Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 19 aprile 2013 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) [4 punti] *Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.*

(b) [4 punti] *Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^5$ e quindi vi è il solo autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 5. Gli autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_1 - e_3, e_1 + e_4 \rangle$. Si ha

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A-2)^3 = \mathbf{0};$$

e il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X-2)^3$.

(b) La matrice di Jordan ha quindi un blocco di ordine 3 ed uno di ordine 2. Il vettore $v_5 = e_2$ è un autovettore generalizzato di periodo 3. Posto $v_4 = (\phi - 2)(v_5) = 3e_2 + e_3 + e_4 - 3e_5$, $v_3 = (\phi-2)^2(v_5) = -3e_1 + 6e_3 + 3e_4$ e, $v_2 = e_1$, $v_1 = (\phi - 2)(v_2) = e_1 + e_4$, si ottiene una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono quindi

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C.*

(a) [4 punti] *Sia dia l'esempio di un endomorfismo $\phi : V \to V$ per cui $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.*

(b) [4 punti] *È vero che per ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ esiste un intero positivo m tale che $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$?*

Svolgimento. (a) Sia $V = U \oplus W$ e $\pi : V \to V$ la proiezione su U parallelamente a W. È ben noto che $U = \operatorname{im}\pi$, $W = \ker\pi$ e $V = U \oplus W$. D'altro canto, sia $\nu : V \to V$ un endomorfismo nilpotente di periodo 2 ($\nu \neq 0 = \nu^2$). In tal caso $\langle 0 \rangle \neq \operatorname{im}\nu \subseteq \ker\nu \neq V$; quindi $\operatorname{im}\nu + \ker\nu = \ker\nu \neq V$ e la somma non è diretta.

(b) È chiaro che se ϕ è invertibile, la tesi è vera con $m = 1$, essendo $\ker\phi = \langle 0 \rangle$ e $\operatorname{im}\phi = V$. Supponiamo quindi che vi sia un nucleo non banale, ovvero che X divida il polinomio caratteristico $p_\phi(X)$. Allora il polinomio minimo di ϕ è $\lambda_\phi(X) = X^m g(X)$ con $m \geq 1$ e $g(0) \neq 0$. Per il Lemma di Decomposizione, si ha $V = \ker\phi^m \oplus \ker g(\phi)$. Dal fatto che $g(\phi) \circ \phi^m = \lambda_\phi(\phi) = 0$, si deduce che $\operatorname{im}\phi^m \subseteq \ker g(\phi)$ e i due spazi coincidono per motivi di dimensione (oppure perché ϕ induce un automorfismo nel sottospazio $\ker g(\phi)$ [come convincersi di ciò?]). □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta* $r : \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 = 6 \end{cases}$ *e il piano $\pi : X_2 - X_3 = 0$.*

(a) [4 punti] *Detto W il sottospazio direttore di π, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, di asse r e direzioni W.*

(b) [6 punti] *Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O+e_1+e_3+\langle e_2\rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$.*

Svolgimento. (a) Il simmetrico tramite σ di un punto X è determinato dalle condizioni $\sigma(X) - X \in W$ e $\frac{\sigma(X)+X}{2} \in r$. Dunque, usando le coordinate nel riferimento canonico,

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} x_1+\alpha \\ x_2+\beta \\ x_3+\beta \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} (x_1 + \frac{\alpha}{2}) + (x_3 + \frac{\beta}{2}) = 1 \\ 2(x_2 + \frac{\beta}{2}) - (x_3 + \frac{\beta}{2}) = 6 \end{cases}.$$

Se ne deduce che $\sigma(X) = \begin{pmatrix} -10-x_1+4x_2-4x_3 \\ 12-3x_2+2x_3 \\ 12-4x_2+3x_3 \end{pmatrix}$ e quindi la matrice di σ nel riferimento canonico è

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -1 & 4 & -4 \\ 12 & 0 & -3 & 2 \\ 12 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Presi i punti $P_1 \neq Q_1$ in s_1 e $P_2 \neq Q_2$ in s_2, i quattro punti sono in posizione generale in $\mathbb{A}^3$ e quindi generano tutto lo spazio. Esiste quindi un'unica proiettività $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ che manda ordinatamente P_1, Q_1, P_2, Q_2 su P_2, Q_2, P_1, Q_1. Si tratta chiaramente di una simmetria ($f^2 = \mathrm{id}$); che lascia uniti i punti medi $\frac{P_1+P_2}{2}$ e $\frac{Q_1+Q_2}{2}$, e quindi la retta da essi generata (perché i due punti non possono coincidere?) è tutta costituita da punti uniti per f. I vettori $P_2 - P_1$ e $Q_2 - Q_1$ sono linearmente indipendenti (perché?) e vengono mandati nei loro opposti dall'applicazione lineare associata ad f. Si tratta quindi della simmetria rispetto alla retta $r = \frac{P_1+P_2}{2} \vee \frac{Q_1+Q_2}{2}$ e di direzioni $W = \langle P_2 - P_1,\, Q_2 - Q_1\rangle$.

I punti medi di tutte le coppie di punti (X_1, X_2) con $X_1 \in s_1$ e $X_2 \in s_2$, formano un piano (il piano $\frac{P_1+P_2}{2} + \langle Q_1 - P_1, Q_2 - P_2\rangle$, nelle notazioni precedenti) ed ogni punto di questo piano è il punto medio di un'unica coppia di punti sulle due rette sghembe. Per quanto visto, tutte le rette di questo piano sono possibili assi di simmetria. La scelta di due punti $M = \frac{P_1+P_2}{2}$ ed $N = \frac{Q_1+Q_2}{2}$ su una delle rette del piano determina due coppie distinte $P_1, Q_1 \in s_1$ e $P_2, Q_2 \in s_2$ ed i vettori P_2-P_1 e Q_2-Q_1 generano il sottospazio W delle direzioni di simmetria (il sottospazio W dipende dalla scelta dei punti?).

Nel caso in cui $s_1 = O+e_1+e_3+\langle e_2\rangle$ e $s_2 = O+e_1+\langle e_1 + e_2 + e_3\rangle$, possiamo prendere $P_1 = O+e_1+e_3$, $Q_1 = O+e_1+e_2+e_3$, e $P_2 = O+e_1$, $Q_2 = O+2e_1+e_2+e_3$. Quindi $r = (O+e_1+\frac{1}{2}e_3)\vee(O+\frac{3}{2}e_1+e_2+e_3)$ e $W = \langle e_3\rangle\, e_1$ (ovvero $r : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$ e $W : y = 0$). □

ESERCIZIO 4. [4 punti] *Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità tale che, per ogni retta r, l'immagine $f(r)$ sia parallela ad r. È vero che f è un'omotetia o una traslazione?*

Svolgimento. L'immagine della retta $P + \langle v\rangle$ è la retta $f(P) + \langle\phi(v)\rangle$, ove ϕ è l'applicazione lineare associata ad f. Le due rette sono parallele se, e solo se, $\langle v\rangle = \langle\phi(v)\rangle$; ovvero se, e solo se, v è autovettore per ϕ. Dunque ogni retta è parallela alla propria immagine se, e solo se, ogni vettore non nullo è autovettore per ϕ, necessariamente relativo ad un unico autovalore. Se l'autovalore è 1 si ha una traslazione, altrimenti un'omotetia. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 aprile 2013 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C.

(a) [4 punti] Sia dia l'esempio di un endomorfismo $\phi : V \to V$ per cui $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.

(b) [4 punti] È vero che per ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ esiste un intero positivo m tale che $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$?

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r : \begin{cases} X_1 + X_3 = 1 \\ 2X_2 - X_3 = 6 \end{cases}$ e il piano $\pi : X_2 - X_3 = 0$.

(a) [4 punti] Detto W il sottospazio direttore di π, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, di asse r e direzioni W.

(b) [6 punti] Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O + e_1 + e_3 + \langle e_2 \rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

ESERCIZIO 4. [4 punti] Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione maggiore di 1 e sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità associata all'applicazione lineare $\phi : V \to V$. È vero che se la retta $r = P + \langle v \rangle$ è unita ($f(r) \subseteq r$), allora v è autovettore per ϕ? È vero che, se $v \neq 0$ è autovettore per ϕ, esiste una retta unita parallela a $\langle v \rangle$?

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 aprile 2013 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) [4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) [4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C.

(a) [4 punti] Sia dia l'esempio di un endomorfismo $\phi : V \to V$ per cui $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e di un endomorfismo per cui ciò non sia vero.

(b) [4 punti] È vero che per ogni endomorfismo $\phi : V \to V$ esiste un intero positivo m tale che $V = \ker\phi^m \oplus \operatorname{im}\phi^m$?

ESERCIZIO 3. Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r : \begin{cases} X_1 + X_2 = 1 \\ X_2 - 2X_3 = -6 \end{cases}$ e il piano $\pi : X_2 - X_3 = 0$.

(a) [4 punti] Detto W il sottospazio direttore di π, si scriva la matrice nel riferimento canonico della simmetria, $\sigma : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$, di asse r e direzioni W.

(b) [6 punti] Date due rette sghembe s_1, s_2 in $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$, si trovino una retta r e un sottospazio W tali che la simmetria di asse r e direzioni W scambi tra loro le due rette. Quali sono le scelte possibili per la retta r ed il sottospazio W? Si determinino una retta r e un sottospazio W nel caso in cui $s_1 = O + e_1 + e_2 + \langle e_3 \rangle$ e $s_2 = O + e_1 + \langle e_1 + e_2 + e_3 \rangle$.

ESERCIZIO 4. [4 punti] Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità. È vero che se f commuta con una traslazione $\tau_v \neq \mathrm{id}$, allora tutte le rette parallele a $\langle v \rangle$ sono unite? È vero che se tutte le rette parallele a $\langle v \rangle \neq \langle 0 \rangle$ sono unite, allora f commuta con la traslazione τ_v?

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova di accertamento del 14 Giugno 2013

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ si considerino la retta* $r : \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ *e la retta* $s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t \\ z = -1 - t \end{cases}$

(a) Si determinino i punti di minima distanza R in r e S in s e la distanza fra le due rette. Si determinino inoltre il coseno dell'angolo θ formato dalle rette r e s e le equazioni cartesiane di t proiezione ortogonale della retta s nel piano $\pi : x + z = 1$.

(b) Sia ρ l'isometria la cui matrice rispetto al riferimento canonico è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Determinare $\rho(r)$ immagine della retta r. Sia σ la riflessione (simmetria ortogonale) di asse π; classificare secondo Eulero l'isometria $\varrho := \sigma \circ \rho$ e determinarne tutte le sottovarietà unite.

(c) Descrivere (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) quali sono tutte le possibili isometrie τ di $\mathbb{E}^3$ tali che la retta passante per i punti di minima distanza R e S sia unita e $\tau(r) = t$.

Svolgimento. (a) Le rette r e s sono sghembe i punti di minima distanza sono $R = O + e_1 + e_2$ in r e $S = O + e_2 - e_3$ in s quindi la distanza fra r e s è $d(r, s) = \sqrt{2}$. La proiezione ortogonale della retta s nel piano π è la retta $t : \begin{cases} x + z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$. Il coseno dell'angolo formato da r e s è $\cos\theta = \frac{1}{3}$.

(b) L'isometria ρ è una rotazione di asse $h : R + \langle e_1 + e_3 \rangle$ angolo θ. La riflessione richiesta ha matrice:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La rigidità $\sigma \circ \rho$ è una roto-riflessione in quanto è stata costruita come composizione di una rotazione seguita da una simmetria ortogonale che ha come asse il piano π, ortogonale all'asse di rotazione di ρ.

L'unico punto unito è l'intersezione dell'asse di rotazione di ρ con il piano π cioè il punto R. L'unica retta unita è h, l'asse di rotazione di ρ. L'unico piano unito è il piano π.

(c) Il punto R è unito, perché $\tau(R) \in (R \vee S) \cap t = \{R\}$. Lo spazio direttore della retta $h = R \vee S$ è un autospazio (relativo all'autovalore ± 1) per τ (o, meglio, per l'applicazione lineare associata a τ). Un versore della retta r deve andare in un versore della retta t. Si consideri il sistema di riferimento che ha l'origine in R, e la base ortonormale v_1, v_2, v_3, ove v_1 è un versore di r e v_3 è un versore di h e $\cos\theta v_1 + \sin\theta v_2$ è un versore della retta t. In questo sistema di riferimento, le possibili isometrie hanno matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm\cos\theta & \mp\sin\theta & 0 \\ 0 & \pm\sin\theta & \pm\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

e sono quindi possibili le varie scelte di segno per le colonne (8 casi). □

ESERCIZIO 2. *In $\mathbb{E}^4$ nel riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si consideri l'iperpiano $\mathbb{T} : x_1 + x_2 = 0$ e la retta $l = O + e_1 + \langle e_1 - e_2 \rangle$.*
(a) Determinare la posizione reciproca di $\mathbb{T}$ e l e la loro distanza.
(b) Determinare un sistema di riferimento ortonormale tale che il piano $\mathbb{T}$ abbia equazione $X_1 = 0$.
(c) Descrivere tutte le sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^4$ che contengono l e non intersecano $\mathbb{T}$.

Svolgimento. (a) La retta l è parallela all'iperpiano $\mathbb{T}$; la sua distanza da $\mathbb{T}$ è la distanza del punto $O + e_1$ da $\mathbb{T}$, ovvero $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Il piano $\mathbb{T}$ passa per l'origine, quindi possiamo prendere la nuova origine sempre in O e prendere la base ortonormale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, con $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ (ortogonale a $\mathbb{T}$) e $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_2)$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_4$.

(c) Le sottovarietà lineari di $\mathbb{E}^4$ che contengono l e non intersecano $\mathbb{T}$ sono, la retta l, di equaziono cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; l'iperpiano $\mathbb{T}' : x_1 + x_2 = 1$, parallelo a $\mathbb{T}$ e contenente l, e il fascio di piani per l, paralleli a $\mathbb{T}$, ovvero i piani $\pi_{(a,b)} = O + e_1 + \langle e_1 - e_2, ae_3 + be_4 \rangle$, al variare dei parametri omogenei (a, b). Le equazioni cartesiane dei piani sono $\pi_{(a,b)} : \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 giugno 2013

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *[4 punti] Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.*

(b) *[4 punti] Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.*

(c) *[2 punti] Si scriva la matrice A come somma di una matrice diagonalizzabile, D, e di una nilpotente, N.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)^2(X-5)^3$ e quindi vi sono gli autovalori 1 e 5, con molteplicità (algebrica) 2 e 3, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi di dimensione 1, $\ker(\phi-1) = \langle 3e_1 - e_3 \rangle$ e $\ker(\phi-5) = \langle e_1 + e_3 \rangle$. Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-1)^2(X-5)^3$ e si ha

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A-1)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 2 & 12 & -8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 16 & 6 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - 5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice di Jordan di ϕ ha un solo blocco, di ordine 3, relativo all'autovalore 5 e un solo blocco, di ordine 2, relativo all'autovalore 1. Il vettore $v_2 = 4e_1 + 4e_2 + e_4 - 4e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 2 per l'autovalore 1 e si pone $v_1 = (\phi-1)(v_2) = 3e_1 - e_3$. Il vettore $v_5 = 4e_2 + e_3 + 4e_5$, appartiene a $\operatorname{im}(\phi-1)^2 = \ker(\phi-5)^3$ [perché?], ed è un autovettore generalizzato di periodo 3 per l'autovalore 5. Si pone $v_4 = (\phi-5)(v_5) = 3e_1 + 3e_3 + 4e_4$ e $v_3 = (\phi-5)^2(v_5) = -4e_1 - 4e_3$. Si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Scrivendo $J = \Delta + S$, ove Δ è la parte diagonale e S quella nilpotente, basta porre,

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -7/8 & 3 & 0 & 1/8 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3/8 & 4 & 0 & 5/8 \\ 0 & -1/2 & 0 & 5 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad N = PSP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 7/8 & 0 & -1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & 0 & -1 & 3/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che sono le matrici cercate. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 8 e $\phi : V \to V$ un endomorfismo di rango 5, con polinomio minimo $\lambda_\phi(X) = X^2(X-1)^2$.*

(a) *[5 punti] Si determinino tutte le possibili forme di Jordan per la matrice di ϕ, non simili tra loro. È sufficiente conoscere il polinomio caratteristico di ϕ per distinguerle?*

(b) *[5 punti] In ogni caso, si consideri la decomposizione $V = \ker\phi^2 \oplus \ker(\phi-1)^2$. È vero che esistono due polinomi $g(X)$ e $h(X)$ in $\mathbb{C}[X]$ tali che $h(\phi)$ sia la proiezione su $\ker\phi^2$ e $g(\phi)$ sia la proiezione su $\ker(\phi-1)^2$ associate a questa decomposizione di V? In caso affermativo si determinino tali polionomi e si dica se dipendono o meno dalla forma di Jordan di ϕ*

Svolgimento. (a) Le possibili matrici di Jordan sono 4, corrispondenti alle filtrazioni dei nuclei descritte nella seguente tabella,

$\dim\ker\phi$	$\dim\ker\phi^2$	$\dim\ker(\phi-1)$	$\dim\ker(\phi-1)^2$
3	6	1	2
3	5	2	3
3	4	2	4
3	4	3	4

da cui si vede che le ultime due righe corrispondono a due forme di Jordan, non simili, aventi lo stesso polinomio caratteristico $X^4(X-1)^4$.

(b) Con un facile calcolo di massimo comun divisore, $1 = X^2(3-2X) + (X-1)^2(2X+1)$ e, ricordando la dimostrazione del Lemma di Decomposizione, per ogni vettore $v \in V$, si ha $v = \phi^2(3-2\phi)(v) + (\phi-1)^2(2\phi+1)(v)$, con il primo addendo in $\ker(\phi-1)^2$ ed il secondo in $\ker\phi^2$. Posto quindi $g(X) = (X-1)^2(2X+1)$ e $h(X) = X^2(3-2X)$, si hanno i polinomi cercati. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, dotato del riferimento canonico $\{O, e_1, e_2, e_3\}$, si considerino la retta $r = O + e_1 + \langle e_2\rangle$ ed il piano di equazione $\pi : x - z = 0$.*

(a) [5 punti] Si determinino le posizioni reciproche e la distanza della retta e del piano dall'origine, O. Si determinino i punti delle due sottovarietà lineari a minima distanza da O.

(b) [5 punti] Si determini la matrice nel riferimento canonico di una glissoriflessione, $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$, tale che $f(O) = O + e_1 + e_2 + e_3$, $f(r) = r$ e $f(\pi) = \pi$.

Svolgimento. (a) La retta r è parallela ed esterna al piano π. Ha distanza 1 dall'origine e il punto $O + e_1$ è il punto di minima distanza. Il piano π passa per l'origine ed ha quindi distanza 0 da O che è il punto di minima distanza.

(b) Le rette unite in una glissoriflessione sono tutte e sole le rette del piano di riflessione, parallele alla direzione di traslazione. Oltre al piano di riflessione, sono uniti tutti i piani paralleli alla direzione di riflessione (autospazio relativo all'autovalore -1 per l'applicazione lineare associata) e alla direzione di traslazione. La retta r e il piano π sono disgiunti e quindi la direzione di traslazione è parallela al vettore e_2 e il piano di riflessione contiene la retta r ed è parallelo al sottospazio $\langle e_1 - e_3\rangle$, ortogonale al piano π. Si tratta della riflessione rispetto al piano $\tau = O + e_1 + \langle e_1 - e_3, e_2\rangle$, seguita dalla traslazione di vettore e_2; e quindi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice cercata. □

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Sia* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per* ϕ.

(b) *Si determinino una matrice di Jordan,* J, *ed una matrice invertibile,* P, *tali che* $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^5$ e quindi vi è solo l'autovalore -1, con molteplicità (algebrica) 5. Il relativo autospazio è $\ker(\phi + 1) = \langle e_1 + e_3, e_2 - e_3 - 2e_4 - e_5 \rangle$, di dimensione 2. Il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = (X+1)^4$, perché si ha

$$A+1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A+1)^4 = \mathbf{0}_5.$$

(*b*) La matrice di Jordan di ϕ ha due blocchi relativi all'autovalore -1, uno di ordine 4 e l'altro di ordine 1. Il vettore $v_5 = e_5$ è un autovettore generalizzato di periodo 4 per l'autovalore -1 e si pone $v_4 = (\phi+1)(v_5) = 2e_2 - 2e_5$, $v_3 = (\phi+1)(v_4) = 2e_1 + 6e_3$, $v_2 = (\phi+1)(v_3) = 4e_1 + 4e_3$. Infine, si pone $v_1 = e_2 - e_3 - 2e_4 - e_5$ e si ottiene così una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Le matrici cercate sono, ad esempio,

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. $\square$

ESERCIZIO 2. [12 punti] *In* $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ *munito del sistema di riferimento* $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ *si considerino i piani*

$$\pi_\alpha : \begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - x_3 = \alpha \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \sigma_\beta : \begin{cases} x_3 - \beta x_4 = 0 \\ x_1 + \beta x_2 = 0 \end{cases}.$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) *Determinare la posizione reciproca dei due piani* π_α *e* σ_β *al variare di* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e calcolare la dimensione di* $\pi_\alpha \vee \sigma_\beta$.

(b) *Posto* $\alpha = 1, \beta = 0$ *e* $P \notin \pi_\alpha \cup \sigma_\beta$. *Esiste un piano* τ_P, *passante per* P, *e tale che* $\dim(\pi_1 \vee \tau_P) = 3 = \dim(\sigma_0 \vee \tau_P)$? *È unico?*

(c) *Esiste un'affinità* $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ *tale che* $f(\pi_1) = \sigma_0$ *e* $f(\sigma_0) = \pi_1$?

Svolgimento. (a) L'intersezione tra i due piani è governata dal sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta & 0 \\ \alpha & 1 & -1 & 0 & \alpha \end{array}\right) \underset{(IV-\alpha I+\beta II+III)}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{array}\right).$$

- Se $\beta \neq 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 4, i due piani si incontrano in un punto e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 4$ (cf. formula di Grassmann affine).

- Se, invece $\beta = 0 \neq \alpha$, i due piani hanno intersezione vuota, ma il sottospazio $\langle e_4 \rangle$ è comune ai due spazi direttori e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 4$.
- Infine, se $\beta = 0 = \alpha$, i due piani si intersecano nella retta $O + \langle e_4 \rangle$ e $\dim(\pi_\alpha \vee \sigma_\beta) = 3$.

(*b*) Si ha $\pi_1 = (O + e_1) + \langle e_1 + e_3, e_4 \rangle$ e $\sigma_0 = O + \langle e_2, e_4 \rangle$. Il punto P non appartiene a $\pi_1 \cup \sigma_0$, quindi, se esiste un piano τ_P con le proprietà richieste, deve aversi $\tau_P \vee \pi_1 = P \vee \pi_1$ e $\tau_P \vee \sigma_0 = P \vee \sigma_0$; ove le due sottovarietà sono distinte ed hanno dimensione 3. Quindi (sempre per la formula di Grassmann affine) deve essere $\tau_P = (P \vee \pi_1) \cap (P \vee \sigma_0)$ ed il piano così determinato è unico.

(*c*) Fissiamo un sistema di riferimento che abbia come origine il punto $M = O + \frac{1}{2}e_1$, e i vettori $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_1 + e_3$, $v_4 = e_4$. L'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nel riferimento testé descritto è quella cercata. □

ESERCIZIO 3. [12 punti]

(*a*) *Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità. Supponiamo che esista una retta r in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ su cui f induca una traslazione. Dimostrare che allora f non ha punti uniti.*

(*b*) *Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità che non ha punti uniti. Dimostrare che allora esiste una retta r in $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ su cui f induce una traslazione.*

(*c*) *Sia $g : \mathbb{A}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$ un'affinità per cui esista una retta r sulla quale g induce una traslazione. È vero che allora g non ha punti uniti?*

Svolgimento. (a) Sia $f : \mathbb{E}^n(\mathbb{R}) \to \mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ una rigidità e supponiamo che essa induca una traslazione $\tau_v = f_{|r} : r \to r$ di vettore $0_{\mathbb{R}^n} \neq v \in \mathbb{R}^n$ sulla retta r passante per P e parallela a v. Consideriamo un sistema di riferimento ortonormale di $\mathbb{E}^n(\mathbb{R})$ $\mathscr{S} = \{P, u_1, \dots, u_n\}$ con $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Allora la matrice associata a f rispetto al sistema di riferimento S è (in forma a blocchi):

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ \|v\| & 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & H \end{pmatrix}$$

con $H \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ matrice ortogonale (perché u_1 è autovettore di autovalore 1 e l'applicazione lineare ϕ soggiacente a f è un'isometria). Quindi f non ha punti uniti perché il sistema lineare

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-1}} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} & H \end{pmatrix} - \mathbb{I}_n \right) \underline{x} = \begin{pmatrix} -\|v\| \\ 0_{\mathbb{R}^{n-1}} \end{pmatrix}$$

con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ non ha soluzioni.

(*b*) Sia f una una rigidità la cui matrice associata rispetto al sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1 \dots, e_n\}$ sia

$$L = \begin{pmatrix} 1 & {}^t0_{\mathbb{R}^n} \\ v & A \end{pmatrix}.$$

Allora f non ha punti uniti se e solo se il sistema lineare $(A - \mathbb{I}_n)x = -v$ non ha soluzione. Quindi $rg(A - \mathbb{I}_n) < n$ perciò 1 è autovalore di A.

Supponiamo che l'autovalore 1 abbia molteplicità algebrica k allora esiste un sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R}' = \{Q, u_1, \dots, u_n\}$ ove $u_1, \dots, u_k$ sono autovettori di autovalore 1 (perché ϕ è un'isometria quindi è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$). In tale riferimento la matrice associata a f risulta

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & {}^t0_{\mathbb{R}^{n-r}} \\ v & \mathbb{I}_r & \mathbb{O}_{n-r} \\ 0_{\mathbb{R}^{n-r}} & \mathbb{O}_{n-r} & K \end{pmatrix}$$

con $v \in \mathbb{R}^r$ e $K \in O_{n-r}(\mathbb{R})$. Quindi la retta passante per Q e parallela a v è unita e f induce una traslazione su r.

(c) No, non è vero. Ad esempio l'affinità $g : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la cui matrice nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O, e_1, e_2\}$ è

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha una retta di punti uniti di equazione cartesiana $y = -1$ e g induce sull'asse $y = 0$ una traslazione. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2013

ESERCIZIO 1. *[9 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^7$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Siano dati due interi n e $k \geq 1$ e si consideri la matrice di ordine $2k+1$ del tipo

$$B_{n,k} = \begin{pmatrix} n{+}k & 0 & & & & 0 & -k \\ 0 & \ddots & & & & \iddots & \frac{1}{k} \\ & & n{+}1 & 0 & -1 & \iddots & 0 \\ & & 0 & n & 1 & & \\ & & 1 & 0 & n{-}1 & & \\ & \iddots & & & & \ddots & 0 \\ k & 0 & & & & 0 & n{-}k \end{pmatrix} \in M_{2k+1}(\mathbb{Q})$$

Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}B_{n,k}P$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^7$ e quindi c'è solo l'autovalore 2, con molteplicità (algebrica) 7. I relativi autovettori generano il sottospazio $\ker(\phi - 2) = \langle e_4 \rangle$. Si ha quindi un solo blocco di Jordan per l'autovalore 2, necessariamente di ordine 7; dunque il polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-2)^7$.

(b) Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

si vede che, preso il vettore $v_7 = e_1$, si ha

$$v_6 = (\phi-2)(v_7) = 3e_1 + 3e_7, \quad v_5 = (\phi-2)(v_6) = e_2, \quad v_4 = (\phi-2)(v_5) = 2e_2 + 2e_6,$$
$$v_3 = (\phi-2)(v_4) = e_3, \quad v_2 = (\phi-2)(v_3) = e_3 + e_5, \quad v_1 = (\phi-2)(v_2) = e_4.$$

Dunque, e_1 è un autovettore generalizzato di periodo 7 per l'autovalore 2 e abbiamo ottenuto una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_7\}$ rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Possiamo quindi scrivere le matrici

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2&1&0&0&0&0&0 \\ 0&2&1&0&0&0&0 \\ 0&0&2&1&0&0&0 \\ 0&0&0&2&1&0&0 \\ 0&0&0&0&2&1&0 \\ 0&0&0&0&0&2&1 \\ 0&0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&3&1 \\ 0&0&0&2&1&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&3&0 \end{pmatrix}.$$

(c) Si ha $B_{n,k} = n\mathbf{1} + B_{0,k}$ quindi è suffciente studiare il caso di $B_{0,k}$, matrice nilpotente di ordine $2k+1$. Quindi la forma di Jordan di $B_{n,k}$ ha un unico blocco di ordine massimo relativo all'autovalore n; e una matrice di cambiamento di base si può costruire in modo analogo a partire dall'autovettore generalizzato e_1.

□

ESERCIZIO 2. *[11 punti] In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari:*

$$r_\alpha : \begin{cases} \alpha x_2 + x_3 = \alpha \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \alpha^2 - 1 \\ x_3 + \alpha x_4 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Determinare la posizione reciproca di r_α e s al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e eventuali punti di intersezione.*
(b) *Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste almeno una retta passante per l'origine O e complanare a r_α e s e per tali valori determinarle tutte.*
(c) *Posto $\alpha = 1$ determinare, se esiste, (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) un'affinità $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ tale che f abbia un unico punto unito, $f(r) = s$ e $f(s) = r$.*

Svolgimento. (a) Guardando al rango dei sistemi lineari, si vede che s è una retta, così come le sottovarietà r_α, per $\alpha \neq 0$. r_0 è un piano. La posizione reciproca delle sottovarietà è determinata dai ranghi del sistema lineare di matrice completa

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0 & -1 \\ 1&1&1&0 & 0 \\ 0&0&0&1 & 0 \\ 1&1&1&1 & \alpha^2-1 \\ 0&\alpha&1&0 & \alpha \\ 0&0&1&\alpha & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0 & -1 \\ 0&1&1&0 & 1 \\ 0&0&1&0 & 0 \\ 0&0&0&1 & 0 \\ 0&0&0&0 & \alpha^2-1 \\ 0&0&0&0 & 0 \end{array}\right).$$

le righe della matrice a destra sono legate alle righe della matrice di sinistra dalle relazioni $I, II - I, VI - \alpha III, III, IV - II - III, V - \alpha(II - I) + (\alpha - 1)(VI - \alpha III)$. I ranghi sono $(4, 5)$ per $\alpha^2 \neq 1$ e le due varietà sono sghembe, mentre per $\alpha \in \{-1, 1\}$, le due varietà si intersecano nel punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) Perché esista una retta per l'origine complanare con r_α e s è necessario (e sufficiente) che r_α, s e O stiano in uno stesso spazio affine tridimensionale. Ciò accade certamente se $\alpha^2 = 1$, perché le due rette appartengono a uno stesso piano, non passante per O, e quindi, in tal caso, solo la retta $O \vee P$ è complanare con entrambe.

Se $\alpha^2 \neq 1$, possiamo già escludere il caso $\alpha = 0$, perché il piano r_0 non contiene l'origine. Negli altri casi

$$r_\alpha \vee s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha-2 \\ 1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

non contiene l'origine.

(c) Per $\alpha = 1$, si ha $r_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Posto

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

L'insieme $\mathscr{R} = \{P, v_1, \dots, v_4\}$ è un riferimento affine in $\mathbb{A}^4$ e l'affinità di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$$

in tale riferimento soddisfa alle condizioni poste. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si consideri la retta*

$$t : \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(a) *Si scrivano le matrici nel riferimento canonico delle isometrie che si ottengono ruotando attorno alla retta t di angolo $\theta = \pi/3$.*
(b) *Si scriva la matrice nel riferimento canonico della riflessione σ_π di asse il piano $\pi : x - y = 1$ e si descrivano tutte le sue sottovarietà lineari unite.*
(c) *Si classifichino secondo Eulero le isometrie ottenute componendo le rotazioni al punto precedente seguite dalla riflessione σ_π.*

Svolgimento. (a) Il riferimento $\mathcal{R} = \{O', v_1, v_2, v_3\}$, ove

$$O' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

è un riferimento ortonormale che ha la retta t come terzo asse coordinato. È immediato scrivere le matrici delle due rotazioni in questo riferimento e componendole con le matrici di cambiamento di riferimento si ottengono le matrici

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice cercata è

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le sottovarietà lineari unite rispetto alla riflessione sono, oltre al piano π, piano di punti uniti, le rette e i piani ortogonali a π (un piano si dice ortogonale a π se è parallelo al vettore normale a π).

(c) La composizione di una rotazione seguita da una riflessione ha determinante -1 (Teorema di Binet). Inoltre, il piano di riflessione contiene l'asse di rotazione che è quindi costituito da punti uniti per la trasformazione composta. Questo è possibile solo se la trasformazione composta è una riflessione; i piani di riflessione si ottengono ruotando π attorno a t di $\pi/6$ (farsi un disegno della trasformazione indotta su un piano ortogonale a t). □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 settembre 2013

ESERCIZIO 1. *[9 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Si scrivano le matrici di Jordan complesse di una rototraslazione e di una glissoriflessione dello spazio euclideo tridimensionale (pensate come endomorfismi di $\mathbb{C}^4$).

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+1)^2$ e quindi vi sono gli autovalori 2 e -1, con molteplicità (algebrica) 3 e 2, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi - 2) = \langle e_3, e_2 + 2e_5 \rangle$ e $\ker(\phi + 1) = \langle e_2 - e_5 \rangle$. Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-2)^2(X+1)^2$ perché in entrambo i casi gli autovettori generalizzati hanno periodo minore o uguale a 2.

(b) Osservando che

$$A - 2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad (A-2)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

si vede che, il vettore $v_5 = 2e_1 + 2e_2 + e_4$ appartiene a $\ker(\phi-2)^2 \smallsetminus \ker(\phi - 2)$. Quindi prendiamo $v_4 = (\phi-2)(v_5) = e_3$ e $v_3 = e_2 + 2e_5$ che completano una base di autovettori generalizzati relativi all'autovalore 2. Inoltre, $\operatorname{im}(\phi-2)^2 \subseteq \ker(\phi+1)^2$ e i due sottospazi coincidono per motivi di dimensione. Quindi possiamo prendere $v_2 = 3e_1 - 2e_3 + 6e_4 \in \operatorname{im}(\phi-2)^2 = \ker(\phi+1)^2$ e $v_1 = (\phi+1)(v_2) = 6e_2 - 6e_5$. In questo modo abbiamo una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan e possiamo quindi scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Sono le matrici

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ciò perché l'applicazione lineare associata all'isometria è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ (teorema spettrale per endomorfismi normali), e vi è una traslazione non banale (parallela alle direzioni unite). Nello spazio affine e euclideo siamo abituati a usare le trasposte per l'obbligo di distinguere i punti dai vettori. $\square$

ESERCIZIO 2. *[11 punti] In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari:*

$$\pi_k : O + e_1 + e_3 + e_4 + \langle ke_1 + e_2 + ke_4, ke_2 + e_3 + e_4 \rangle \qquad \sigma : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_4 = 1 \end{cases}.$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle sottovarietà lineari π_k e σ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e eventuali punti di intersezione.

(b) *Si consideri la retta* $r = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t+2 \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. *Posto* $k = 0$ *è possibile definire la proiezione della retta* r *sulla sottovarietà lineare* σ, *parallelamente allo spazio direttore di* π_0? *Se sì, calcolarla. Posto* $k = -1$ *è possibile definire la proiezione della retta* r *sulla sottovarietà lineare* σ *parallela allo spazio direttore di* π_{-1}? *Se sì, calcolarla.*

(c) *Determinare, se esiste, (scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento) un'affinità* $f : \mathbb{A}^4(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ *tale che* $f(\pi_{-1}) = \sigma$ *e* $f(\sigma) = \pi_{-1}$.
Esiste una tale affinità che non abbia punti uniti?

Svolgimento. (a) Sostituiamo nelle equazioni di σ la rappresentazione parametrica di un punto $O+e_1+e_3+e_4+\alpha(ke_1+e_2+ke_4)+\beta(ke_2+e_3+e_4)$ di π_k, e otteniamo il sistema $\begin{cases} \beta = -1 \\ (k+1)\alpha = k-1 \end{cases}$, che ammette un'unica soluzione se $k \neq -1$, che definisce un unico punto di intersezione (le cui coordinate si ricavano dalla rappresentazione parametrica dei punti di π_k).

Per $k = -1$ non ci sono punti di intersezione e guardando ai sottospazi direttori, si trova la direzione $\langle e_1 - e_2 + e_4 \rangle$ comune ai due piani.

(b) Si ha $r = P + \langle v \rangle$, con $P = O + 2e_2 + e_3$ e $v = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$. Il sottospazio direttore di π_0 è $W_0 = \langle e_2, e_3 + e_4 \rangle$. Per trovare la proiezione della retta r, dobbiamo quindi aggiungere alle equazioni di σ, l'equazione dell'iperpiano $P + \langle v \rangle + W_0$, ovvero $X_3 - X_4 = 1$. Il sottospazio direttore di π_{-1} è $W_{-1} = \langle e_1 - e_2 + e_4, e_2 - e_3 - e_4 \rangle$; ma, questa volta, il sottospazio direttore di σ non è in somma diretta con W_{-1} e quindi *non esiste* la proiezione su σ parallelamente a W_{-1}[(†)]

(c) Il vettore $v_1 = e_1 - e_2 + e_4$ è comune ai due sottospazi direttori. Siano poi $P_0 = O + e_1 + e_3 + e_4$, $Q_0 = O - e_4$, $v_2 = e_2 - e_3 - e_4$, $v_3 = e_2 + e_3$, e $v_4 = Q_0 - P_0$, di modo che, $\pi_{-1} = P_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\sigma = Q_0 + \langle v_1, v_3 \rangle$. Possiamo considerare l'affinità che, nel riferimento $\{P_0, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, ha matrice

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&0&-1 \end{pmatrix},$$

e osservare che scambia le due varietà senza lasciare punti fissi. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^3$ *munito del sistema di riferimento* $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ *si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

(a) *Determinare la distanza fra* r *e* s, *i punti di minima distanza* $R \in r$ *e* $S \in s$ *e il coseno dell'angolo fra le due rette* r *e* s.

(b) *Determinare le equazioni cartesiane dell'unica retta* t *parallela al vettore* $v = e_1 + e_2$ *e intersecante sia* r *che* s.

(c) *Detti* $P = t \cap r$ *e* $Q = t \cap s$ *calcolare il volume del tetraedro di vertici* R, S, P, Q.

Svolgimento. (a) Siano $P_0 = O + e_1 + 3e_3$, $u = e_1 - e_2$, $Q_0 = O - e_3$, $w = 2e_1 - e_2 - e_3$, così che $r = P_0 + \langle u \rangle$ e $s = Q_0 + \langle w \rangle$. Il generico vettore differenza tra i punti delle due rette, $(P_0 + tu) - (Q_0 + sw)$, è ortogonale a entrambo le rette se, e solo se, $t = -4$ e $s = -7/3$. Per cui i punti di minima distanza sono $R = O - 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$, e $S = O - \frac{14}{3}e_1 + \frac{7}{3}e_2 + \frac{4}{3}e_3$; e la distanza tra le due rette è $\frac{5}{\sqrt{3}}$. Il coseno dell'angolo tra le due rette è $\frac{|u \cdot w|}{\|u\| \, \|w\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) Il generico punto $P_0 + tu + sv$ appartiene alla retta s se, e solo se, $s = -\frac{5}{2}$ e $t = -\frac{13}{2}$. Quindi la retta cercata è $t = P_0 - \frac{13}{2}u + \langle v \rangle$, di equazioni cartesiane $t : \begin{cases} x - y = -12 \\ z = 3 \end{cases}$.

(†) Se avessimo proceduto analogamente al caso precedente avremmo trovato comunque un iperpiano ($X_2 + X_4 = 2$) che interseca σ in una retta. Di che retta si tratta?

(c) I punti sono $P = O - \frac{11}{2}e_1 + \frac{13}{2}e_2 + 3e_3$ e $Q = O - 8e_1 + 4e_2 + 3e_3$. Il volume cercato è quindi uguale a $\frac{1}{6}\left|\frac{D(S-R,P-R,Q-R)}{D(e_1,e_2,e_3)}\right| = \frac{125}{36}$. $\square$