Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 27 novembre 2013 – Compito **A**

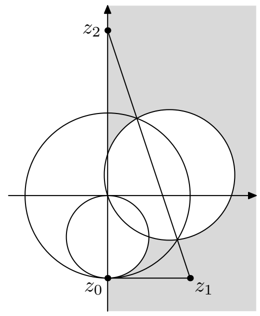
ESERCIZIO 1. *Sia* $z_0 = -i$.

(a) *Si determinino i numeri complessi* z_1 *e* z_2 *tali che* $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + i \\ z_1 z_2 = 2 + 2i \end{cases}$.

(b) *Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo* T *di vertici* z_0, z_1, z_2 *e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(c) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo* T *nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione* $\lambda_*(I)$ *ove si indichino con* I *i punti interni al triangolo* T *e con* λ *la riflessione nella circonferenza unitaria.*

Svolgimento. (a) I numeri complessi z_1 e z_2 sono le radici del polinomio $P(X) = X^2 - (1+i)X + 2 + 2i$. Dunque i tre vertici del triangolo T sono $z_0 = -i$, $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 2i$.



(b) Le rette sono (cfr. il disegno a fianco)

$$z_0 \vee z_1 : iz - i\bar{z} + 2 = 0, \qquad z_0 \vee z_2 : z + \bar{z} = 0, \qquad z_1 \vee z_2 : (3-i)z + (3+i)\bar{z} - 4 = 0$$

quindi

$$I : \begin{cases} iz - i\bar{z} + 2 > 0 \\ z + \bar{z} > 0 \\ (3-i)z + (3+i)\bar{z} - 4 < 0 \end{cases}.$$

(c) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\lambda^*(z_0 \vee z_1) : \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} + z\bar{z} = 0, \qquad \lambda^*(z_0 \vee z_2) : z + \bar{z} = 0, \qquad \lambda^*(z_1 \vee z_2) : -\frac{3-i}{4}z - \frac{3+i}{4}\bar{z} + z\bar{z} = 0$$

quindi

$$\lambda^*(I) : \begin{cases} \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} + z\bar{z} > 0, \\ z + \bar{z} > 0, \\ -\frac{3-i}{4}z - \frac{3+i}{4}\bar{z} + z\bar{z} > 0 \end{cases}.$$

La parte ombreggiata rappresenta l'insieme $\lambda_*(I)$ (escluso il bordo). $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).*

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_1 + v_4) = v_1 + 2v_3 = \phi(v_3 - v_1), \qquad e \qquad \phi(v_2 + v_4) = v_2 + 2v_4 = \phi(v_3 - v_4).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi ed equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si dica se $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, di una simmetria $\sigma : V \to V$ tale che $\sigma(\ker\phi) \subseteq \mathrm{im}\phi$ e $\sigma(\mathrm{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. È unica? Come descriverle tutte? Si determinino nucleo ed immagine di $\phi \circ \sigma$, $\sigma \circ \phi \circ \sigma$ e $\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma$. Questi sottospazi dipendono dalla scelta di σ?

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + v_4$, $v_1 - v_3$, $v_2 + v_4$, $v_3 - v_4$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di V. Perciò esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to V$ soddisfacente alle condizioni date. La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\ker\phi = \langle 2v_1 - v_3 + v_4, v_2 - v_3 + 2v_4 \rangle$, e $\mathrm{im}\,\phi = \langle v_2 + 2v_4, v_1 + 2v_3 \rangle$. Due sistemi di equazioni cartesiane sono

$$\mathrm{im}\,\phi : \begin{cases} 2X_2 - X_4 = 0 \\ 2X_1 - X_3 = 0 \end{cases}, \qquad \ker\phi : \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_1 + 4X_2 - 2X_4 = 0 \end{cases}.$$

(b) Si verifica facilmente (come?) che $\ker\phi \cap \mathrm{im}\,\phi = \langle 0 \rangle$; quindi $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\,\phi$ e possiamo considerare la base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, ove

$$w_1 = v_1 + 2v_3, \quad w_2 = v_2 + 2v_4, \quad w_3 = 2v_1 - v_3 + v_4, \quad w_4 = v_2 - v_3 + 2v_4$$

e quindi $\mathrm{im}\,\phi = \langle w_1, w_2 \rangle$ e $\ker\phi = \langle w_3, w_4 \rangle$. In questa base, una simmetria che scambi i due sottospazi ha matrice

$$B' = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

e ogni altra, in base $\mathcal{W}$, ha matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & X^{-1} \\ X & 0 \end{smallmatrix}\right)$, al variare di X in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$ (perché?). Le matrici di cambiamento di base sono

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & -9 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -1 & -5 \end{pmatrix};$$

quindi la matrice cercata è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma) = PB'P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Infine, osserviamo che, essendo $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\,\phi$, ϕ induce un isomorfismo sul sottospazio $\mathrm{im}\,\phi$. Quindi

- $\ker(\phi \circ \sigma) = \mathrm{im}\,\phi$ e $\mathrm{im}\,(\phi \circ \sigma) = \mathrm{im}\,\phi$;
- $\ker(\sigma \circ \phi \circ \sigma) = \mathrm{im}\,\phi$ e $\mathrm{im}\,(\sigma \circ \phi \circ \sigma) = \ker\phi$;
- $\ker(\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma) = V$ e $\mathrm{im}\,(\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma) = \langle 0 \rangle$.

Ciò accade qualunque sia la simmetria σ che scambi tra loro i due sottospazi. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e siano U e W due sottospazi di dimensione h e k, rispettivamente.*

(a) Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{D} = \{ \phi \in Hom_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U) \subseteq W, \phi(W) \subseteq U \}$$

è un sottospazio di $Hom_{\mathbb{C}}(V, V)$. Si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ e un sottospazio complementare nell'ipotesi che $V = U \oplus W$.

(b) Si risponda alle domande del punto precedente nel caso di due sottospazi qualsiansi. In particolare si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} U = 10$, $\dim_{\mathbb{C}} W = 13$, $\dim_{\mathbb{C}} U \cap W = 5$ e si dica se è maggiore o minore di quella di un suo complementare.

Svolgimento. (a) Poiché U e W sono sottospazi di V, è chiaro che $0 \in \mathscr{D}$ e, date ϕ_1 e ϕ_2 in $\mathscr{D}$ e a_1, a_2 in $\mathbb{C}$, si ha che $a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ appartiene a $\mathscr{D}$. Quindi $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$.

Se $V = U \oplus W$, possiamo prendere una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V per cui $\mathcal{U} = \{v_1, \dots, v_h\}$ sia una base di U e $\mathcal{W} = \{ v_{h+1}, \dots, v_n \}$ sia una base di W. Considerando le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, al variare di $\phi \in \mathscr{D}$, si vede facilmente che $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D} = 2hk$ e che un complementare è il sottospazio $\mathscr{D}' = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U) \subseteq U, \phi(W) \subseteq W \}$.

(b) Nel caso generale, sia $d = \dim(U \cap W)$ e possiamo decomporre lo spazio V nella somma diretta $V = U' \oplus (U \cap W) \oplus W' \oplus T$, ove $U = U' \oplus (U \cap W)$, $W = (U \cap W) \oplus W'$ e T è un sottospazio complementare di $U + W$. Si ha dunque

$$\dim U' = h' = h - d, \quad \dim W' = k' = k - d, \quad \dim T = t = n - h - k + d.$$

Prendendo una base di V fatta giustapponendo delle basi degli addendi diretti e considerando le matrici degli elementi di $\mathscr{D}$ in tale base, si vede facilmente che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D} = h'k + d^2 + k'h + tn.$$

In particolare, un complementare è il sottospazio

$$\mathscr{D}' = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U') \subseteq U' \oplus T,\ \phi(U \cap W) \subseteq U' \oplus W' \oplus T,\ \phi(W') \subseteq W' \oplus T,\ \phi(T) \subseteq \langle 0 \rangle \}.$$

Nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} U = 10$, $\dim_{\mathbb{C}} W = 13$ e $\dim_{\mathbb{C}} U \cap W = 5$, si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{D} = 210$ che è maggiore di quella di un suo complementare, essendo $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) = 400$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 novembre 2013 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Sia $z_0 = i/2$.

(a) Si determinino i numeri complessi z_1 e z_2 tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 + 2i \\ z_1 z_2 = -3/4 + 3i \end{cases}$.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo T di vertici z_0, z_1, z_2 e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo T nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni al triangolo T e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_1 + v_2) = v_2 + 2v_4 = \phi(v_4 - v_2), \qquad \text{e} \qquad \phi(v_1 + v_3) = 2v_1 + v_3 = \phi(v_4 - v_1).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi ed equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, di una simmetria $\sigma : V \to V$ tale che $\sigma(\ker\phi) \subseteq \operatorname{im}\phi$ e $\sigma(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. È unica? Come descriverle tutte? Si determinino nucleo ed immagine di $\phi \circ \sigma$, $\sigma \circ \phi \circ \sigma$ e $\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma$. Questi sottospazi dipendono dalla scelta di σ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e siano U e W due sottospazi di dimensione h e k, rispettivamente.

(a) Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{D} = \{ \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U) \subseteq U, \phi(W) \subseteq W \}$$

è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ e un sottospazio complementare nell'ipotesi che $V = U \oplus W$.

(b) Si risponda alle domande del punto precedente nel caso di due sottospazi qualsiansi. In particolare si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} U = 10$, $\dim_{\mathbb{C}} W = 13$, $\dim_{\mathbb{C}} U \cap W = 5$ e si dica se è maggiore o minore di quella di un suo complementare.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 novembre 2013 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Sia $z_0 = 1$.

(a) Si determinino i numeri complessi z_1 e z_2 tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 + i \\ z_1 z_2 = -2 - 2i \end{cases}$.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo T di vertici z_0, z_1, z_2 e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo T nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni al triangolo T e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_2 + v_3) = 2v_1 + v_3 = \phi(v_1 - v_3), \qquad \text{e} \qquad \phi(v_2 + v_4) = 2v_2 + v_4 = \phi(v_1 - v_2).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi ed equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, di una simmetria $\sigma : V \to V$ tale che $\sigma(\ker\phi) \subseteq \operatorname{im}\phi$ e $\sigma(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. È unica? Come descriverle tutte? Si determinino nucleo ed immagine di $\phi \circ \sigma$, $\sigma \circ \phi \circ \sigma$ e $\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma$. Questi sottospazi dipendono dalla scelta di σ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e siano U e W due sottospazi di dimensione h e k, rispettivamente.

(a) Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{D} = \{\, \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U) \subseteq W, \phi(W) \subseteq U \,\}$$

è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ e un sottospazio complementare nell'ipotesi che $V = U \oplus W$.

(b) Si risponda alle domande del punto precedente nel caso di due sottospazi qualsiansi. In particolare si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} U = 14$, $\dim_{\mathbb{C}} W = 11$, $\dim_{\mathbb{C}} U \cap W = 7$ e si dica se è maggiore o minore di quella di un suo complementare.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 novembre 2013 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Sia $z_0 = -\frac{3}{2}$.

(a) Si determinino i numeri complessi z_1 e z_2 tali che $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 - 2i \\ z_1 z_2 = \frac{1}{4} + i \end{cases}$.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del triangolo T di vertici z_0, z_1, z_2 e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo T nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni al triangolo T e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base (ordinata).

(a) Dire se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che

$$\phi(v_3 + v_4) = 2v_2 + v_4 = \phi(v_2 - v_4), \qquad \text{e} \qquad \phi(v_1 + v_3) = v_1 + 2v_3 = \phi(v_2 - v_3).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ e si determinino delle basi ed equazioni cartesiane per nucleo e immagine di ϕ.

(b) Si dica se $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\phi$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice, nella base $\mathcal{V}$, di una simmetria $\sigma : V \to V$ tale che $\sigma(\ker\phi) \subseteq \operatorname{im}\phi$ e $\sigma(\operatorname{im}\phi) \subseteq \ker\phi$. È unica? Come descriverle tutte? Si determinino nucleo ed immagine di $\phi \circ \sigma$, $\sigma \circ \phi \circ \sigma$ e $\phi \circ \sigma \circ \phi \circ \sigma$. Questi sottospazi dipendono dalla scelta di σ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$ e siano U e W due sottospazi di dimensione h e k, rispettivamente.

(a) Si mostri che l'insieme

$$\mathscr{D} = \{ \phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V) \mid \phi(U) \subseteq U, \phi(W) \subseteq W \}$$

è un sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}}(V, V)$. Si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ e un sottospazio complementare nell'ipotesi che $V = U \oplus W$.

(b) Si risponda alle domande del punto precedente nel caso di due sottospazi qualsiansi. In particolare si determini la dimensione di $\mathscr{D}$ nel caso in cui $\dim_{\mathbb{C}} V = 20$, $\dim_{\mathbb{C}} U = 14$, $\dim_{\mathbb{C}} W = 11$, $\dim_{\mathbb{C}} U \cap W = 7$ e si dica se è maggiore o minore di quella di un suo complementare.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 24 gennaio 2014

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ delle rispettive basi. Siano date inoltre le applicazioni lineari, $\phi : V \to W$, $\beta : V \to V$, $\gamma : W \to W$, di matrici*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino gli elementi degli insiemi*

$$\mathscr{L}_\beta = \{ \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(W, V) \mid \xi \circ \phi = \beta \} \qquad e \qquad \mathscr{R}_\gamma = \{ \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(W, V) \mid \phi \circ \xi = \gamma \}$$

e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) *Siano ora V e W spazi vettoriali di dimensione n ed m, rispettivamente, sul campo $\mathbb{F}_{47}$ e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare di rango r. Si determini il numero di elementi dell'insieme $\mathscr{L}_\beta$ nell'ipotesi che $\beta : V \to V$ sia un isomorfismo di spazi vettoriali. Si determini il numero di elementi dell'insieme $\mathscr{R}_\gamma$ al variare di γ in $Hom_{\mathbb{F}_{47}}(W, W)$.*

Svolgimento. (a) Detta $X = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi)$ la matrice di ξ, si ha che $\xi \in \mathscr{L}_\beta$ se, e solo se, $XA = B$; mentre $\xi \in \mathscr{R}_\gamma$ se, e solo se, $AX = C$. Si possono quindi risolvere i sistemi lineari che si deducono da queste relazioni.

Evitando calcoli tediosi, possiamo osservare che $\mathscr{R}_\gamma = \varnothing$, perché $\operatorname{rk}\gamma = 3$, mentre per ogni ξ, $\operatorname{rk}(\phi \circ \xi) \leq \operatorname{rk}\phi = 2$. Per quanto riguarda $\mathscr{L}_\beta$, una soluzione particolare è data dalla matrice $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$, mentre le soluzioni del sistema omogeneo associato sono matrici le cui righe appartengono all'ortogonale delle colonne di A, ovvero le matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & a & 3a \\ b & b & 3b \end{pmatrix}$, al variare di a e b in $\mathbb{Q}$. Dunque $\xi \in \mathscr{L}_\beta$ se, e solo se,

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\xi) = \begin{pmatrix} a - 1/3 & a + 2/3 & 3a \\ b + 2/3 & b - 1/3 & 3b \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Q}.$$

(b) $\mathscr{L}_\beta \neq \varnothing$ se, e solo se, ϕ, come β, è iniettiva; ovvero se, e solo se, $r = \operatorname{rk}\phi = n \leq m$. In tal caso ξ è univocamente determinata sul sottospazio $\operatorname{im}\phi$ e può essere definita arbitrariamente in un sottospazio complementare U. Dunque, $\mathscr{L}_\beta$ ha tanti elementi quanti ne ha lo spazio $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{47}}(U, V)$, ovvero $47^{(m-n)n}$.

Al variare di γ in $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{47}}(W, W)$, vi sono due diverse possibilità: o $\operatorname{im}\gamma$ non è contenuta in $\operatorname{im}\phi$, e quindi $\mathscr{R}_\gamma = \varnothing$; oppure $\operatorname{im}\gamma \subseteq \operatorname{im}\phi$ e in $\mathscr{R}_\gamma$ vi sono tanti elementi quanti ve ne sono nello spazio vettoriale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{47}}(W, \ker\phi)$ (perché?). In tal caso, il numero di elementi in $\mathscr{R}_\gamma$ è $47^{(n-r)m}$. □

ESERCIZIO 2. [14 punti] *Si consideri uno spazio vettoriale complesso V e una sua base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$. Siano dati i sottospazi*

$$S = \{ x_1v_1 + \cdots + x_4v_4 \in V \mid x_2 - x_3 = 0 \} \quad e \quad U = \langle iv_1 + v_2 - v_3 + iv_4, 4v_1 - 2v_2 + 2v_3 - 2iv_4 \rangle .$$

(a) *Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi S, U, $U \cap S$ e $U + S$. Si determini, se esiste, un sottospazio S' di S tale che $V = S' \oplus U$. Un tale sottospazio è unico?*

(b) *Si determinino i sottospazi $S^\perp$, $U^\perp$, $U^\perp \cap S^\perp$ e si dica se $U^\perp + S^\perp = V^*$. In ogni caso, posto $H = U^\perp + S^\perp$, si determini un sottospazio K tale che $V^* = H \oplus K$. Un tale sottospazio è unico?*

(c) *Si indichino con $\pi_H : V^* \to V^*$ e $\pi_K : V^* \to V^*$ le proiezioni associate alla decomposizione $V^* = H \oplus K$. Si calcoli il determinante dell'endomorfismo $2\pi_H - 3\tau\pi_K$ al variare di τ in $\mathbb{C}$ e si dica per quali valori di τ l'endomorfismo è diagonalizzabile.*

Svolgimento. (a) $\dim S = 3$ e una sua base è data dai vettori $v_1, v_2 + v_3, v_4$. $\dim U = 2$ e i due generatori dati sono una base. $S \cap U = \langle v_1 \rangle$. Quindi, per le relazioni di Grassmann, $U + S = V$. Infine, il sottospazio

S' deve soddisfare la condizione $S' \oplus (S \cap U) = S$; quindi possiamo prendere $S' = \langle v_2 + v_3, v_4 \rangle$; ma tale sottospazio non è unico e ogni sottospazio del tipo $\langle v_2 + v_3 + av_1, v_4 + bv_1 \rangle$, con a e b in $\mathbb{C}$, può essere preso in luogo di S'.

(b) Allora,

$$S^\perp = \langle v_2^* - v_3^* \rangle\,, \quad U^\perp = \langle v_2^* + v_3^*, iv_3^* + v_4^* \rangle\,, \quad U^\perp \cap S^\perp = (U + S)^\perp = \langle 0 \rangle$$
$$U^\perp + S^\perp = (S \cap U)^\perp = \langle v_1 \rangle^\perp = \langle v_2^*, v_3^*, v_4^* \rangle \neq V^*.$$

Possiamo quindi prendere $K = \langle v_1^* \rangle$. La scelta non è unica e ogni sottospazio del tipo $\langle v_1^* + av_2^* + bv_3^* + cv_4^* \rangle$, con a, b, c in $\mathbb{C}$, può essere preso in luogo di K.

(c) L'endomorfismo ha matrice $\alpha_{\mathcal{V}^*,\mathcal{V}^*}(2\pi_H - 3\tau\pi_K) = \begin{pmatrix} -3\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dunque $\det(2\pi_H - 3\tau\pi_K) = -24\tau$ e l'endomorfismo è diagonalizzabile per tutti i valori di τ. □

ESERCIZIO 3. [8 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$.*

(a) Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$\phi(e_1 - 3e_3) = 2e_1 - 6e_3 = \phi(e_1 - 2e_3) \qquad e \qquad \phi(2e_2 - e_4) = 2e_4 - 4e_2 = \phi(3e_2 - e_4).$$

In caso affermativo, si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ e se ne calcoli il polinomio caratteristico.

(b) Si consideri l'endomorfismo $F : M_4(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ definito ponendo $F(X) = (\mathbf{1} - A)X$, per ogni $X \in M_4(\mathbb{R})$, ove A è la matrice del punto precedente oppure la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nel caso in cui l'applicazione lineare ϕ non esista. Si calcoli il polinomio caratteristico di F, autovalori e relativi spazi di autovettori.

Svolgimento. (a) I vettori $e_1 - 3e_3$, $e_1 - 2e_3$, $2e_2 - e_4$ e $3e_2 - e_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi esiste un'unica applicazione lineare ϕ soddisfacente alle condizioni date. La sua matrice è $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = X^2(X-2)(X+2)$.

(b) La matrice $\mathbf{1} - A$ è diagonalizzabile e ha gli autovalori -1, 1 e 3, con molteplicità algebriche (e geometriche) 1, 2 e 1, rispettivamente. Dunque, F ha gli stessi autovalori con molteplicità 4, 8 e 4, rispettivamente; per cui $p_F(X) = (X+1)^4(X-1)^8(X-3)^4$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 30 gennaio 2014

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = (X-1)(X^2 - (1+4i)X - 4 + 2i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si determinino si disegnino nel piano di Gauss le rette reali contenenti almeno due radici di* $P(X)$ *e se ne scrivano le equazioni in termini di* z *e* $\bar{z}$.

(b) *Sia* $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino centro e raggio delle circonferenze* $\lambda^*(r)$ *ove* r *varia tra le rette del punto precedente. Detto* T *il poligono convesso delimitato dalle rette del punto precedente, si disegnino le circonferenze* $\lambda^*(r)$ *e si evidenzi la differenza simmetrica* $T \triangle \lambda^*(T) = (T \cup \lambda^*(T)) \smallsetminus (T \cap \lambda^*(T))$.

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.

(a) Si ha $P(X) = (X-1)(X^2 - (1+4i)X - 4 + 2i) = (X-1)(X-2i)(X-1-2i)$. Le radici sono quindi $z_1 = 1$, $z_2 = 1+2i$ e $z_3 = 2i$. I lati del triangolo con tali vertici sono le rette

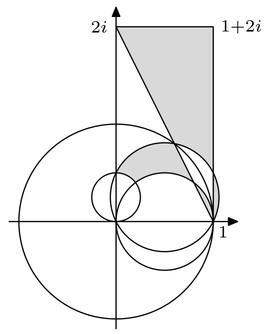
$$r_1 : -iz + i\bar{z} = 4; \qquad r_2 : (2-i)z + (2+i)\bar{z} = 4; \qquad r_3 : z + \bar{z} = 2.$$

(b) Le circonferenze riflesse sono quindi

$$\lambda^*(r_1) : 4z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left| z - \frac{i}{4} \right| = \frac{1}{4}$$

$$\lambda^*(r_2) : 4z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left| z - \frac{2-i}{4} \right| = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\lambda^*(r_3) : 2z\bar{z} - z - \bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$



e sono rappresentate nella figura qui a fianco.

Il triangolo T è il luogo dei punti definiti dalle condizioni

$$T : \begin{cases} -iz + i\bar{z} \le 4 \\ (2-i)z + (2+i)\bar{z} \ge 4 \\ z + \bar{z} \le 2 \end{cases}; \qquad \text{e quindi} \qquad \lambda^*(T) : \begin{cases} 4z\bar{z} + iz - i\bar{z} \ge 0 \\ 4z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} \le 0 \\ 2z\bar{z} - z - \bar{z} \ge 0 \end{cases}$$

da cui si deduce la differenza simmetrica evidenziata in grigio nel disegno. $\square$

ESERCIZIO 2. [8 punti] *Si consideri lo spazio vettoriale* $\mathbb{Q}^5$ *con la base canonica* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ *e siano dati i sottospazi*

$$U = \langle e_1 - e_2 + e_3, e_1 - e_2 + e_4 - e_5, e_3 - e_4 + e_5 \rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_4 = 0 \\ X_2 - X_4 + X_5 = 0 \\ X_1 - 2X_2 + 2X_4 - X_5 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino le dimensioni e una base per i sottospazi* U *e* W. *Nel caso in cui* $\mathbb{Q}^5 = U \oplus W$, *si scriva la matrice della proiezione,* $\pi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *sul sottospazio* U, *parallelamente al sottospazio* W.

(b) *Si scrivano le matrici in base canonica di tutte le applicazioni lineari* $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ *tali che* $\ker\phi = W$ *e* $\mathrm{im}\phi = U$. *Tali matrici formano un sottospazio di* $M_5(\mathbb{Q})$? *In ogni caso, si determini il sottospazio generato da tali matrici e la sua dimensione.*

Svolgimento. (a) Detti u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U, si ha $u_1 - u_2 - u_3 = 0$ e quindi U ha dimensione 2 e una sua base è data dai vettori $u_1 = e_1 - e_2 + e_3$ e $u_3 = e_3 - e_4 + e_5$.

Le tre equazioni che definiscono W sono dipendenti ($III = I - II$) e quindi il rango del sistema lineare è 2, per cui $\dim W = 3$ e una sua base è data dai vettori $w_1 = e_3$, $w_2 = e_2 - e_4$, $w_3 = e_1 + e_2 - e_5$.

Si ha $U \cap W = \langle 0 \rangle$ (come si verifica?) e quindi, per la regola di Grassmann $\mathbb{Q}^5 = U \oplus W$. La proiezione π ha quindi matrice (come si può calcolare?)

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Presa la base $\mathcal{V} = \{u_1, u_3, w_1, w_2, w_3\}$ (o una qualunque altra base con i primi due elementi in U e gli altri tre in W), le matrici di ϕ sono della forma

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

Non può quindi essere un sottospazio (perché non contiene la matrice nulla). Il sottospazio generato ha dimensione 4 ed è fatto da tutte le matrici della forma indicata, senza condizioni sul minore $ad - bc$. Il sottospazio delle corrispondenti matrici in base canonica si ottiene da questo tramite un isomorfismo di $M_5(\mathbb{Q})$ (associato al cambiamento di base tra $\mathcal{E}$ e $\mathcal{V}$) e quindi non cambia la dimensione. In particolare, in base canonica, le matrici delle applicazioni ϕ cercate hanno la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con } ad - bc \neq 0.$$

(spiegare il perché!). □

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Sia V lo spazio vettoriale reale dei polinomi $P(X) \in \mathbb{R}[X]$ di grado minore o uguale a 4, con la base (canonica) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, e si consideri l'applicazione $\phi : V \to V$, definita ponendo $\phi(P(X)) = \sum_{i=0}^{4} P(i)X^i$ per ogni $P(X) \in V$.*

(a) Si verifichi che ϕ è un'applicazione lineare, si scriva la matrice $B = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi)$ e si calcoli $\det \phi$.

(b) Sia $\phi^*; V^* \to V^*$ l'applicazione trasposta di ϕ. È vero che esiste un vettore $v^* \in V^*$ tale che $\phi^*(v^*) = v^*$? In caso affermativo se ne scrivano le coordinate nella base duale $\mathcal{B}^*$ della base $\mathcal{B}$.

Svolgimento. (a) L'applicazione ϕ è lineare, perché, per ogni $c \in \mathbb{R}$, l'applicazione $P(X) \mapsto P(c)$ è un'applicazione lineare. Con un calcolo diretto, si ottiene la matrice di ϕ, ovvero

$$B = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix},$$

che è la trasposta di una matrice di Vandermonde. Il suo determinante è quindi $V(0,1,2,3,4) = (4!)(3!)(2!) = 2^5 3^2 = 288$.

(b) La matrice di ϕ^* nella base duale $\mathcal{B}^* = \{\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$ è ${}^tB = \alpha_{\mathcal{B}^*,\mathcal{B}^*}(\phi^*)$. Quindi $\phi^*(\partial_0) = \partial_0$. □

ESERCIZIO 4. [10 punti] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, n, su un campo C e siano dati dei sottospazi $U_0, \dots, U_4$ tali che $\langle 0 \rangle = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset U_4 = V$, ove tutte le inclusioni sono inclusioni proprie. Si ponga $k_i = \dim_C U_i$, per $i = 0, \dots, 4$.*

(a) *Si dica se è un sottospazio l'insieme $\mathscr{A}$ (risp. $\mathscr{B}$) delle applicazioni lineari $\phi : V \to V$ tali che $\phi(U_i) \subseteq U_{i-1}$ (risp. $\phi(U_i) = U_{i-1}$) per $i = 1, \dots, 4$ e se ne calcoli l'eventuale dimensione.*

(b) *Sia $\phi \in \mathscr{A}$. Cosa si può dire degli autovalori di ϕ? Che relazioni ci sono tra i sottospazi $U_i^\perp$ di V^* e le loro immagini tramite l'applicazione trasposta $\phi^* : V^* \to V^*$?*

(c) *Si dia l'esempio di un'applicazione lineare $\phi \in \mathscr{A}$, di rango massimo, nell'ipotesi in cui $k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $k_3 = 8$, $k_4 = 10$. Si può prendere una tale ϕ in $\mathscr{B}$? Si determinino i possibili valori di k_2, k_3, k_4, sapendo che $k_1 = 3$ ed esiste un'applicazione lineare $\phi \in \mathscr{B}$.*

Svolgimento. (a) Per $i = 1, \dots, 4$, si fissino dei sottospazi W_i tali che $U_i = W_i \oplus U_{i-1}$. Si osservi che $U_1 = W_1$, $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_4$ e $\dim W_i = k_i - k_{i-1}$, per $i = 1, \dots, 4$. Presa una base $\mathcal{W}$ di V, ottenuta unendo delle basi dei sottospazi W_i, le matrici $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$, per $\phi \in \mathscr{A}$ hanno la forma (a blocchi)

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & A & B & D \\ 0 & 0 & C & E \\ 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathscr{A}$ è un sottospazio di dimensione $k_1(k_2 - k_1) + k_2(k_3 - k_2) + k_3(k_4 - k_3)$; mentre $\mathscr{B}$ non può essere un sottospazio perché non contiene l'applicazione nulla.

(*b*) Se $\phi \in \mathscr{A}$, per ogni $v \in V = U_4$, si ha $\phi^4(v) \in U_0 = \langle 0 \rangle$. Quindi $\phi^4(v) = 0$ per ogni $v \in V$ e perciò non ci possono essere autovalori non nulli per ϕ (ugualmente, si può calcolare il polinomio caratteristico di ϕ usando la matrice triangolare B). Quindi ϕ ha solo l'autovalore 0.

Infine, se $x^* \in U_i^\perp$ e $y \in U_{i+1}$, si ha $\phi^*(x^*) \circ y = x^* \circ \phi(y) = 0$, perché $\phi(U_{i+1}) \subseteq U_i$. Dunque, per $i = 0, \dots, 3$, deve aversi $\phi^*(U_i^\perp) \subseteq U_{i+1}^\perp$, per ogni $\phi \in \mathscr{A}$.

(*c*) Si può prendere l'applicazione lineare di matrice

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 7. Chiaramente una tale applicazione lineare non può appartenere a $\mathscr{B}$, perché si ha $\dim \phi(U_2) \leq \dim U_2 - \dim U_1 = 2 < \dim U_1$.

Infine, perché la matrice B sia la matrice di un elemento di $\mathscr{B}$, deve aversi $\operatorname{rk} A = k_1$, $\operatorname{rk} C = k_2 - k_1$ e $\operatorname{rk} F = k_3 - k_2$. Per cui deve aversi $k_2 \geq 2k_1$, $k_3 \geq 2k_2 - k_1$, $k_4 \geq 2k_3 - k_2$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 febbraio 2014 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = (X - 2i)(X^2 + (2 - i)X + 3 - i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino si disegnino nel piano di Gauss le rette reali contenenti almeno due radici di $P(X)$ *e se ne scrivano le equazioni in termini di* z *e* $\bar{z}$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nella circonferenza unitaria e sia* $\mu : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *l'applicazione* $\mu(z) = \frac{1}{z}$. *Si determinino centro e raggio delle circonferenze* $\lambda^*(r)$ *e* $\mu^*(r)$ *ove* r *varia tra le rette del punto precedente. Detto* T *il poligono convesso delimitato dalle rette del punto precedente, si disegnino le circonferenze* $\lambda^*(r)$ *e* $\mu^*(r)$ *e si evidenzi la differenza simmetrica* $\mu^*(T) \triangle \lambda^*(T) = (\mu^*(T) \cup \lambda^*(T)) \smallsetminus (\mu^*(T) \cap \lambda^*(T))$.

Svolgimento. Ricordiamo che la riflessione rispetto alla circonferenza unitaria è l'applicazione $\lambda(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, definita per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(a) Si ha $P(X) = (X - 2i)(X^2 + (2 - i)X + 3 - i) = (X - 2i)(X + 1 - 2i)(X + 1 + i)$. Le radici sono quindi $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 + 2i$ e $z_3 = -1 - i$. I lati del triangolo con tali vertici sono le rette

$$r_1 : iz - i\bar{z} + 4 = 0; \qquad r_2 : (3 + i)z + (3 - i)\bar{z} + 4 = 0; \qquad r_3 : z + \bar{z} + 2 = 0.$$

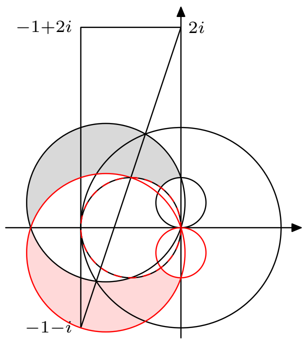
(b) Le circonferenze riflesse nella circonferenza unitaria sono quindi

$$\lambda^*(r_1) : 4z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left|z - \frac{i}{4}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\lambda^*(r_2) : 4z\bar{z} + (3 + i)z + (3 - i)\bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left|z + \frac{3 - i}{4}\right| = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\lambda^*(r_3) : 2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0; \quad \text{ovvero} \quad \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

e sono rappresentate nella figura qui a fianco.



Le applicazioni λ e μ si ottengono l'una dall'altra componendo con il coniugio; quindi le circonferenze $\mu^*(r_i)$ si ottengono riflettendo le circonferenze precedenti sull'asse reale Il triangolo T è il luogo dei punti definiti dalle condizioni $T : \begin{cases} iz - i\bar{z} + 4 \geq 0 \\ (3 + i)z + (3 - i)\bar{z} + 4 \leq 0 \\ z + \bar{z} + 2 \geq 0 \end{cases}$ e quindi le regioni riflesse sono

$$\lambda^*(T) : \begin{cases} 4z\bar{z} + iz - i\bar{z} \geq 0 \\ 4z\bar{z} + (3 + i)z + (3 - i)\bar{z} \leq 0 \\ 2z\bar{z} + z + \bar{z} \geq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mu^*(T) : \begin{cases} 4z\bar{z} - iz + i\bar{z} \geq 0 \\ 4z\bar{z} + (3 - i)z + (3 + i)\bar{z} \leq 0 \\ 2z\bar{z} + z + \bar{z} \geq 0 \end{cases}$$

da cui si deduce la figura; ove sono state indicate in rosso le circonferenze riflesse tramite l'applicazione μ e in nero quelle riflesse tramite λ. La differenza simmetrica è quindi evidenziata in rosso e in grigio nel disegno.

□

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Siano V e W spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi. Si determini il sottoinsieme S di V formato dai vettori le cui coordinate nella base $\mathcal{V}$ sono soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} 3X_1 - 2X_3 - X_5 = 3 \\ X_1 + 3X_2 - X_4 - X_5 = 2 \\ X_1 + X_2 - X_5 = 1 \\ X_1 - 2X_3 - X_4 + X_5 = 2 \end{cases}.$$

(a) *Indicata con $(A|b)$ la matrice completa del sistema dato, sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice A nelle basi date e sia $w_0 \in W$ il vettore di coordinate (nella base $\mathcal{W}$) uguali alla colonna dei termini noti. Data una base del sottospazio $\langle w_0 \rangle^\perp \subset W^*$, si consideri il sottospazio U di V^* generato dalle forme $\phi^*(\xi)$, al variare di ξ nella base data di $\langle w_0 \rangle^\perp$. Si determini la dimensione, k, e una base per il sottospazio U. È vero che $U = \left\langle \phi^{-1}(w_0) \right\rangle^\perp$?*

(b) *È vero che esiste una base di $\langle w_0 \rangle^\perp$ tale che le immagini tramite ϕ^* dei primi k vettori di base sia una base di U e i rimanenti siano una base del nucleo di ϕ^*? In caso affermativo determinare una tale base. Come si possono trovare tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno come soluzione il sottospazio $\langle S \rangle$? Che dimensione ha il sottospazio generato dalle matrici di questi sistemi lineari?*

(c) *Si scriva l'omomorfismo $\phi : V \to W$, come composizione $j \circ p$, con $p : V \to V/\ker\phi$ suriettiva e $j : V/\ker\phi \to W$ iniettiva. Si fissi una base $\mathcal{U}$ dello spazio $V/\ker\phi$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(p)$ e $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(j)$.*

Svolgimento. Le soluzioni del sistema sono l'insieme (sottovarietà lineare)

$$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(a) Si ha $\dim \langle w_0 \rangle^\perp = \dim W - 1 = 3$. Sia ξ_1, ξ_2, ξ_3 una base del sottospazio $\langle w_0 \rangle^\perp$ di W^*. Allora, per la formula delle dimensioni, si ha

$$k = \dim U = \dim \langle w_0 \rangle^\perp - \dim(\langle w_0 \rangle^\perp \cap \ker\phi^*).$$

Osservando che $\ker\phi^* = (\operatorname{im}\phi)^\perp$ e quindi che, se $\xi \in \ker\phi^*$, si ha $\xi \circ w_0 = \xi \circ \phi(s)$, per qualche $s \in S$; e quindi $\xi \circ \phi(s) = \phi^*(\xi) \circ s = 0$, per cui $\ker\phi^* \subseteq \langle w_0 \rangle^\perp$. Si conclude che $k = \dim \langle w_0 \rangle^\perp - \dim\ker\phi^* = 2$. Una base per il sottospazio U, si ottiene, ad esempio, prendendo le immagini tramite ϕ^* delle forme lineari $w_1^* - 3w_3^*$ e $2w_1^* - 3w_4^*$; ovvero, $-3v_2^* - 2v^*3 + 2v_5^*$ e $3v_1^* + 2v_3^* + 3v_4^* - 5v_5^*$.

In generale, è vero che $\phi^*(\langle w_0 \rangle^\perp) = \left\langle \phi^{-1}(w_0) \right\rangle^\perp$. Infatti, presa comunque $\xi \in \langle w_0 \rangle^\perp$ e $s \in \phi^{-1}(w_0)$, si ha $\phi^*(\xi) \circ s = \xi \circ \phi(s) = \xi \circ w_0 = 0$.

(b) Essendo $\ker\phi^* \subseteq \langle w_0 \rangle^\perp$, una tale base esiste e possiamo ottenerla, aggiungendo alle due forme lineari $w_1^* - 3w_3^*$, $2w_1^* - 3w_4^*$ la forma

$$(2w_1^* - 3w_2^*) - 3(w_1^* - 3w_3^*) - (2w_1^* - 3w_4^*) = -3w_1^* - 3w_2^* + 9w_3^* + 3w_4^*.$$

Trovare tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno come soluzione il sottospazio $\langle S \rangle$ è equivalente a trovare tutte le basi del sottospazio $U = \langle S \rangle^\perp$. Le matrici di questi sistemi lineari hanno quindi la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{al variare di } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}).$$

Queste matrici non formano un sottospazio, e il sottospazio generato ha dimensione 4 (dimensione del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ generato da $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$).

(c) Le ultime tre colonne della matrice A sono linearmente indipendenti e, possiamo scrivere la prime due come combinazione lineare di quest'ultime. Si ha quindi

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ciò significa che, presi $v_3 + \ker\phi$, $v_4 + \ker\phi$, $v_5 + \ker\phi$, come base, $\mathcal{U}$, del quoziente $V/\ker\phi$; il fattore di destra nel prodotto è la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(p)$ della proiezione canonica $p : V \to V/\ker\phi$. Il fattore di sinistra è la matrice $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(j)$ dell'applicazione $j : V/\ker\phi \to W$, definita da $j(x + \ker\phi) := \phi(x)$, per ogni elemento $x + \ker\phi$ del quoziente $V/\ker\phi$. □

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Si considerino le matrici $K_n \in M_n(\mathbb{R})$ della forma*

$$K_n = -2\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(j,j) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(j,j+1) - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(j+1,j) + 2\sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon(j+2,j)$$

ove $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i,j \le n \,\}$ è la base canonica dello spazio vettoriale reale $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Si scrivano le matrici K_3, K_4, K_5, K_6 e se ne calcoli il determinante.

(b) Indicato con d_n il determinante della matrice K_n, si ricavi una relazione ricorsiva lineare tra i valori di tali determinanti.

(c) Si scriva in modo esplicito il determinante d_n in funzione dell'intero n.

Svolgimento. (a) Si ha

$$K_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad K_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad K_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad K_6 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

e, con calcoli diretti, si ottiene:

$$d_1 = -2, \quad d_2 = 5, \quad d_3 = -10, \quad d_4 = 21, \quad d_5 = -42, \quad d_6 = 85;$$

Ove si sono considerate anche le matrici K_1 e K_2.

(b) Il calcolo dei determinanti era facilitato, osservando che, sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima colonna la matrice K_n, si ottiene la relazione ricorsiva $d_n = -2d_{n-1} + d_{n-2} + 2d_{n-3}$.

(c) Possiamo quindi scrivere la relazione ricorsiva nella forma

$$\begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ d_{n-2} \\ d_{n-3} \end{pmatrix} \qquad \text{ove} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

per ogni $n > 3$. Per calcolare le potenze della matrice A, vediamo se è possibile diagonalizzarla. Il polinomio caratteristico di A è $P_A(X) = (X-1)(X+1)(X+2)$ e quindi essendoci tre autovalori distinti, la matrice è diagonalizzabile. Gli spazi di autovettori corrispondenti sono

$$\ker(A - \mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \ker(A + \mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \ker(A + 2\mathbf{1}) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Abbiamo quindi determinato le matrici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e si ha $A = PDP^{-1}$. Iterando la relazione ricorsiva, si ricava

$$\begin{pmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ d_{n-2} \end{pmatrix} = PD^{n-3}P^{-1} \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene la formula esplicita $d_n = \frac{1+3(-1)^{n-3}-(-2)^{n+3}}{6}$, valida per ogni $n \ge 1$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 20 febbraio 2014 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. [8 punti] Si consideri il polinomio $P(X) = (X-2)(X^2-(1-2i)X-3-i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino si disegnino nel piano di Gauss le rette reali contenenti almeno due radici di $P(X)$ e se ne scrivano le equazioni in termini di z e $\bar{z}$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria e sia $\mu : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ l'applicazione $\mu(z) = \frac{1}{z}$. Si determinino centro e raggio delle circonferenze $\lambda^*(r)$ e $\mu^*(r)$ ove r varia tra le rette del punto precedente. Detto T il poligono convesso delimitato dalle rette del punto precedente, si disegnino le circonferenze $\lambda^*(r)$ e $\mu^*(r)$ e si evidenzi la differenza simmetrica $\mu^*(T) \triangle \lambda^*(T) = (\mu^*(T) \cup \lambda^*(T)) \smallsetminus (\mu^*(T) \cap \lambda^*(T))$.

ESERCIZIO 2. [12 punti] Siano V e W spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi. Si determini il sottoinsieme S di V formato dai vettori le cui coordinate nella base $\mathcal{V}$ sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 2 \\ X_3 - X_4 - X_5 = 1 \\ X_2 + X_3 - X_4 - 3X_5 = 2 \\ 2X_1 + X_3 - 3X_4 = 3 \end{cases}.$$

(a) Indicata con $(A|b)$ la matrice completa del sistema dato, sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice A nelle basi date e sia $w_0 \in W$ il vettore di coordinate (nella base $\mathcal{W}$) uguali alla colonna dei termini noti. Data una base del sottospazio $\langle w_0 \rangle^\perp \subset W^*$, si consideri il sottospazio U di V^* generato dalle forme $\phi^*(\xi)$, al variare di ξ nella base data di $\langle w_0 \rangle^\perp$. Si determini la dimensione, k, e una base per il sottospazio U. È vero che $U = \langle \phi^{-1}(w_0) \rangle^\perp$?

(b) È vero che esiste una base di $\langle w_0 \rangle^\perp$ tale che le immagini tramite ϕ^* dei primi k vettori di base sia una base di U e i rimanenti siano una base del nucleo di ϕ^*? In caso affermativo determinare una tale base. Come si possono trovare tutti i sistemi minimali di equazioni lineari che hanno come soluzione il sottospazio $\langle S \rangle$? Che dimensione ha il sottospazio generato dalle matrici di questi sistemi lineari?

(c) Si scriva l'omomorfismo $\phi : V \to W$, come composizione $j \circ p$, con $p : V \to V/\ker\phi$ suriettiva e $j : V/\ker\phi \to W$ iniettiva. Si fissi una base $\mathcal{U}$ dello spazio $V/\ker\phi$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(p)$ e $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(j)$.

ESERCIZIO 3. [10 punti] Si considerino le matrici $H_n \in M_n(\mathbb{R})$ della forma

$$H_n = -\sum_{j=1}^{n} \varepsilon(j,j) - 4\sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(j,j+1) + \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon(j+1,j) + 4\sum_{j=1}^{n-2} \varepsilon(j,j+2)$$

ove $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \le i,j \le n \,\}$ è la base canonica dello spazio vettoriale reale $M_n(\mathbb{R})$.

(a) Si scrivano le matrici H_3, H_4, H_5, H_6 e se ne calcoli il determinante.

(b) Indicato con δ_n il determinante della matrice H_n, si ricavi una relazione ricorsiva lineare tra i valori di tali determinanti.

(c) Si scriva in modo esplicito il determinante δ_n in funzione dell'intero n.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 26 giugno 2014 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si determinino i numeri complessi z tali che $\bar{z} - 2z^2 = 0$ e si indichi con P il poligono che ha come vertici i punti del piano di Gauss corrispondenti a tali numeri e appartenenti al dominio della riflessione nella circonferenza unitaria $\lambda(z) = 1/\bar{z}$.*

(a) *Si disegni nel piano di Gauss il poligono P e si scrivano le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati del poligono P.*

(b) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(P^{out}) \cap P^{out}$ ove si indichino con P^{in} i punti interni al poligono P e con P^{out} i punti ad esso esterni.*

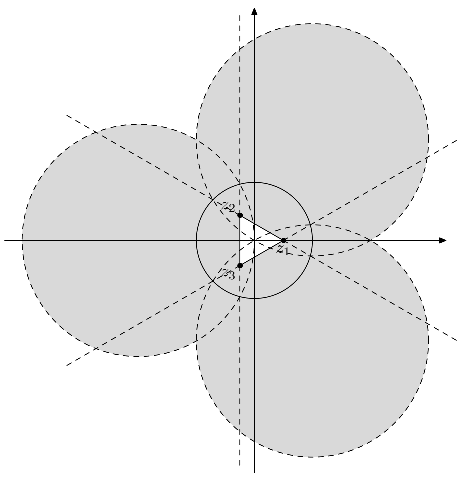
Svolgimento. A parte il numero complesso $z_0 = 0$, che non appartiene al dominio di λ, i vertici di P sono i tre punti

$$z_1 = \frac{1}{2}, \qquad z_2 = -\frac{1 - i\sqrt{3}}{4}, \qquad z_3 = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{4};$$

che si ottengono facilmente dalla relazione data, considerando la forma trigonometrica del numero complesso z.

(*a*) Il poligono P è quindi un triangolo e i suoi lati sono le rette (cfr. il disegno a fianco)

$$\begin{aligned}
&z_1 \vee z_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0,\\
&z_1 \vee z_3 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 1 = 0,\\
&z_2 \vee z_3 : 2z + 2\bar{z} + 1 = 0
\end{aligned}$$



(*b*) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\begin{aligned}
&\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} - (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 0,\\
&\lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} - (1 + i\sqrt{3})z - (1 - i\sqrt{3})\bar{z} = 0,\\
&\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} = 0.
\end{aligned}$$

La parte ombreggiata rappresenta l'insieme $\lambda_*(P^{out}) \cap P^{out}$. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Sia $M = M_2(\mathbb{Q})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti razionali con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{\, A \in M \mid {}^tA = A \,\}$ e $S \cap U$, ove $U = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ di M. Si determini un sottospazio T_0 di M tale che $S \oplus T_0 = M = U \oplus T_0$. Detta $\pi_0 : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T_0, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\pi_0)$.*

(b) *Si determinino tutti i sottospazi T di M tali che $S \oplus T = M = U \oplus T$. Al variare di T, sia $\pi : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T_0 e si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a U. Si dica come questi sottospazi dipendano dalla scelta di T.*

(c) *Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio W di M tale che $\dim S \cap W = 1 = \dim W \cap U$, $W \oplus D = M$ e $\pi_0(w) \in W$, per ogni $w \in W$. Fissata una base $\mathcal{D}$ di D e una base $\mathcal{W}$ di W si scriva la matrice di π_0 nella base $\mathcal{D} \cup \mathcal{W}$ di M.*

Svolgimento. (a) Il sottospazio S ha dimensione 3, mentre, per la formula di Grassmann, $S \cap U$ ha necessariamente dimensione 2, in quanto i due sottospazi non sono contenuti l'uno nell'altro. Si può scegliere la base $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ di S, i cui primi due elementi sono una base di $S \cap U$.

Il sottospazio $T_0 = \langle B_4 \rangle$, soddisfa $T_0 \cap S = \langle 0 \rangle = T_0 \cap U$ e quindi può essere scelto come complementare comune. In tal caso la matrice della proiezione è $A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\pi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*b*) I sottospazi complementari sia di S che di U sono generati da matrici che non appartengono all'unione $S \cup U$ dei due iperpiani. Ovvero matrici $t = a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4$ con $a_4 \neq 0$ e non simmetriche, cioè con l'ulteriore condizione $a_1 + 2a_2 - a_4 \neq 0$ (per avere corrispondenza biunivoca tra sottospazi e generatori, si può prendere $a_4 = 1$ nella scrittura di t).

Qualunque sia il complementare $T = \langle t \rangle$, si ha $\ker(\pi_{|U}) = \ker \pi \cap U = T \cap U = \langle 0 \rangle$; quindi la restrizione di π a U è iniettiva. La sua immagine ha dimensione 3 e coincide quindi con il sottospazio $S = \operatorname{im} \pi$.

(*c*) Siano $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ una base del sottospazio D. Dobbiamo completarla ad una base di M in modo da soddisfare le condizioni sulle intersezioni con S e U e sulla proiezione. Prendendo la matrice $2B_1 - B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, nell'intersezione tra S e U, sono soddisfatte le condizioni sull'intersezione e, trattandosi di una matrice simmetrica, coincide con la propria proiezione. Se completiamo la base scegliendo il generatore di T_0, B_4, possiamo prendere $W = \langle 2B_1 - B_2, B_4 \rangle$ e sono soddisfatte tutte le condizioni richieste. Usando quindi la base $\mathcal{U} = \{D_1, D_2, 2B_1 - B_2, B_4\}$ si ha la matrice $B = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Siano V e W spazi vettoriali sul campo C, di dimensioni n e m, rispettivamente; e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare.*

(a) Dato un sottospazio $S \subset W$, si indichi con $\phi^{-1}(S)$ la controimmagine di S tramite ϕ. Indicata con $\phi^* : W^* \to V^*$ indica l'applicazione lineare trasposta di ϕ, si dica se i sottoinsiemi $(\phi^{-1}(S))^\perp$ e $\phi^*(S^\perp)$, sono sottospazi vettoriali e quali relazioni di inclusione esistono tra questi.

(b) Si consideri il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{Q}$,

$$\Sigma : \begin{cases} 2X_1 - X_3 + X_5 - 2X_7 = 1 \\ X_2 + X_4 - X_5 + 2X_6 - X_7 = 0 \\ 4X_1 - X_2 - 2X_3 - X_4 + 3X_5 - 2X_6 - 3X_7 = 2 \\ X_1 + 4X_3 - 2X_4 + X_7 = -4 \end{cases}.$$

Si scriva un sistema lineare che abbia come soluzione il sottospazio T di $\mathbb{Q}^7$ generato dalle soluzioni del sistema Σ e si determini la dimensione di T.

Svolgimento. (a) L'ortogonale di un qualsiasi sottoinsieme è un sottospazio, e lo stesso vale per l'immagine di un sottospazio tramite un'applicazione lineare. Si tratta quindi di sottospazi di V.

Presi comunque, un vettore $w^* \in S^\perp$ e un vettore $v \in \phi^{-1}(S)$, si ha

$$v \circ \phi^*(w^*) = \phi(v) \circ w^* = 0.$$

Dunque, $\phi^*(S^\perp) \subseteq (\phi^{-1}(S))^\perp$.

Mostriamo ora che i due sottospazi hanno la stessa dimensione (e quindi coincidono). Da una parte si ha

$$\begin{aligned} \dim(\phi^{-1}(S))^\perp &= n - \dim \langle \phi^{-1}(S) \rangle = \\ &= n - \Big(\dim \ker \phi + \dim(S \cap \operatorname{im} \phi) \Big) = \\ &= \dim \operatorname{im} \phi - \dim(S \cap \operatorname{im} \phi). \end{aligned}$$

D'altra parte, si ha

$$\begin{aligned}\dim \phi^*(S^\perp) &= \dim(S^\perp) - \dim(S^\perp \cap \ker \phi^*) = \\ &= \dim(S^\perp) - \dim(S^\perp \cap (\operatorname{im} \phi)^\perp) = \\ &= \dim(S^\perp) - \dim(S + \operatorname{im} \phi)^\perp = \\ &= m - \dim S - \Big(m - \dim(S + \operatorname{im} \phi)\Big) = \\ &= \dim(S + \operatorname{im} \phi) - \dim S\end{aligned}$$

e le due dimensioni coincidono per le relazioni di Grassmann.

(b) Consideriamo l'applicazione $\phi : \mathbb{Q}^7 \to \mathbb{Q}^4$, che ha come matrice, nelle basi canoniche dei due spazi, la matrice dei coefficienti del sistema Σ, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La colonna $w_0 = e_1 + 2e_3 - 4e_4$ dei termini noti del sistema appartiene all'immagine di ϕ, come si vede considerando la terza colonna della matrice A. Quindi, in base a quanto visto nel punto precedente, prendendo $S = \langle w_0 \rangle$, si ha $\big\langle \phi^{-1}(w_0) \big\rangle^\perp = \phi^*(S^\perp)$. Dunque, osservando che $\langle w_0 \rangle^\perp = \langle e_2^*,\, 2e_1^* - e_3^*,\, 4e_1^* + e_4^* \rangle$, la matrice di un sistema lineare omogeneo che ha come soluzione il sottospazio generato dalle soluzioni di Σ si ottiene dal prodotto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -2 & -1 & 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2, e quindi $\dim T = 5$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 26 giugno 2014 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. [8 punti] Si determinino i numeri complessi z tali che $2\bar{z} + z^2 = 0$ e si indichi con P il poligono che ha come vertici i punti del piano di Gauss corrispondenti a tali numeri e appartenenti al dominio della riflessione nella circonferenza unitaria $\lambda(z) = 1/\bar{z}$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono P e si scrivano le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati del poligono P.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(P^{in}) \cap P^{in}$ ove si indichino con P^{in} i punti interni al poligono P e con P^{out} i punti ad esso esterni.

ESERCIZIO 2. [12 punti] Sia $M = M_2(\mathbb{Q})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2 per 2 a coefficienti razionali con la base, $\mathcal{B}$, costituita dalle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per i sottospazi $S = \{ A \in M \mid {}^tA = A \}$ e $S \cap U$, ove $U = \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ di M. Si determini un sottospazio T_0 di M tale che $S \oplus T_0 = M = U \oplus T_0$ e sia $\pi_0 : M \to M$ la proiezione su S, parallelamente a T_0. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\pi_0)$.

(b) Si determinino tutti i sottospazi T di M tali che $S \oplus T = M = U \oplus T$. Al variare di T, si determinino nucleo e immagine della restrizione di π a U e si dica come questi sottospazi dipendano dalla scelta di T.

(c) Detto D il sottospazio di M formato dalle matrici diagonali, si determini, se esiste, un sottospazio W di M tale che $\dim S \cap W = 1 = \dim W \cap U$, $W \oplus D = M$ e $\pi_0(w) \in W$, per ogni $w \in W$. Fissata una base $\mathcal{D}$ di D e una base $\mathcal{W}$ di W si scriva la matrice di π_0 nella base $\mathcal{D} \cup \mathcal{W}$ di M.

ESERCIZIO 3. [10 punti] Siano V e W spazi vettoriali sul campo C, di dimensioni n e m, rispettivamente; e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Dato un sottospazio $S \subset W$, si indichi con $\phi^{-1}(S)$ la controimmagine di S tramite ϕ. Indicata con $\phi^* : W^* \to V^*$ indica l'applicazione lineare trasposta di ϕ, si dica se i sottoinsiemi $(\phi^{-1}(S))^\perp$ e $\phi^*(S^\perp)$, sono sottospazi vettoriali e quali relazioni di inclusione esistono tra questi.

(b) Si consideri il sistema lineare a coefficienti in $\mathbb{Q}$,

$$\Sigma : \begin{cases} 2X_1 - X_3 + X_5 - 2X_7 = -1 \\ X_1 - 2X_2 + X_3 - X_4 - X_6 = 0 \\ 3X_1 + 2X_2 - 3X_3 + X_4 + 2X_5 + X_6 - 4X_7 = -2 \\ X_1 - 2X_4 + 4X_5 + X_7 = 3 \end{cases}.$$

Si scriva un sistema lineare che abbia come soluzione il sottospazio T di $\mathbb{Q}^7$ generato dalle soluzioni del sistema Σ e si determini la dimensione di T.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 10 luglio 2014

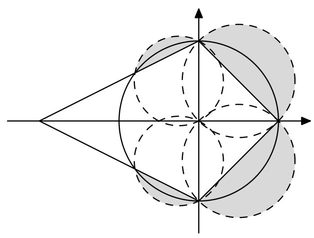
ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = [X^2 + (2-i)X - 2i][X^2 - (1-i)X - i] \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si disegni nel piano di Gauss il quadrilatero Q che ha come vertici le radici del polinomio $P(X)$ e si determinino le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i suoi lati.*

(b) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati di Q nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(Q^{out}) \cap Q^{out}$, ove si indichino con Q^{out} i punti esterni a Q e con λ la riflessione nel cerchio unitario.*

Svolgimento. (a) Le quattro radici di $P(X)$ sono, $-2, 1, i, -i$ e i quattro lati sono le rette

$$
\begin{aligned}
r_1 &: (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 4 = 0,\\
r_2 &: (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} + 4 = 0,\\
s_1 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0,\\
s_2 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 2 = 0.
\end{aligned}
$$



(b) Le immagini delle rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$
\lambda^*(r_1) : \bar{z}z + \frac{1+2i}{4}z + \frac{1-2i}{4}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(r_2) : \bar{z}z + \frac{1-2i}{4}z + \frac{1+2i}{4}\bar{z} = 0,
$$
$$
\lambda^*(s_1) : \bar{z}z - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(s_2) : \bar{z}z - \frac{1+i}{2}z - \frac{1-i}{2}\bar{z} = 0.
$$

La parte ombreggiata della figura soprastante rappresenta l'insieme $\lambda_*(Q^{out}) \cap Q^{out}$. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, delle basi dei due spazi.*

(a) *Si dica se esiste ed è unica l'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, che soddisfa alle seguenti condizioni*

$$
\phi(v_1 + v_2) = w_3 - w_4 = \phi(v_3 - v_4), \qquad \phi(v_3 + v_4) = w_1 - w_2 = \phi(v_1 - v_2),
$$
$$
\phi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5) = w_1 + w_2 + w_3 + w_4.
$$

In caso affermativo, si determinino la dimensione e una base per nucleo e immagine di ϕ e si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$. In caso negativo, si dica come modificare l'immagine di $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$, affinché una tale applicazione esista e si risponda alle domande precedenti, per questa nuova applicazione.

(b) *Si determinino, se esistono, due matrici invertibili P e Q, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, ove $r = \mathrm{rk}\phi$.*

(c) *Qual è il massimo intero positivo, k, affinché esista un $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale T, di dimensione k, tale che non sia vuoto l'insieme $\mathscr{A} = \{\, (\xi, \eta) \mid \xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(W, T),\ \eta \in Hom_{\mathbb{Q}}(T, V),\ \xi \circ \phi \circ \eta = \mathrm{id}_T \,\}$?*
È vero che, per un tale T, si ha $V = im\eta \oplus ker\phi$ e $W = im\phi \oplus ker\xi$, per ogni $(\xi, \eta) \in \mathscr{A}$?
È vero che, presi comunque $(\xi, \eta) \in \mathscr{A}$ e $\chi \in Hom_{\mathbb{Q}}(T, V)$ con $im\chi \subseteq ker\phi$, allora $(\xi, \eta + \chi) \in \mathscr{A}$?

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + v_2$, $v_3 - v_4$, $v_3 + v_4$, $v_1 - v_2$, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$, sono una base di V e quindi esiste un'unica applicazione lineare che soddisfa a tutte le condizioni richieste. L'immagine è il sottospazio $\mathrm{im}\,\phi = \langle w_3 - w_4, w_1 - w_2, w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \rangle$, che è generato dalle immagini dei vettori di una base di V. Il nucleo è il sottospazio $\ker\phi = \langle v_1 + v_2 - v_3 + v_4, v_1 - v_2 - v_3 - v_4 \rangle$, come si deduce dalle relazioni tra i vettori di base. Infine, la matrice richiesta è $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Le ultime due colonne di Q sono le coordinate (in base $\mathcal{V}$) dei vettori di una base di $\ker\phi$. Le rimanenti colonne sono vettori che completano ad una base ($\mathcal{V}'$) di V; le loro immagini sono i primi vettori di una base $\mathcal{W}'$ di $\mathrm{im}\,\phi$ per cui la matrice $\alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{W}'}(\phi)$ ha proprio la forma a blocchi richiesta. Possiamo perciò prendere $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'}(\mathrm{id})$ e $Q = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}(\mathrm{id})$, e quindi

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Il massimo intero cercato è il rango $r = 3$ di ϕ e, in tal caso $\xi : W \to T$ induce un isomorfismo tra $\mathrm{im}\,\phi$ e T, mentre $\eta : T \to V$ induce un isomorfismo tra T e un complementare di $\ker\phi$. Ne discende che, per ogni $(\xi, \eta) \in \mathscr{A}$, si ha $V = \mathrm{im}\,\eta \oplus \ker\phi$ e $W = \mathrm{im}\,\phi \oplus \ker\xi$.

Infine, è sufficiente osservare che se $(\xi, \eta) \in \mathscr{A}$ e $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(T, V)$ con $\mathrm{im}\,\chi \subseteq \ker\phi$, allora

$$\xi \circ \phi \circ (\eta + \chi) = \xi \circ \phi \circ \eta + \xi \circ \phi \circ \chi = \xi \circ \phi \circ \eta = \mathrm{id}_T,$$

perché $\phi \circ \chi = 0$; quindi $(\xi, \eta + \chi) \in \mathscr{A}$. □

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Sia C un campo. Date due matrici, A e B in $M_{n\times k}(C)$, di rango $k < n$. Diremo che $A \sim B$ se il sottospazio di C^n generato dalle colonne di A coincide con il sottospazio di C^n generato dalle colonne di B.*

(a) Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 8 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. È vero che $A \sim B$? Si mostri che esiste una matrice $G \in \mathrm{GL}_2\mathbb{Q}$ tale che $B = AG$. Detto p_{ij} (risp. q_{ij}) il minore estratto dalle righe i e j della matrice A (risp. B), per $1 \le i < j \le 4$; è vero che $\langle (p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}) \rangle = \langle (q_{12}, q_{13}, q_{14}, q_{23}, q_{24}, q_{34}) \rangle$?

(b) Date due matrici, A e B in $M_{n\times k}(C)$, di rango $k < n$; si dimostri che $A \sim B$ se, e solo se, esiste una matrice $G \in \mathrm{GL}_k C$ tale che $B = AG$. Si usi questa relazione per contare il numero dei sottospazi di dimensione k di uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{F}_q$ con q elementi e si calcoli questo numero quando $n = 4$, $k = 2$, $q = 5$.

Svolgimento. (a) Si ha

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque, le colonne di A e di B generano lo stesso sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ e, posto $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, si ha $B = AG$, con $G \in \mathrm{GL}_2\mathbb{Q}$. Per ogni coppia di sottomatrici, A_{ij} e B_{ij} di ordine due, ottenuta prendendo dalle matrici A e B le righe i-esima e j-esima si ha $B_{ij} = A_{ij}G$ e quindi

$$q_{ij} = \det B_{ij} = \det(A_{ij}G) = p_{ij} \det G$$

per ogni scelta di (i, j) con $1 \le i < j \le 4$ e ciò permette di concludere.

(b) Siano ora A e B due matrici in $M_{n\times k}(C)$, di rango $k < n$, con $A \sim B$. Indicati con $v_1, \dots, v_k$ (risp. $w_1, \dots, w_k$) i vettori di C^n le cui coordinate in base canonica sono le colonne di A (risp. di B), si ha $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$ e i due insiemi di generatori sono basi del sottospazio ($\mathrm{rk}\,A = k = \mathrm{rk}\,B$). Dunque, indicata $G = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$, la matrice di cambiamento di base tra le due basi del sottospazio, si ha $B = AG$ e $G \in \mathrm{GL}_k C$. Il viceversa è evidente.

Per quanto visto sopra, si deduce che vi sono tanti sottospazi di dimensione k in $\mathbb{F}_q^n$ quanto è il numero di matrici di rango k in $M_{n\times k}(\mathbb{F}_q)$, diviso per la cardinalità del gruppo $\mathrm{GL}_k\mathbb{F}_q$. Dunque il numero di sottospazi di dimensione k in $\mathbb{F}_q^n$ è

$$c_{n,k}(\mathbb{F}_q) = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})}{(q^k - 1)(q^k - q) \cdots (q^k - q^{k-1})}.$$

Nel caso in cui $n = 4$, $k = 2$, $q = 5$, si ha $c_{4,2}(\mathbb{F}_5) = 2 \cdot 13 \cdot 31$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 28 agosto 2014

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = 10X^3 + 21X^2 + 18X + 5 \in \mathbb{C}[X]$ *e si osservi che* $P(-1/2) = 0$.

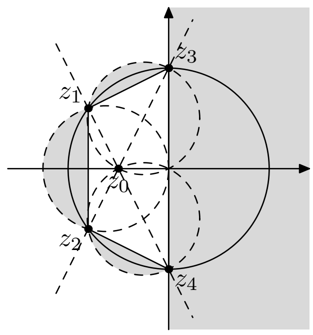
(a) Si determinino le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che congiungono le radici del polinomio $P(X)$. Si determinino le intersezioni tra queste rette e la circonferenza unitaria e si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso, P, che ha come vertici i punti di intersezione tra le rette e la circonferenza.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati di P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $P^{out} \smallsetminus \lambda_*(P^{in})$, ove si indichino con P^{out} i punti esterni a P, con P^{in} i punti interni a P e con λ la riflessione nel cerchio unitario.

Svolgimento. (a) Le tre radici di $P(X)$ sono, $z_0 = -1/2$, $z_1 = \frac{-4+3i}{5}$, $z_2 = \frac{-4-3i}{5}$ e le rette che li congiungono ($5z + 5\bar{z} + 8 = 0$, $(2-i)z + (2+i)\bar{z} + 2 = 0$ e $(2+i)z + (2-i)\bar{z} + 2 = 0$) intersecano la circonferenza unitaria nei punti z_1, z_2, $z_3 = i$, $z_4 = -i$.

(*b*) I quattro punti sono i vertici di un trapezio che ha come lati le rette

$$r_1 : 5z + 5\bar{z} + 8 = 0, \qquad r_2 : z + \bar{z} = 0,$$
$$s_1 : (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} + 4 = 0, \qquad s_2 : (1 - 2i)z + (1 + 2i)\bar{z} + 4 = 0.$$



Le immagini delle rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze (generalizzate)

$$\lambda^*(r_1) : \bar{z}z + \frac{5}{8}z + \frac{5}{8}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(r_2) : z + \bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(s_1) : \bar{z}z + \frac{1+2i}{4}z + \frac{1-2i}{4}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(s_2) : \bar{z}z + \frac{1-2i}{4}z + \frac{1+2i}{4}\bar{z} = 0.$$

La parte ombreggiata della figura soprastante rappresenta l'insieme $P^{out} \smallsetminus \lambda_*(P^{in})$. □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Sia K un campo e $M \in M_{m\times n}(K)$, di rango $r > 0$.*

(a) Si dimostri che esistono due matrici $A \in M_{m\times r}(K)$ e $B \in M_{r\times n}(K)$, tali che $M = AB$. Si deduca da ciò che $\mathrm{rk}A = r = \mathrm{rk}B$. Si determinino due tali matrici nel caso in cui $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) Sia $M \in M_{m\times n}(K)$, di rango r, e siano $M = AB = CD$ due decomposizioni del tipo descritto sopra. Si mostri che esiste una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(r, K)$ tale che $C = AP$ e $D = P^{-1}B$.

(c) Sia $M^{(r)}_{m\times n}(K) = \{\, X \in M_{m\times n}(K) \mid \mathrm{rk}X = r \,\}$, per $0 \le r \le \min\{m, n\}$. Indicato con $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi, si determinino in funzione di q le cardinalità di $M^{(0)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ e $M^{(n)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ (ove $n \le m$). Si deduca quindi dai punti precedenti la cardinalità di $M^{(r)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ per $0 < r < \min\{m, n\}$. Si calcolino in particolare le cardinalità di $M^{(1)}_{3\times 2}(\mathbb{F}_3)$ e $M^{(2)}_{3\times 2}(\mathbb{F}_3)$.

Svolgimento. (a) Sia $\phi : K^n \to K^m$ l'applicazione lineare di matrice M rispetto alle basi canoniche, $\mathcal{E}_m = \{e_1, \dots, e_m\}$ e $\mathcal{E}_n = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, dei due spazi. Si fissi una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$ di $\mathrm{im}\phi$ e si osservi che l'applicazione lineare ϕ è la composizione delle due applicazioni lineari $\beta : K^n \to \mathrm{im}\phi$ e $\alpha : \mathrm{im}\phi \to K^m$, definite da $\beta(x) = \phi(x)$ per ogni $x \in K^n$, e $\alpha(u) = u$ per ogni $u \in \mathrm{im}\phi$. Dunque

$$M = \alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m}(\phi) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}_m}(\alpha)\alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{W}}(\beta) = AB,$$

ove $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}_m}(\alpha)$ e $B = \alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{W}}(\beta)$. Le due applicazioni hanno entrambe rango $r = \dim \operatorname{im}\phi$, e quindi α è iniettiva e β è suriettiva$^{(*)}$.

Nell'esempio proposto, le prime due colonne di M costituiscono una base di $\operatorname{im}\phi$, per cui $\operatorname{rk}\phi = 2$ e si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) L'arbitrarietà nella costruzione delle matrici A e B è nella scelta della base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_r\}$ di $\operatorname{im}\phi$. Scelta un'altra base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_r\}$ di $\operatorname{im}\phi$, si ha $M = CD$, ove $C = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{E}_m}(\alpha)$ e $D = \alpha_{\mathcal{E}_n,\mathcal{U}}(\beta)$. Inoltre $C = AP$ e $D = P^{-1}B$, ove P è la matrice di cambiamento di base, $P = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_{\operatorname{im}\phi})$.

(c) Solo la matrice nulla ha rango 0, quindi la cardinalità di $M^{(0)}_{m\times n}(K)$ è uguale a 1 per qualsiasi campo K. Se $n \le m$, una matrice in $M^{(n)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ deve avere n colonne che sono vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{F}_q^m$. Quindi, vi sono $q^m - 1$ scelte per la prima colonna, $q^m - q$ scelte per la seconda, $q^m - q^2$ scelte per la terza, e così via, fino a $q^m - q^{n-1}$ scelte per l'ultima. Quindi, per $n \le m$,

$$\#M^{(n)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q) = (q^m - 1)(q^m - q)(q^m - q^2)\cdots(q^m - q^{n-1}).$$

Per quanto visto nei punti precedenti, ogni matrice di rango $r > 0$ in $M_{m\times n}(\mathbb{F}_q)$ è prodotto di una matrice, A, di rango r in $M_{m\times r}(\mathbb{F}_q)$ per una matrice, B, di rango r in $M_{r\times n}(\mathbb{F}_q)$, determinate a meno della moltiplicazione per una matrice P in $\mathrm{GL}(r, \mathbb{F}_q) = M^{(r)}_{r\times r}(\mathbb{F}_q)$. Quindi, per $0 < r \le \min\{m, n\}$, si ha

$$\begin{aligned}
\#M^{(r)}_{m\times n}(\mathbb{F}_q) &= \frac{\#M^{(r)}_{m\times r}(\mathbb{F}_q)\cdot \#M^{(r)}_{r\times n}(\mathbb{F}_q)}{\#M^{(r)}_{r\times r}(\mathbb{F}_q)} = \\
&= \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{r-1})\cdot(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})}{(q^r-1)(q^r-q)\cdots(q^r-q^{r-1})} = \\
&= \frac{(q^m-1)(q^m-q)\cdots(q^m-q^{r-1})\cdot(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)}.
\end{aligned}$$

Applicando, le formule precedenti, si ottiene $\#M^{(1)}_{3\times 2}(\mathbb{F}_3) = 2^3 \cdot 13 = 104$ e $\#M^{(2)}_{3\times 2}(\mathbb{F}_3) = 2^4 \cdot 3 \cdot 13 = 624$. La loro somma è $3^6 - 1$, ovvero $\#M_{3\times 2}(\mathbb{F}_3) - \#M^{(0)}_{3\times 2}(\mathbb{F}_3)$. $\square$

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Siano U e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, rispettivamente, delle basi dei due spazi.*

(a) Riferendosi a coordinate nella base $\mathcal{U}$, si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei sottospazi

$$U_1 : \begin{cases} 2X_1 - X_3 + X_5 = 0 \\ X_2 - 2X_4 + X_5 = 0 \\ 2X_1 - X_2 - X_3 + 2X_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$^{(*)}$ Un modo perfettamente equivalente di procedere, consiste nel decomporre l'omomorfismo $\phi : V \to W$ tramite la proiezione canonica $\pi : V \to V/\ker\phi$, seguita dall'applicazione $\sigma : V/\ker\phi \to W$ definita da $\sigma(x + \ker\phi) = \phi(x)$ per ogni elemento del quoziente. Fissando una base di $V/\ker\phi$ si passa all'analoga decomposizione della matrice di ϕ. L'isomorfismo $\overline{\phi} : V/\ker\phi \to \operatorname{im}\phi$ descritto nel primo Teorema di Isomorfismo, implica l'equivalenza tra i due procedimenti, come illustrato nel seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, equal, "\mathrm{id}_V"] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[dd, "\phi"'] & & & V \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dd, "\phi"] \\
& V/\ker\phi \arrow[r, "\cong", "\overline{\phi}"'] \arrow[dl, "\sigma"'] & \operatorname{im}\phi \arrow[dr, "\alpha"] & \\
W \arrow[rrr, equal, "\mathrm{id}_W"'] & & & W
\end{tikzcd}$$

Si verifichi che $U = U_1 \oplus U_2$ e si determinino le matrici $P_1 = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi_1)$ e $P_2 = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi_2)$; ove $\pi_1 : U \to U$ (risp. π_2) è la proiezione su U_1 (risp. U_2), parallelamente a U_2 (risp. U_1).

(b) *Riferendosi a coordinate nella base $\mathcal{W}$, si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei sottospazi*

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W_2 : \begin{cases} X_1 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}.$$

Si verifichi che $W = W_1 \oplus W_2$ e si indichi con $\sigma_1 : W \to W$ (risp. σ_2), la proiezione su W_1 (risp. W_2), parallelamente a W_2 (risp. W_1).

(c) *Si considerino i sottoinsiemi*

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{ \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(U,W) \mid \sigma_2 \circ \phi = \phi \circ \pi_1 \}, & \mathscr{B} &= \{ \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(U,W) \mid \sigma_1 \circ \phi = \phi \circ \pi_2 \}, \\ \mathscr{C} &= \{ \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(U,W) \mid \sigma_1 \circ \phi = \phi \circ \pi_1 \}, & \mathscr{D} &= \{ \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(U,W) \mid \sigma_2 \circ \phi = \phi \circ \pi_2 \}. \end{aligned}$$

Si dica quali tra questi sono sottospazi vettoriali di $Hom_{\mathbb{Q}}(U,W)$ e se ne calcoli la dimensione. Si calcolino infine tutte le possibili somme e intersezioni di tali sottospazi, a due a due.

Svolgimento. (a) Le tre equazioni che definiscono U_1 sono linearmente dipendenti ($III = I - II$). Il sistema ha rango 2; quindi $\dim U_1 = 3$ e una base è costituita dai vettori $u_1 + 2u_3$, $2u_2 + u_4$, $u_2 - u_3 - u_5$.

I tre vettori che generano U_2 sono linearmente dipendenti, ($I - II + 2III = 0$). Quindi, $\dim U_2 = 2$ e una base è costituita dai vettori $u_1 + 2u_3 + u_5$, $u_2 + u_4 + 2u_5$. L'unica combinazione lineare di questi due vettori che soddisfi le equazioni di U_1 è quella identicamente nulla, quindi $U_1 \cap U_2 = \langle 0 \rangle$. Tramite le relazioni di Grassmann, si conclude che $U = U_1 \oplus U_2$.

La proiezione su U_2 parallelamente a U_1 ha matrice

$$P_2 = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi_2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad P_1 = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\pi_1) = \mathbf{1}_5 - P_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & -1 & 8 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) I tre vettori che generano W_1 sono linearmente dipendenti, ($I - II - III = 0$). Quindi, $\dim W_1 = 2$ e una base è costituita dai vettori $2w_1 - w_3 + w_4$, $w_1 - 2w_2 + w_3$.

Le tre equazioni che definiscono W_2 sono linearmente dipendenti ($II = I + III$). Il sistema ha rango 2; quindi $\dim W_2 = 2$ e una base è costituita dai vettori $w_1 - 2w_2 - w_4$, $2w_1 - 3w_2 - w_3$.

L'unica combinazione lineare dei generatori di W_1 che soddisfi le equazioni di W_2 è quella identicamente nulla, quindi $W_1 \cap W_2 = \langle 0 \rangle$. Si conclude che $W = W_1 \oplus W_2$.

(c) I quattro sottoinsiemi $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$ sono tutti sottospazi vettoriali di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,W)$, tutti di dimensione 10 (spiegare come è stata determinata). In particolare $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ e $\mathscr{C} = \mathscr{D}$. Si ha

$$\begin{gathered} \mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} \cap \mathscr{C} = \langle 0 \rangle = \mathscr{A} \cap \mathscr{D}, \quad \mathscr{B} \cap \mathscr{C} = \langle 0 \rangle = \mathscr{B} \cap \mathscr{D}, \quad \mathscr{C} \cap \mathscr{D} = \mathscr{C}; \\ \mathscr{A} + \mathscr{B} = \mathscr{A}, \quad \mathscr{A} \oplus \mathscr{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,W) = \mathscr{A} \oplus \mathscr{D}, \quad \mathscr{B} \oplus \mathscr{C} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U,W) = \mathscr{B} \oplus \mathscr{D}, \quad \mathscr{C} + \mathscr{D} = \mathscr{C}; \end{gathered}$$

ove i dettagli sono lasciati al lettore. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 settembre 2014

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 - 2(1-i)X^2 - (5+4i)X + 10 \in \mathbb{C}[X]$ *e si osservi che* $P(2) = 0$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso, P*, che ha come vertici le radici del polinomio* $P(X)$ *e determinino le equazioni, in funzione di* z *e* $\bar{z}$*, delle rette che costituiscono i lati di* P*.*

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati di P *nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione* $P^{out} \cap \lambda_*(P^{in})$*, ove si indichino con* P^{out} *i punti esterni a* P*, con* P^{in} *i punti interni a* P *e con* λ *la riflessione nel cerchio unitario.*

Svolgimento. (a) Le tre radici di $P(X)$ sono, $z_0 = 2$, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 - i$ e le rette che li congiungono sono

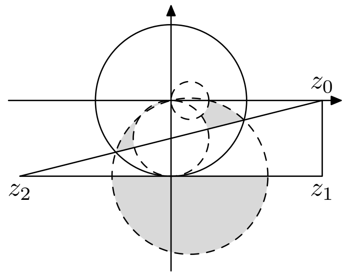
$$r_1 = z_0 \vee z_1 : z + \bar{z} - 4 = 0, \quad r_2 = z_1 \vee z_2 : -iz + i\bar{z} + 2 = 0, \quad r_3 = z_0 \vee z_2 : (1+4i)z + (1-4i)\bar{z} - 4 = 0,$$

che formano i lati di P. Le immagini delle rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\lambda^*(r_1) : \bar{z}z - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left|z - \frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4};$$

$$\lambda^*(r_2) : \bar{z}z - \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left|z + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2};$$

$$\lambda^*(r_3) : \bar{z}z - \frac{1+4i}{4}z - \frac{1-4i}{4}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left|z - \frac{1-4i}{4}\right| = \frac{\sqrt{17}}{4}.$$



La parte ombreggiata della figura soprastante rappresenta l'insieme $P^{out} \cap \lambda_*(P^{in})$. □

ESERCIZIO 2. [8 punti] *Sia* V *uno spazio vettoriale sul campo* $\mathbb{Q}$ *e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_6\}$ *una sua base. Siano fissati inoltre i sottospazi* $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *e* $W = \langle v_4, v_5, v_6 \rangle$*.*

(a) Indicato con Z *il sottospazio*

$$Z = \langle v_1 + v_2 + 3v_4 + 2v_5 - v_6,\ v_1 - v_3 + v_5 - v_6,\ -2v_1 + v_3 - 3v_4 - 2v_5 + v_6 \rangle,$$

Si verifichi che $Z = \{\, u + \phi(u) \mid u \in U \,\}$ *per un'opportuna applicazione lineare* $\phi : U \to W$ *(ovvero* Z *è il grafico di* ϕ *in* V*). Si determinino* $\ker\phi$*,* $\mathrm{im}\phi$ *e la matrice di* ϕ *rispetto alle basi date di* U *e* W*.*

(b) Sia $\psi : U \to W$ *un'applicazione lineare e sia* $\Gamma_\psi = \{\, u + \psi(u) \mid u \in U \,\}$ *il suo grafico in* V*. Si mostri che* $\ker\phi \subseteq \ker\psi$ *se, e solo se,* $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi$*.*

Svolgimento. (a) Un sottospazio $Z \subset U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$ se, e solo se, per ogni $u \in U$, esiste un unico $w \in W$ tale che $u + w \in Z$. Ciò è equivalente a $\dim Z = \dim U$ e $Z \cap W = \langle 0 \rangle$ (come si verifica?). Indicata con A la matrice che ha come colonne le coordinate dei generatori di Z, si può osservare che il minore estratto dalle prime tre righe è uguale ad 1 e quindi $\dim Z = 3$ e $Z + W = V$. Ciò è sufficiente per concludere che Z è il grafico di un'applicazione lineare. Per determinare la matrice di ϕ, è sufficiente osservare che, si ha $AP = A'$, ove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL(3, \mathbb{Q}) \qquad \text{ed} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di ϕ rispetto alle basi date di U e W è $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Infine si ha $\ker\phi = \langle v_1 - v_2 - v_3 \rangle$ ed $\mathrm{im}\,\phi = \langle 3v_4 + 2v_5 - v_6, v_5 - v_6 \rangle$.

(b) Ricordiamo che, se un sottospazio $Z \subset U \oplus W$ è il grafico di un'applicazione lineare $\phi : U \to W$, dato un vettore $u_0 \in U$, esiste un unico vettore $u_0 + w_0 \in Z$, con $w_0 \in W$ e, in particolare, $w_0 = \phi(u_0)$. Dunque, $u_0 \in \ker\phi$ se, e solo se, si può prendere $w_0 = 0$, ovvero se, e solo se, $u_0 = u_0 + 0 \in Z$. Dunque $\ker\phi = U \cap Z$. Da ciò si conclude che $\ker\phi \subseteq \ker\psi$ se, e solo se, $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi \cap U$ e quindi se, e solo se, $Z \cap U \subseteq \Gamma_\psi$. □

ESERCIZIO 3. [8 punti] *Siano date due matrici A e B in $M_4(\mathbb{R})$ e sia $L = \{\, X \in M_4(\mathbb{R}) \mid AX = B \,\}$.*
(a) Si mostri che L è una sottovarietà lineare dello spazio affine $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$ e se ne calcoli la dimensione in funzione del rango della matrice A.
(b) Si determinino un punto e una base del sottospazio direttore di L nel caso in cui

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgimento. Nello spazio affine $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$, possiamo considerare le 16 entrate di una matrice X come un sistema di coordinate affini, avente come origine la matrice nulla $\mathbf{0}$ e come base associata la base canonica di $M_4(\mathbb{R})$. La condizione $AX = B$ produce un sistema di 16 equazioni lineari nelle coordinate dette e quindi L è una sottovarietà lineare di $\mathbb{A}(M_4(\mathbb{R}))$.

L'equazione matriciale $AX = B$ ha soluzione se, e solo se, $\operatorname{im} B \subseteq \operatorname{im} A$; quindi, se tale condizione non è soddisfatta $L = \varnothing$ ed ha dimensione -1. Se invece $\operatorname{im} B \subseteq \operatorname{im} A$, ciò significa che le colonne della matrice B si scrivono come combinazioni lineari delle colonne della matrice A ed i coefficienti di tali combinazioni determinano appunto una soluzione particolare X_0 dell'equazione $AX = B$. Ogni altra soluzione si ottiene sommando ad X_0 una soluzione di $AX = \mathbf{0}$, ovvero una matrice X tale che $\operatorname{im} X \subseteq \ker A$; Le matrici di questo tipo formano un sottospazio di $M_4(\mathbb{R})$, di dimensione $4 \dim\ker A$, e dunque si conclude che, se $L \neq \varnothing$, allora $\dim L = 16 - 4\operatorname{rk} A$.

Nel caso delle due matrici A e B scritte sopra, A ha rango 3 ed una soluzione particolare è data dalla matrice

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservando che $\ker A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, si conclude che il sottospazio direttore di L è costituito dalle matrici del tipo $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2a & 2b & 2c & 2d \\ -a & -b & -c & -d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ al variare di $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Possiamo quindi scrivere la rappresentazione parametrica della varietà L, ovvero

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1+a & b & 1+c & d \\ 1+2a & 2b & 2c & 1+2d \\ -a & 2-b & -c & -d \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso V, di dimensione finita; e sia W un sottospazio vettoriale proprio di V, ϕ-stabile (ovvero $\phi(W) \subseteq W$). Si dica se esiste un iperpiano H di V, ϕ-stabile e contenente W. Si discuta lo stesso problema per un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale.*

Svolgimento. Consideriamo il sottospazio $W^\perp$ dello spazio duale V^*. Allora $W^\perp$ è un sottospazio stabile per l'endomorfismo $\phi^* : V^* \to V^*$. Infatti, per ogni $\xi \in W^\perp$ e per ogni $w \in W$, si ha

$$\phi^*(\xi) \circ w = \xi \circ \phi(w) = 0,$$

perché $\phi(w) \in W$. Dunque esiste un autovettore ξ_0 per ϕ^* appartenente a $W^\perp$ (perché?). Posto $H = \langle \xi_0 \rangle^\perp$, si ottiene un iperpiano ϕ-stabile contenente W.

Chiaramente l'affermazione è falsa in uno spazio vettoriale reale. Per avere un controesempio, è sufficiente prendere una rotazione (un elemento di SO_2) del piano euclideo di angolo non appartenente a $\pi\mathbb{Z}$. $W = \langle 0 \rangle$ è un sottospazio stabile, ma non ci sono iperpiani stabili. $\square$