b & -a & a \\ -a-b-2c-2d & -b-2d & 1-a-2c & a+2c \\ -a-b-c-d & -b-d & -a-c & 1+a+c \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

che dà una rappresentazione parametrica di $\mathcal{Y}$. Il rango di un elemento di $\mathcal{Y}$ è compreso tra 2 e 4, perché il rango della somma di due matrici (o dei corrispondenti omomorfismi) è compreso tra la somma e il valore assoluto della differenza dei ranghi degli addendi. Due matrici di $M_4(\mathbb{R})$ aventi uguale rango possono essere trasformate l'una nell'altra tramite operazioni elementari su righe e colonne (perché?). Quindi l'asserto è vero per le matrici invertibili, ma è falso per le matrici di rango 1, perché nessuna matrice con questo rango appartiene a $\mathcal{Y}$. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 5, ed indichiamo con $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Si consideri l'applicazione $\phi : V \to V$, definita da $\phi(P(X)) = P(X + 1) - XP'(X)$, ove $P'(X)$ indica il derivato del polinomio $P(X)$ (se $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, allora $P'(X) = \sum_{i=1}^{n} i a_i X^{i-1}$).*

(a) Si verifichi che ϕ è un omomorfismo di spazi vettoriali reali, se ne calcolino nucleo e immagine e si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$. Si dica se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Detta $\phi^* : V^* \to V^*$ l'applicazione trasposta, se ne determinino nucleo ed immagine. È vero che l'applicazione $P(X) \mapsto P(1)$ appartiene a $\mathrm{im}\,\phi^*$? Qual è la sua controimmagine tramite ϕ^*? Sia $\mathcal{B}^* = \{ \delta_i \mid 0 \leq i < 5 \}$, come di consueto, la base duale della base canonica di V. È vero che l'applicazione $\delta_2 - 3\delta_3$ appartiene a $\mathrm{im}\,\phi^*$? Qual è la sua controimmagine tramite ϕ^*?

Svolgimento. (a) ϕ è un omomorfismo perché lo sono la moltiplicazione per polinomi fissati (che non facciano uscire dallo spazio), così come la derivazione. Inoltre combinazioni lineari di omomorfismi producono ancora omomorfismi. Possiamo calcolare l'effetto dell'applicazione ϕ sui vettori della base canonica e ottenere

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e $\ker\phi = \langle X-1\rangle$, $\operatorname{im}\phi = \left\langle 1, 2X-X^2, 3X+3X^2-2X^3, 4X+6X^2+4X^3-3X^4\right\rangle$. La matrice di ϕ è triangolare con elementi a due a due distinti sulla diagonale e quindi ϕ è diagonalizzabile.

(b) $\operatorname{im}\phi^* = (\ker\phi)^\perp = \langle \delta_0+\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\rangle$, $\ker\phi^* = (\operatorname{im}\phi)^\perp = \langle 6\delta_1+12\delta_2+27\delta_3+68\delta_4\rangle$. L'applicazione $P(X) \mapsto P(1)$ è $\delta_0+\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4 \in \operatorname{im}\phi^*$ e la sua controimmagine è $\delta_0 + \ker\phi^*$.

Infine l'applicazione $\delta_2 - 3\delta_3 \in \operatorname{im}\phi^*$, perché $(\delta_2-3\delta_3)\circ(X-1) = 0$ e la sua controimmagine è

$$\phi^{*-1}(\delta_2-3\delta_3) = \{\, -\delta_2 - 2\delta_4 + a(6\delta_1+12\delta_2+27\delta_3+68\delta_4) \mid a \in \mathbb{R} \,\}.$$

□

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 settembre 2013

ESERCIZIO 1. [6 punti]

(a) *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le soluzioni dell'equazione* $z^3 = i(z+1)^3$.

(b) *Si determini, se esiste, una trasformazione di Möbius,* $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, *che mandi le radici dell'equazione precedente su punti della circonferenza unitaria.*

Svolgimento. $z = -1$ non è una soluzione, per cui l'equazione data è equivalente a $\left(\frac{z}{z+1}\right)^3 = i$. Le radici cubiche di i sono i numeri complessi

$$e^{i\pi/6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}, \qquad e^{5i\pi/6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}, \qquad e^{3i\pi/2} = -i.$$

Le radici cercate sono quindi,

$$\tfrac{e^{i\pi/6}}{1-e^{i\pi/6}} = \tfrac{\sqrt{3}-2+i}{4-2\sqrt{3}}, \qquad \tfrac{e^{5i\pi/6}}{1-e^{5i\pi/6}} = \tfrac{-2-\sqrt{3}+i}{4+2\sqrt{3}}, \qquad \tfrac{-i}{1+i} = -\tfrac{1+i}{2}.$$

Naturalmente, la trasformazione $z \mapsto \frac{z}{z+1}$, manda le tre radici del polinomio sulle radici cubiche di i, che sono sulla circonferenza unitaria. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti razionali.*

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 - X_5 = -1 \\ X_1 - X_2 + 3X_4 - X_5 = 2 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le soluzioni* $S \subset \mathbb{Q}^5$ *del sistema lineare. Si determinino gli endomorfismi* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *tali che* $\mathrm{im}\phi \subseteq \langle S \rangle \subseteq \ker\phi$, $\phi(e_3 + e_5) = e_1 - e_3 + e_5$ *e* $\phi(e_3 - e_5) = e_3 - e_4 - e_5$. *Si scriva la matrice, in base canonica, di tali endomorfismi.*

(b) *Sia* $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_5^*\}$ *la base duale. Si scrivano i* ϕ *del punto precedente come combinazione lineare degli endomorfismi* $e_i \otimes e_j^*$. *Si determinino, se esistono,* r *vettori* $w_1, \dots, w_r$ *di* $\mathbb{Q}^5$ *ed* r *forme lineari* $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ *del duale tali che* $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + \cdots + w_r \otimes \zeta_r$, *ove* $r = \mathrm{rk}\phi$ *è il rango di* ϕ. *Si determini, se esiste, una base* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *di* $\mathbb{Q}^5$ *tale che* $\phi = v_1 \otimes v_1^* + \cdots + v_r \otimes v_r^*$, *ove* $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ *è la base duale della base* $\mathcal{V}$.

(c) *Siano* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *una base di* $\mathbb{Q}^5$ *e* $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ *la base duale. È vero che ogni endomorfismo invertibile di* $\mathbb{Q}^5$ *è composizione di un numero finito di endomorfismi del tipo*

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^5} + a v_i \otimes v_j^* \quad \text{con } a \in \mathbb{Q} \text{ e } i \neq j, \qquad \text{e} \qquad \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^5} + (b-1) v_i \otimes v_i^* \quad \text{con } b \in \mathbb{Q}^\times \text{ e } i = 1, \dots, 5.$$

Si discuta lo stesso problema in $\mathbb{Q}^n$, *per qualsiasi* $n \geq 1$.

Svolgimento. (a) Si ha

$$S = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e quindi} \qquad \langle S \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In base alle condizioni date, ϕ ha rango almeno 2 e quindi ha un nucleo di dimensione 3 e si ha

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 5} = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $\phi = \sum_{1\le i,j\le 5} a_{ij} v_i \otimes v_j^*$ ed è un endomorfismo di rango 2. Posto,

$$w_1 = e_3 - e_4 - e_5, \quad w_2 = e_1 - e_4, \qquad \text{e} \qquad \zeta_1 = e_1^* - e_2^* - e_4^* - e_5^*, \quad \zeta_2 = \tfrac{1}{2}(e_3^* - e_5^*);$$

si ha $\phi = w_1 \otimes \zeta_1 + w_2 \otimes \zeta_2$. Mentre non può esistere una base per cui $\phi = v_1 \otimes v_1^* + v_2 \otimes v_2^*$, perché si dovrebbe avere

$$\operatorname{im}\phi = \langle v_1, v_2\rangle \subset \ker\phi = \langle v_1^*, v_2^*\rangle^\perp = \langle v_3, v_4, v_5\rangle\,.$$

(c) Gli endomorfismi dati sono trasformazioni elementari. Le loro matrici nella base $\mathcal{V}$ sono le matrici elementari, diverse dalle matrici di scambio. Si tratta quindi di dimostrare che anche gli scambi si possono ottenere come composizione di questi isomorfismi per poter concludere, visto che le trasformazioni elementari sono generatori del gruppo $\mathrm{GL}(V)$, per ogni spazio di dimensione finita V. Infatti, si ha

$$H(i,j) = (\mathrm{id}_V - 2v_j \otimes v_j^*)(\mathrm{id}_V + v_i \otimes v_j^*)(\mathrm{id}_V - v_j \otimes v_i^*)(\mathrm{id}_V + v_i \otimes v_j^*)$$

e ciò permette di concludere. □

ESERCIZIO 3. [12 punti] *Siano V e W spazi vettoriali complessi e siano $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ delle rispettive basi.*

(a) Si determinino le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che, $v_3 - 2v_4 \in \phi^{-1}\{w_2\}$ e $\phi^{-1}\{w_1 - 2w_2\} = (v_1 + 2v_3) + \langle v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3\rangle$; e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) Si consideri l'insieme $S = \{\, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V) \mid \phi\circ\psi = \mathrm{id}_W \,\}$. Si dica se l'insieme

$$\mathcal{X} = \{\, \psi_1 - \psi_2 \mid (\psi_1,\psi_2) \in S \times S \,\}$$

è un sottospazio, una sottovarietà lineare o altro in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V)$ e si determinino l'eventuale dimensione e il corrispondente sottoinsieme di matrici $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathcal{X})$.

(c) Si dia una condizione necessaria e sufficiente sulla matrice di $\xi \in \mathcal{X}$, affinché si abbia $\operatorname{im}\xi \oplus \langle v_3, v_4\rangle = V$. È vero che il complementare dell'insieme di queste matrici è descritto da un insieme finito di equazioni algebriche? ... sono equazioni lineari?

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3, v_1 + 2v_3, v_3 - 2v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V. Per cui esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa alle condizioni date e la sua matrice è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 & 1/6 \\ -1 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) S è una sottovarietà lineare e $\mathcal{X}$ ne è lo spazio direttore. Gli elementi di $\mathcal{X}$ sono applicazioni lineari $\xi : W \to V$ tali che $\phi\circ\xi = 0$ e quindi coincide con il sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V)$ formato dagli omomorfismi la cui immagine è contenuta in $\ker\phi$. Un sottospazio di dimensione 4 a cui corrisponde il sottospazio di matrici

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}$.

(c) Il sottospazio $\langle v_3, v_4\rangle$ è un complementare di $\ker\phi = \langle v_1 - 2v_4, v_2 - 2v_3\rangle$. Quindi, affinché si abbia $\operatorname{im}\xi \oplus \langle v_3, v_4\rangle = V$, è necessario e sufficiente che $\operatorname{im}\xi = \ker\phi$, ovvero che ξ abbia rango massimo. Il complementare è formato dalle matrici in $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathcal{X})$ di rango ≤ 1, ovvero quelle per cui si annullano tutti i minori di ordine 2 che danno sei equazioni algebriche (di secondo grado e non 'indipendenti') di cui queste matrici sono soluzione. □