
Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)
prova di accertamento del 14 Aprile 2014

ESERCIZIO 1. *[8 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-1)(X-3)^4$ e quindi vi sono gli autovalori 1 e 3, con molteplicità (algebrica) 1 e 4, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi - 1) = \langle e_1 + e_2 \rangle$ e $\ker(\phi - 3) = \langle e_1 + e_3, e_2 + e_3 \rangle$.

L'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 1 coincide con $\ker(\phi - 1)$ ed ha dimensione 1 mentre l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 3 deve avere dimensione 4. Osservando che

$$A - 3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A-3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A-3)^3 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ -4 & -4 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che polinomio minimo è $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-1)(X-3)^3$.
(*b*) Prendiamo come $v_1 = e_1 + e_2$. Inoltre dalle matrici precedenti si ottiene che $v_5 = e_4$ appartiene a $\ker(\phi - 3)^3 \smallsetminus \ker(\phi - 3)^2$ da cui si ricava $v_4 = (\phi - 3)(v_5) = e_3 - 2e_4 - 2e_5$ e $v_3 = (\phi - 3)^2(v - 5) = e_1 - e_2$. Dovendo essere $\langle v_2, v_3 \rangle = \ker(\phi - 3)$ possiamo prendere $v_2 = e_1 + e_3$.

In questo modo abbiamo una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan e possiamo quindi scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\text{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. *[4 punti] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 5 sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e $W \oplus U = V$ una decomposizione di V in somma diretta con $\dim(W) = 1$ e $\dim(U) = 4$. Indichiamo con p_W^U l'endomorfismo di proiezione sul sottospazio W lungo la direzione U.*

Determinare tutte le possibili forme di Jordan di un endomorfismo $\psi : V \to V$ tale che $\psi^3 = p_W^U$.

Svolgimento. Essendo $\psi^3 = p_W^U$ la matrice di Jordan di ψ elevata al cubo deve essere simile alla matrice $J' = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ quindi il polinomio caratteristico di ψ deve essere $p_\psi(X) = X^4(X - \alpha)$ con α radice terza dell'unità in $\mathbb{C}$ ($\alpha^3 = 1$). Il periodo del blocco nilpotente deve essere al massimo 3 dunque le possibili forme di Jordan sono:

$$J_1(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad J_2(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; \quad J_3(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}; J_4(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix};$$

con $(\alpha)^3 = 1$ radice terza dell'unità nei numeri complessi. $\square$

ESERCIZIO 3. *[12 punti] In $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino la retta $r : \begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y = 0$.*

(a) Detto W il sottospazio direttore di π si scriva la matrice nel riferimento canonico $\mathscr{R}$ della simmetria $s : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ di asse r e direzione W e se ne determinino i piani uniti.
(b) Determinare un sistema di riferimento $\mathscr{R}' = \{O'; v_1, v_2, v_3\}$ tale che la matrice associata a s in tale sistema di riferimento sia diagonale.
(c) Determinare tutte le possibili direzioni U di simmetria in modo che la simmetria σ_τ^U di direzione U e asse $\tau : O + e_2 + \langle e_1 - e_2, e_3 \rangle$ commuti con s: $s \circ \sigma_\tau^U = \sigma_\tau^U \circ s$.

Svolgimento. (a) La matrice richiesta è

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

I piani uniti sono tutti quelli paralleli alla direzione di simmetria : $x - y = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e tutti quelli del fascio di asse r con equazione cartesiana $a(x + y - 1) + b(x - z) = 0$ con $(a, b)\mathbb{R}^2$; $(a, b) \neq (0, 0)$.

(b) Infatti per determinare un sistema di riferimento in modo che la matrice associata alla simmetria sia diagonale è sufficiente prendere come origine un punto nell'asse r ad esempio $O' = O + e_2$ ed una base di autovettori $v_1 = e_1 - e_2 + e_3$; $v_2 = e_3$; $v_3 = e_1 + e_2$ e in questo sistema di riferimento è chiaro che i piani uniti sono tutti e soli quelli descritti sopra.

(c) Le matrici delle applicazioni lineari soggiacenti devono commutare fra loro e essere diagonalizzabili, quindi esse sono simultaneamente diagonalizzabili. Perciò $U = \langle u \rangle$ deve essere generato da u che sia autovettore per la simmetria σ soggiacente a s e $U \oplus \langle e_1 - e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$ quindi $u \in \langle e_1 + e_2, e_3 \rangle$ e linearmente indipendente da e_3: $U = \langle e_1 + e_2 + \alpha e_3 \rangle$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 4. *[6 punti] Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si considerino la retta r e il piano π:*

$$r : O + e_1 + \langle e_2 + e_4 \rangle \qquad \pi : \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r e π e l'equazione cartesiana di un iperpiano $\mathbb{L}$ parallelo a π e contenente r.
(b) Determinare se esiste una retta t passante per O e che intersechi sia r che π. È unica?

Svolgimento.

(a) Il piano e la retta sono sghembi in quanto non si intersacano e i loro spazi direttori si intersecano in $0_{\mathbb{Q}^4}$. L'iperpiano $\mathbb{L}$ contenente r e parallelo a π ha equazione cartesiana $\mathbb{L} : x_1 + 2x_3 = 1$.

(b) La retta richiesta esiste ed è unica. Essa è determinata dalla condizione $t = (O \vee r) \cap (O \vee \pi) = O + \langle e_1 \rangle$.

$\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 10 giugno 2014

ESERCIZIO 1. *[18 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ con il riferimento ortonormale $\mathscr{R} = (O, e_1, e_2, e_3, e_4)$, si considerino i piani*

$$\pi_1 : \begin{cases} X_1 - X_4 = 1 \\ X_2 + X_3 = 2 \end{cases} \qquad e \qquad \pi_2 : \begin{cases} X_1 - X_3 = 2 \\ X_2 + X_4 = 1 \end{cases}.$$

(a) *Si determini la posizione reciproca dei due piani, la reciproca distanza e le coppie di punti a minima distanza tra i due piani. È vero che tutti gli iperpiani contenenti π_1, eccetto al più uno, sono incidenti con π_2? In caso affermativo, trovare l'equazione cartesiana dell'iperpiano in questione.*

(b) *Si verifichi che i punti*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

non sono complanari e si determini il volume del tetraedro che ha questi punti come vertici. Si determini la proiezione ortogonale del tetraedro sul piano π_1 e si dica se si tratta di un triangolo o di un quadrilatero. In ogni caso si determini l'area di tale proiezione.

(c) *Dati tre punti P, Q, R e una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$, è vero che l'area del triangolo PQR è sempre maggiore o uguale dell'area della proiezione ortogonale del triangolo sulla sottovarietà $\mathbb{L}$? In caso affermativo, si scriva una dimostrazione; in caso negativo, si presenti un controesempio.*

Svolgimento. (a) Il piano $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ha intersezione vuota con il piano π_2, come si vede sostituendo la rappresentazione parametrica dei suoi punti nelle equazioni cartesiane di π_2. I due piani hanno in comune la direzione $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si ha $\pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Indicati con $P_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2+b \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, e $Q_{(c,d)} = \begin{pmatrix} 2+c \\ 1-d \\ c \\ d \end{pmatrix}$, $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, i generici punti dei due piani, il vettore $P_{(a,b)} - Q_{(c,d)}$ è ortogonale a entrambo i piani se, e solo se,

$$\begin{cases} -1 + 2a - c - d = 0 \\ 1 + 2b + c + d = 0 \\ -1 + a - b - 2c = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = -b \\ c = -\frac{1}{2} - b \\ d = -\frac{1}{2} - b \end{cases}.$$

Le coppie di punti di minima distanza sono quindi formate dai punti $\begin{pmatrix} 1-b \\ 2+b \\ -b \\ -b \end{pmatrix} \in \pi_1$ e $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-b \\ \frac{3}{2}+b \\ -\frac{1}{2}-b \\ -\frac{1}{2}-b \end{pmatrix} \in \pi_2$, al variare di $b \in \mathbb{R}$. In particolare, la distanza tra i due piani è uguale a 1.

È sufficiente considerare il generico iperpiano del fascio di asse π_1, $h_{(\alpha,\beta)} : \alpha(X_1 - X_4 - 1) + \beta(X_2 + X_3 - 2) = 0$, al variare dei parametri omogenei (α, β); e osservare che il sistema lineare

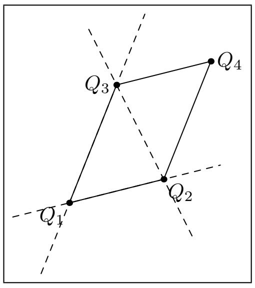
$$h_{(\alpha,\beta)} \cap \pi_2 : \begin{cases} X_1 - X_3 = 2 \\ X_2 + X_4 = 1 \\ \alpha X_1 + \beta X_2 + \beta X_3 - \alpha X_4 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

ha ranghi $(3, 3)$ (intersezione una retta) per tutti i valori di (α, β) eccetto il caso in cui $\langle(\alpha, \beta)\rangle = \langle(1, -1)\rangle$ e le due sottovarietà lineari sono parallele, ovvero l'iperpiano $h_{(1,-1)} : X_1 - X_2 - X_3 - X_4 + 1 = 0$.

(b) Il tetraedro di vertici P_1, P_2, P_3, P_4, ha come lati i vettori $P_2 - P_1$, $P_3 - P_1$, $P_4 - P_1$. Indicata con $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice che ha come colonne le coordinate di questi vettori nel riferimento ortonormale dato; si ha che il volume del tetraedro è uguale a

$$V = \tfrac{1}{6}\sqrt{\det({}^tTT)} = \tfrac{1}{6}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}} = \frac{2}{3}.$$

Da cui si conclude che i quattro punti non sono complanari.



La proiezione ortogonale sul piano π_1 ha matrice affine

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Quindi le proiezioni dei vertici del tetraedro sono, rispettivamente, i punti

$$Q_1 = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad Q_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I punti Q_1, Q_2, Q_3, non sono allineati e $Q_4 - Q_3 = (Q_2 - Q_3) - (Q_1 - Q_3)$. Quindi, utilizzando coordinate baricentriche, si ha $Q_4 = -Q_1 + Q_2 + Q_3$, per cui i punti Q_1 e Q_4 sono dai lati opposti della retta $Q_2 \vee Q_3$; ovvero la proiezione del tetraedro è costituita dai due triangoli $Q_1Q_2Q_3$ e $Q_2Q_3Q_4$ (ovvero dal *parallelogramma* rappresentato qui sopra, visto che dalla relazione baricentrica si ricava $Q_4 - Q_3 = Q_2 - Q_1$). L'area cercata è quindi l'area del parallelogramma di lati $Q_2 - Q_1$ e $Q_3 - Q_1$ (o la somma delle aree dei due triangoli $Q_1Q_2Q_3$ e $Q_2Q_3Q_4$ se non si riconosce il parallelogramma), che è uguale a 2.

(c) Sia $\mathbb{L} = P_0 + U$ e si considerino i vettori $v = Q - P$ e $w = R - P$. Per il teorema di decomposizione ortogonale, possiamo scrivere $v = u_1 + n_1$ e $w = u_2 + n_2$, con $u_1, u_2 \in U$ e $n_1, n_2 \in U^\perp$ e i vettori u_1 e u_2 sono i lati del triangolo proiettato sulla sottovarietà $\mathbb{L}$. Detta A l'area del triangolo PQR e B l'area della sua proiezione, e ricordando l'identità di Lagrange, si ha quindi

$$4A^2 = \det\begin{pmatrix} (u_1+n_1)\cdot(u_1+n_1) & (u_1+n_1)\cdot(u_2+n_2) \\ (u_2+n_2)\cdot(u_1+n_1) & (u_2+n_2)\cdot(u_2+n_2) \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad 4B^2 = \det\begin{pmatrix} u_1\cdot u_1 & u_1\cdot u_2 \\ u_2\cdot u_1 & u_2\cdot u_2 \end{pmatrix}.$$

Da ciò si deduce con un calcolo diretto,

$$4(A^2 - B^2) = \|u_1\|^2\|n_2\|^2 + \|n_1\|^2\|u_2\|^2 - 2(u_1\cdot u_2)(n_1\cdot n_2) + \Big(\|n_1\|^2\|n_2\|^2 - (n_1\cdot n_2)^2\Big)$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha $\|n_1\|^2\|n_2\|^2 - (n_1\cdot n_2)^2 \geq 0$ e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned} 4(A^2 - B^2) &\geq \|u_1\|^2\|n_2\|^2 + \|n_1\|^2\|u_2\|^2 - 2(u_1\cdot u_2)(n_1\cdot n_2) \geq \\ &\geq \|u_1\|^2\|n_2\|^2 + \|n_1\|^2\|u_2\|^2 - 2\|u_1\|\|u_2\|\|n_1\|\|n_2\| = (\|u_1\|\|n_2\| - \|n_1\|\|u_2\|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

applicando di nuovo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz(*). □

(*) Naturalmente, ricordando che l'area del triangolo si può calcolare come (base · altezza)/2, [ovvero che la misura bidimensionale (area) di un prodotto di segmenti è il prodotto delle misure uno-dimensionali (lunghezze) dei fattori quando questi sono ortogonali] ci si poteva ricondurre a mostrare che la lunghezza di qualsiasi segmento è maggiore o uguale della lunghezza di una sua proiezione ortogonale, ma sarebbe stato meno convincente (credo).

ESERCIZIO 2. *[12 punti] Nello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}^3$, munito del riferimento ortonormale $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$, si considerino i piani $\tau_1 : X + 2Y - Z = 3$ e $\tau_2 : X + Y = 0$.*

(a) Si scriva la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$ dell'isometria che si ottiene componendo la riflessione σ_1, rispetto al piano τ_1, seguita dalla traslazione, τ, di vettore $e_1 + e_2 - 3e_3$. Si determini la decomposizione di Eulero dell'isometria $\tau \circ \sigma_1$.

(b) Detta σ_2 la riflessione rispetto al piano τ_2, si scriva la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$ dell'isometria $f = \sigma_2 \circ \tau \circ \sigma_1$. Si classifichi, secondo Eulero, l'isometria f e si determinino le sottovarietà lineari unite per questa trasformazione.

Svolgimento. (a) Sia $P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \tau_1$ e sia $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ il vettore ortogonale al piano. Si ha quindi $\sigma_1(X) = X - 2\frac{(X-P_0)\cdot n_1}{n_1 \cdot n_1} n_1$, da cui si ottiene la matrice di $\tau \circ \sigma_1$, ovvero

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau \circ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 3 & -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -4 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Il vettore $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, con il primo addendo in $\langle n_1 \rangle$ e il secondo in $\langle n_1 \rangle^\perp$. Quindi $\tau \circ \sigma_1$ è una glisso-riflessione; composizione della riflessione rispetto al piano $O + n_1 + \langle n_1 \rangle^\perp$ con la traslazione di vettore $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, parallelo al piano di riflessione.

(b) Con un calcolo analogo a quanto visto nel punto precedente, si ottiene la matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2)$ e quindi

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2)\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau \circ \sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2 & -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -4 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione lineare associata a f è una rotazione di asse parallelo al vettore $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (autovettore relativo all'autovalore 1); e il vettore traslazione si decompone come $t_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, con il primo addendo in $\langle v \rangle$ e il secondo in $\langle v \rangle^\perp$. Quindi f è la rototraslazione che si ottiene componendo la rotazione di asse $h = O - 5e_1 + 7e_2 + \langle v \rangle$ e angolo $\frac{\pi}{3}$, con la traslazione di vettore $-v = e_1 - e_2 - e_3$, parallelo all'asse. L'unica sottovarietà lineare unita è la retta h (asse di rotazione). $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 26 giugno 2014 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *[10 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice* $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *rispetto alla base canonica.*

(a) *Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.*

(b) *Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.*

(c) *Sia B una matrice di rango 1 in $M_n(C)$, ove n è un intero maggiore di 1. È vero che B è triangolarizzabile, qualunque sia il campo C? È vero che B è diagonalizzabile, qualunque sia il campo C, se, e solo se, $\mathrm{tr}B \neq 0$? In tal caso, qual è la forma diagonale? E qual è la forma di Jordan di B quando $\mathrm{tr}B = 0$?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+1)^2$ e coincide col polinomio minimo, perché sia $A + \mathbf{1}$ che $A - 2\cdot\mathbf{1}$ hanno rango 4. Infatti

$$A+\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (A+\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 18 & -9 & 11 & -9 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 18 & -10 & 8 & -9 & 7 \\ 0 & -12 & 14 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad A-2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli spazi di autovettori sono $\ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle e_1 + e_4 \rangle$ e $\ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle e_1 + 2e_4 \rangle$.

(b) Poiché sia $A + \mathbf{1}$ che $A - 2\cdot\mathbf{1}$ hanno rango 4, vi è un unico blocco di Jordan per ciascun autovalore. Ricordando che $\mathrm{im}(\phi+\mathrm{id})^2 = \ker(\phi - 2\mathrm{id})^3$, si ricavano facilmente, tramite la matrice $(A+\mathbf{1})^2$, le coordinate di un autovettore generalizzato di periodo massimo per ciascun autovalore. La matrice di Jordan, J, e la matrice di cambiamento di base, P, sono quindi

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 12 & 30 & 11 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 12 & 32 & 8 & 6 & -1 \\ 0 & 24 & 14 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Se B ha rango 1, ha un nucleo di dimensione $n-1$. Quindi il suo polinomio caratteristico è divisibile per X^{n-1} ed è uguale a $p_B(X) = X^n - \mathrm{tr}BX^{n-1}$, che ha tutte le radici nel campo C. Dunque B è triangolarizzabile ed è anche diagonalizzabile se $\mathrm{tr}B \neq 0$, perché ha un autovalore non nullo (la traccia). Altrimenti, B è nilpotente e di rango 1, per cui il suo polinomio minimo è $\lambda_B(X) = X^2$ che, unito all'informazione sul rango, determina in modo univoco la forma di Jordan di B. □

ESERCIZIO 2. *[10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, col sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$, si considerino i seguenti punti:*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ e le equazioni cartesiane del piano, π, che lo contiene. Si determinino le equazioni cartesiane della retta $r = P_4 \vee P_5$, le reciproche posizioni di r e π e la loro distanza.*

(b) *Si determinino (se esistono) gli iperpiani contenenti π e a distanza 1 da r. È vero che, presi comunque due punti P e P' di r i tetraedri di vertici $P_1P_2P_3P$ e $P_1P_2P_3P'$ hanno lo stesso volume? In caso positivo, si calcoli tale volume, in caso negativo si scriva il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P$, come funzione del punto P, variabile in r.*

Svolgimento. (a) Presi i vettori $P_2 - P_1 = e_3 - e_1$ e $P_3 - P_1 = e_3 - e_2$, e indicata con T la matrice che ha come colonne le coordinate dei due vettori nel riferimento (ortonormale) dato, l'area del triangolo è uguale ad $A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Le equazioni cartesiane del piano π e della retta $r = (O + 2e_4 - e_3) + \langle e_1 - e_3\rangle$ sono

$$\pi : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ X_4 = 1 \end{cases}, \qquad \text{e} \qquad r : \begin{cases} X_1 + X_3 = -1 \\ X_2 = 0 \\ X_4 = 2 \end{cases}.$$

La retta e il piano sono paralleli ed hanno intersezione vuota.

La distanza tra r e π è la distanza di un qualsiasi punto di r da π (perché?); ovvero la distanza di $P_4 = O + 2e_4 - e_3$ dalla sua proiezione ortogonale sul piano π, che è il punto P_1. Quindi, $dist(r, \pi) = dist(P_4, P_1) = \|P_1 - P_4\| = 2$.

(*b*) Il fascio di iperpiani di $\mathbb{E}^4$ di asse π è formato dagli iperpiani di equazioni $h_{(a,b)} : a(X_1 + X_2 + X_3 - 2) + b(X_4 - 1) = 0$, al variare dei parametri omogenei (a, b). Tutti gli iperpiani sono paralleli a r e quindi la reciproca distanza coincide con la distanza di un qualsiasi punto di r da $h_{(a,b)}$. Quindi cerchiamo i valori dei parametri omogenei (a, b), per cui si abbia

$$dist(h_{(a,b)}, r) = dist(h_{(a,b)}, P_4) = \frac{|-3a + b|}{\sqrt{3a^2 + b^2}} = 1.$$

Si tratta quindi dell'iperpiano $X_4 = 1$ $(a = 0)$ e dell'iperpiano $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 3$ $(a = b)$.

Un generico punto P_s della retta r ha coordinate $P_s = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -1-s \\ 2 \end{pmatrix}$, al variare di $s \in \mathbb{R}$. Le colonne delle coordinate dei vettori $P_2 - P_1$, $P_3 - P_1$, $P_s - P_1$ formano la matrice

$$T_s = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1+s \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1-s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha perciò

$${}^tT_sT_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

e quindi il suo determinante è indipendente da s e costantemente uguale a 12. Dunque, il volume del tetraedro è costantemente uguale a $\frac{1}{6}\sqrt{\det({}^tT_sT_s)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. □

ESERCIZIO 3. *[10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si considerino i piani*

$$\tau_1 : X + Y - 2 = 0, \qquad \tau_2 : X - Z - 1 = 0, \qquad \tau_3 : 2X + Z - 2 = 0.$$

(a) *Indicata con $\sigma_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto al piano τ_i, per $i = 1, 2, 3$; si scrivano le matrici nel riferimento canonico delle tre riflessioni.*

(b) *Si classifichi secondo Eulero l'isometria composta $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Si esplicitino le relazioni tra la decomposizione secondo Eulero di questa isometria e quella dell'isometria $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.*

Svolgimento. (a) Se P_0 è un punto del piano di riflessione e n è un vettore normale al piano, il riflesso del punto X è il punto $\sigma(X) = X - 2\frac{(X-P_0)\cdot n}{n\cdot n}n$. Dunque le tre matrici richieste sono

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8/5 & -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix},$$

ove $S_i = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_i)$ per $i = 1, 2, 3$.

(*b*) La matrice dell'isometria composta dalle tre riflessioni è il prodotto $S_1S_2S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1/5 & 4/5 & 0 & -3/5 \\ 3/5 & -3/5 & 0 & -4/5 \end{pmatrix}$. Si tratta quindi di un'isometria inversa, la cui componente lineare ha l'autovalore -1, a cui corrisponde l'autospazio $\langle e_1 + e_2 + 3e_3 \rangle$, ma non è diagonalizzabile. Si tratta quindi di una rotoriflessione e possiamo determinare l'asse di rotazione e il piano di riflessione, osservando che la proiezione lungo l'autospazio della componente traslatoria di $f = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ è il vettore $\frac{4}{11}(e_1 + e_2 + 3e_3)$ e osservando inoltre che il punto $P = O + e_1 + e_2$, punto di intersezione dei tre piani, è un punto unito per f. Dunque, f si decompone nella riflessione rispetto al piano $\tau := O + \frac{2}{11}(e_1 + e_2 + 3e_3) + \langle e_1 - e_2, 3e_1 - e_3 \rangle$ seguita da una rotazione di asse $P + \langle e_1 + e_2 + 3e_3 \rangle$ e angolo ϑ, determinato dalla condizione $2\cos\vartheta = \mathrm{tr}(S_1S_2S_3) = 1/5$.

L'isometria $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ è l'isometria inversa di f e quindi è la composizione della stessa riflessione con la rotazione inversa. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 26 giugno 2014 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. [10 punti] Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Sia B una matrice di rango 1 in $M_n(C)$, ove n è un intero maggiore di 1. È vero che B è triangolarizzabile, qualunque sia il campo C? È vero che B è diagonalizzabile, qualunque sia il campo C, se, e solo se, $\mathrm{tr}B \neq 0$? È vero che due matrici di rango 1 (dello stesso ordine n) sono simili se, e solo se, hanno traccia uguale?

ESERCIZIO 2. [10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, col sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$, si considerino i seguenti punti:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ e le equazioni cartesiane del piano, π, che lo contiene. Si determinino le equazioni cartesiane della retta $r = P_4 \vee P_5$, le reciproche posizioni di r e π e la loro distanza.

(b) Si determinino (se esistono) gli iperpiani contenenti π e a distanza 1 da r. È vero che, presi comunque due punti P e P' di r i tetraedri di vertici $P_1P_2P_3P$ e $P_1P_2P_3P'$ hanno lo stesso volume? In caso positivo, si calcoli tale volume, in caso negativo si scriva il volume del tetraedro $P_1P_2P_3P$, come funzione del punto P, variabile in r.

ESERCIZIO 3. [10 punti] Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si considerino i piani

$$\tau_1 : X - Y - 1 = 0, \qquad \tau_2 : X + Z - 2 = 0, \qquad \tau_3 : 2X + Y - 2 = 0.$$

(a) Indicata con $\sigma_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto al piano τ_i, per $i = 1, 2, 3$; si scrivano le matrici nel riferimento canonico delle tre riflessioni.

(b) Si classifichi secondo Eulero l'isometria composta $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Si esplicitino le relazioni tra la decomposizione secondo Eulero di questa isometria e quella dell'isometria $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 10 luglio 2014

ESERCIZIO 1. [6 punti] *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^5$ e $\mathrm{rk}(A + \mathbf{1}) = 3$. Si ha

$$A + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (A+\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A+\mathbf{1})^3 = \mathbf{0}_5.$$

Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(X) = (X+1)^3$ e lo spazio di autovettori è $\ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle 2e_1 + e_4, e_2 - e_5 \rangle$.

(b) Vi sono quindi due blocchi di Jordan per l'autovalore -1, di cui uno ha ordine 3. Un autovettore generalizzato di periodo massimo è $v_5 = e_1$ e poniamo $v_4 = (\phi + \mathrm{id})(v_5) = -4e_1 + e_2 - 2e_4$ e $v_3 = (\phi + \mathrm{id})(v_4) = e_2 - e_5$. Posto $v_2 = e_3$ e $v_1 = (\phi + \mathrm{id})(v_2) = 2e_1 + e_4$, abbiamo determinato una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Possiamo quindi scrivere

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

ESERCIZIO 2. [4 punti] *Sia $\mathbb{A}(\mathbb{F}_q^3)$ lo spazio affine tridimensionale sul campo $\mathbb{F}_q$ con q elementi. Data una retta r e un punto $P \notin r$, quante sono le rette di $\mathbb{A}(\mathbb{F}_q^3)$ passanti per P e sghembe con r? E quante sono le altre rette di $\mathbb{A}(\mathbb{F}_q^3)$, passanti per P?*

Svolgimento. Scegliamo un riferimento in $\mathbb{A}(\mathbb{F}_q^3)$ che abbia il punto P come origine e il piano $P \vee r$ come piano $z = 0$. Dunque le rette per P, sghembe con r sono in corrispondenza biunivoca con i sottospazi di dimensione 1 di $\mathbb{F}_q^3$, generati da un vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $z = 1$. Si conclude che ci sono q^2 rette per P, sghembe con r e quindi che le altre rette per P (parallele o incidenti r) sono $q + 1$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, col sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$, si considerino le sottovarietà lineari: $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $s : \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 + X_3 = 1 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$.*

(a) [3 punti] *Si determinino la distanza e l'angolo tra r e s e le equazioni della sottovarietà lineare $r \vee s$.*

(b) [3 punti] *Sia $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e si determinino una retta t, passante per P, incidente sia r che s, e le coordinate dei punti $A = r \cap t$ e $B = s \cap t$. È vero che, per un punto X dello spazio, $\mathbb{E}^4$ passa una retta complanare sia con r che con s se, e solo se, $X \in r \vee s$?*

(c) [3 punti] *Sia h la retta, passante per P, ortogonale e incidente r e sia k la retta, passante per P, ortogonale e incidente s. Si determinino le coordinate dei punti $C = r \cap h$ e $D = s \cap k$. Si determini il volume del tetraedro di vertici $ABCD$.*

(d) [3 punti] *Si scriva la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$ di un'isometria di $\mathbb{E}^4$ che lasci unito (globalmente) l'iperpiano $r \vee s$ e mandi il punto P nell'origine.*

Svolgimento. (a) Si ha $r \cap s = \varnothing$ e gli spazi direttori, $W_r = \langle e_1 + e_3 \rangle$ di r e $W_s = \langle e_1 - e_2 + e_3 - e_4 \rangle$ di s, hanno intersezione banale, percui le due rette sono sghembe. Presi i punti $P_0 = O + e_2 + e_4$ di r e $Q_0 = O + e_3 - e_4$ di s, la proiezione del vettore $Q_0 - P_0$ sul sottospazio $(W_r + W_s)^\perp$ è

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

e la sua norma è la distanza tra le due rette; ovvero $d(r,s) = 1$.

L'angolo tra le due rette è uguale a $\frac{\pi}{4}$, essendo

$$\cos\alpha(r,s) = \frac{|(e_1 + e_3) \cdot (e_1 - e_2 + e_3 - e_4)|}{\|e_1 + e_3\| \, \|e_1 - e_2 + e_3 - e_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Infine imponendo a un generico iperpiano per s, di contenere la retta r, si ricava $r \vee s : X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0$.

(b) I piani per P contenenti rispettivamente r e s sono

$$r \vee P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad s \vee P : \begin{cases} X_1 - X_2 - 2X_3 = -2 \\ X_1 + X_2 - X_3 - X_4 = 0 \end{cases}.$$

La loro intersezione è la retta $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, da cui si ricava $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Se un punto $X \in r \vee s$, l'intersezione dei due piani $r \vee P$ e $s \vee P$ dà una retta complanare con r e con s. Viceversa se un punto sta su una retta complanare con r e con s allora o è incidente con entrambo e quindi generata da due punti di $r \vee s$ o è incidente con una e parallela all'altra e quindi ancora contenuta nello stesso iperpiano.

(c) Detto $P_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ il generico punto della retta r, il vettore $P - P_t$ risulta ortogonale a W_r se e solo se $t = \frac{3}{2}$. Analogamente, detto $Q_s = \begin{pmatrix} s \\ -s \\ 1+s \\ -1-s \end{pmatrix}$ il generico punto della retta s, il vettore $P - Q_s$ risulta ortogonale a W_s se e solo se $s = -1$. Dunque $C = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le coordinate dei vettori $B - A$, $C - A$, $D - A$ sono le colonne della matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Il volume cercato è $\frac{1}{6}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{1}{6}$.

(d) La riflessione rispetto all'iperpiano $r \vee s$ lo lascia, ovviamente, invariato, e, composta con la traslazione di vettore $O - P$, parallelo all'iperpiano in questione, produce un'isometria di $\mathbb{E}^4$ che soddisfa alle condizioni richieste. La sua matrice nel riferimento dato è

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3 & 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right),$$

determinata in modo analogo al caso tridimensionale (naturalmente, nessuno vietava di scegliere come isometria la sola traslazione di vettore $O - P$). $\square$

ESERCIZIO 4. [8 punti] *Nello spazio euclideo* $\mathbb{E}^3$ *munito del sistema di riferimento* $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ *si considerino i piani* $\tau_1 : X + 2Y - 1 = 0$ *e* $\tau_2 : X - 2Z - 2 = 0$.

(a) *Indicata con* $\sigma_i : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ *la riflessione rispetto al piano* τ_i*, per* $i = 1, 2$*; si scrivano le matrici nel riferimento canonico delle due riflessioni e si classifichi secondo Eulero l'isometria composta* $\sigma_1 \circ \sigma_2$.

(b) *Che isometria si ottiene componendo una glissoriflessione e una rotoriflessione che abbiano lo stesso piano di riflessione? Che isometria si ottiene componendo una glissoriflessione e una rotoriflessione che abbiano piani di riflessione paralleli?*

Svolgimento. (a) Se P_0 è un punto del piano di riflessione e n è un vettore normale al piano, il riflesso del punto X è il punto $\sigma(X) = X - 2\frac{(X-P_0)\cdot n}{n\cdot n}n$. Dunque le due matrici richieste sono

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & -4/5 & 0 \\ 4/5 & -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8/5 & 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix},$$

ove $S_i = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_i)$ per $i = 1, 2$.

L'isometria composta da due riflessioni è una rotazione di asse l'intersezione dei due piani di riflessione ($h = O + \frac{1}{2}e_2 - e_3 + \langle 2e_1 - e_2 + e_3 \rangle$), perché è un'isometria diretta e ha una retta di punti uniti. La matrice dell'isometria composta è il prodotto $S_1S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 22/25 & 9/25 & -4/5 & 12/25 \\ 4/25 & -12/25 & -3/5 & -16/25 \\ -8/5 & 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$ e la sua traccia permette di identificare il coseno dell'angolo di rotazione, ovvero $-23/25$.

(b) Nella composizione di una glissoriflessione e di una rotoriflessione che abbiano lo stesso piano di riflessione, le due riflessioni rispetto allo stesso piano producono l'identità e quindi si tratta di una rotazione seguita da una traslazione ortogonale all'asse di rotazione (perché parallela al piano di riflessione). Quindi di una rotazione rispetto ad un asse parallelo a quello della rotoriflessione.

Nella composizione di una glissoriflessione e di una rotoriflessione che abbiano piani di riflessione paralleli, le due riflessioni producono una traslazione di vettore ortogonale ai piani di riflessione e quindi parallelo all'asse di rotazione della rotoriflessione, che si va ad aggiungere alla componente traslatoria della glissoriflessione (ortogonale all'asse). Si ottiene quindi una rototraslazione rispetto a un asse parallelo a quello della rotoriflessione.

In entrambo i casi, la posizione dell'asse di rotazione dell'isometria composta dipende dall'ordine con cui si effettuano le due isometrie. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 28 agosto 2014

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.*

(a) [3 punti] *Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.*

(b) [3 punti] *Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.*

(c) [3 punti] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 12 sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\psi : V \to V$ un endomorfismo soggetto alle seguenti condizioni:*

$$rk(\psi - 2\mathrm{id})^2 > rk(\psi - 2\mathrm{id})^3 = 7, \qquad rk\psi > rk\psi^2 = 8, \qquad rk(\psi + \mathrm{id})^2 > rk(\psi + \mathrm{id})^3 = 9.$$

Quali sono le possibili matrici di Jordan per ψ? È vero che, se W è un sottospazio non banale di V e $\psi(W) \subseteq W$, allora W contiene un autovettore di ψ?

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+1)^2$ e $\mathrm{rk}(A + \mathbf{1}) = 3$, $\mathrm{rk}(A - 2\mathbf{1}) = 4$. Si ha

$$A + \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A - 2\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2\mathbf{1})^2 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 15 & 1 & -1 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio minimo è quindi $\lambda_\phi(X) = (X+1)(X-2)^3$ e gli spazi di autovettori sono $\ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle 2e_1 - 5e_4,\ 2e_2 - 4e_3 - e_4 \rangle$ e $\ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle e_1 - e_4 \rangle$.

(b) Vi sono quindi due blocchi di Jordan, di ordine 1, per l'autovalore -1, e uno, di ordine 3, per l'autovalore 2. Un autovettore generalizzato di periodo massimo per l'autovalore 2 è $v_5 = e_5 \in \mathrm{im}(\phi+\mathrm{id}) = \ker(\phi-2\mathrm{id})^3$. Poniamo quindi $v_4 = (\phi - 2\mathrm{id})(v_5) = e_2 + e_3$ e $v_3 = (\phi - 2\mathrm{id})^2(v_5) = e_1 - e_4$. Posto $v_1 = 2e_1 - 5e_4$ e $v_2 = 2e_2 - 4e_3 - e_4$, abbiamo determinato una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan. Possiamo quindi scrivere

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Dunque $\dim\ker(\psi-2\mathrm{id})^3 = 5$, $\dim\ker\psi^2 = 4$ e $\dim\ker(\psi+\mathrm{id})^3 = 3$. La somma delle dimensioni è uguale a $12 = \dim V$; quindi per il Lemma di Decomposizione, $V = \ker(\psi-2\mathrm{id})^3 \oplus \ker\psi^2 \oplus \ker(\psi+\mathrm{id})^3$. Il polinomio caratteristico di ψ è $p_\psi(X) = X^4(X-2)^5(X+1)^3$ e il polinomio minimo è $\lambda_\psi(X) = X^2(X-2)^3(X+1)^3$. Nella matrice di Jordan di ψ ci sono quindi, un blocco di ordine 3 relativo all'autovalore -1, un blocco di ordine 3 relativo all'autovalore 2 e almeno un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0. Quindi vi sono quattro possibilità per la matrice di Jordan di ψ; e precisamente, oltre ai blocchi citati:

- due blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 2 e due blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 0;
- due blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 2 e un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0;
- un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 2 e due blocchi di ordine 1 relativi all'autovalore 0;
- un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 2 e un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0.

Infine, se $\psi(W) \subseteq W$, allora il polinomio caratteristico di $\psi_{|W}$ ha grado positivo e divide il polinomio caratteristico di ψ, che ha tutti i suoi zeri nel campo $\mathbb{Q}$. Quindi deve esserci un autovalore razionale per $\psi_{|W}$ a cui corrisponde almeno un autovettore in W. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$, col sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3, e_4\})$, si considerino le sottovarietà lineari:* $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ *e* $\pi_2 : \begin{cases} X_1 - X_2 - 2X_3 = 0 \\ 2X_1 - 2X_2 - X_3 = 3 \end{cases}$.

(a) [3 punti] *Si determinino le dimensioni, la reciproca posizione e la distanza tra le due sottovarietà lineari. Si determinino le coppie di punti di minima distanza tra π_1 e π_2.*

(b) [3 punti] *Si determini, se esiste un piano τ, tale che $\tau \cap \pi_1 = \{O + e_1 - e_3\}$ e $\tau \cap \pi_2 = \{O + 2e_1 + e_3\}$. È possibile descrivere tutti i piani soddisfacenti a questa condizione?*

(c) [3 punti] *Si scriva una matrice di un'isometria, $f : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$, tale che $f(\pi_1) = \pi_2$ e $f(\pi_2) = \pi_1$. Una tale isometria è unica?*

Svolgimento. (a) Le due sottovarietà lineari hanno entrambe rango 2, essendo definite da sistemi lineari di rango 2 in $\mathbb{E}^4$. In particolare, $\pi_2 = O + 2e_1 + e_3 + \langle e_1 + e_2, e_4 \rangle$. Si tratta quindi di due piani, che hanno intersezione vuota, ma hanno in comune solo la direzione $\langle e_1 + e_2 + 2e_4 \rangle$.

Una direzione ortogonale a entrambi i piani è generata dal vettore $n = e_1 - e_2 + e_3$ e quindi, la distanza tra i due piani è uguale alla lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $(O+2e_1+e_3)-(O+e_1-e_3) = e_1+2e_3$ lungo $\langle n \rangle$, ovvero $dist(\pi_1, \pi_2) = \frac{(e_1+2e_3)\cdot n}{\|n\|} = \sqrt{3}$.

Le coppie di punti di minima distanza formano l'insieme $\{ (P_a, Q_a) \mid a \in \mathbb{R} \}$, ove $P_a = O + (a+1)e_1 + (a+1)e_2 + 2ae_4$ e $Q_a = O + (a+2)e_1 + ae_2 + e_3 + 2ae_4$.

(b) Il piano τ deve contenere la retta per i due punti $O + e_1 - e_3$ e $O + 2e_1 + e_3$, ovvero $r = O + e_1 - e_3 + \langle e_1 + 2e_3 \rangle$. Inoltre, deve essere parallelo a un'altra direzione, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, tale che $\langle e_1 + 2e_3, v \rangle$ sia un sottospazio complementare ai sottospazi direttori dei due piani. Ad esempio, prendendo $v = e_1$ si ha un tale piano; quello di equazioni $\begin{cases} X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$.

I piani di questo tipo, sono quindi determinati dalla scelta del vettore v, che possiamo scegliere in un iperpiano (vettoriale) complementare al sottospazio $\langle e_1 + 2e_3 \rangle$; ad esempio, nell'iperpiano $X_1 + 2X_3 = 0$, purché il sottospazio direttore di τ sia complementare ai sottospazi direttori dei due piani, ovvero non appartenga ai due iperpiani $\langle e_1 + 2e_3, e_1 + e_2 + 2e_4, e_2 + e_3 \rangle$, di equazione $4X_1 + 2X_2 - 2X_3 - 3X_4 = 0$ e $\langle e_1 + 2e_3, e_1 + e_2, e_4 \rangle$ di equazione $2X_1 - 2X_2 - X_3 = 0$.

(c) Siano $P_0 = O + e_1 + e_2$ e $Q_0 = O + 2e_1 + e_3$ una coppia di punti di minima distanza tra i due piani. Possiamo scrivere $\pi_1 = P_0 + \langle v_1, v_2 \rangle$ $\pi_2 = Q_0 + \langle v_2, v_3 \rangle$, ove

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_4), \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 + e_2 + 2e_4), \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{66}}(e_1 - 5e_2 - 6e_3 + 2e_4).$$

Ovvero scegliendo basi ortonormali dei sottospazi direttori e due punti di applicazione, P_0 e Q_0, tali che

$$v_4 = \frac{1}{\|Q_0 - P_0\|}(Q_0 - P_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3) \in \langle v_1, v_2, v_3 \rangle^\perp .$$

Prendiamo come origine il punto $M = \frac{P_0+Q_0}{2}$ ed otteniamo un riferimento (affine) $\mathscr{T} = (M, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$, i cui vettori sono normalizzati, ma non sono a due a due ortogonali.

L'affinità che lascia fisso M e ha come applicazione lineare associata $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $\phi(v_1) = v_3$, $\phi(v_2) = v_2$, $\phi(v_3) = v_1$ $\phi(v_4) = -v_4$, scambia tra loro i due piani π_1 e π_2 ed è un isometria, perché, per ogni vettore $v = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$, si ha

$$\|\phi(v)\|^2 = \|av_3 + bv_2 + cv_1 - dv_4\|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2acv_1 \cdot v_3 = \|av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4\|^2 = \|v\|^2.$$

La matrice di f nel riferimento $\mathscr{T}$ è quindi $\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$. I due piani non variano se si compie una traslazione parallela alla direzione comune ai due piani, $\langle v_2 \rangle$, e quindi possiamo comporre f con una qualsiasi traslazione di questo tipo e ottenere un'altra isometria con le stesse proprietà. □

ESERCIZIO 3. [6 punti] *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si consideri l'isometria composta dalla riflessione rispetto al piano $\pi_1 : X_1 - 2X_3 - 1 = 0$, seguita dalla traslazione di vettore $v = 2e_1 + e_2 + e_3$ e seguita ulteriormente dalla riflessione rispetto al piano $\pi_2 : X_1 - X_2 - X_3 - 2 = 0$. Si scrivano le matrici delle singole isometrie e della loro composizione e si classifichi secondo Eulero l'applicazione composta.*

Svolgimento. Le matrici sono

$$S_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 4/3 & 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -4/3 & 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -4/3 & 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{array}\right), \qquad T = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad S_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2/5 & 3/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 0 & -3/5 \end{array}\right);$$

e la matrice della loro composizione è il prodotto (nell'ordine) di queste matrici.

L'isometria è composta da due riflessioni e da una traslazione parallela ad entrambo i piani di riflessione e quindi che commuta con queste. La composizione di due simmetrie è una rotazione che ha come asse l'intersezione dei due piani di riflessione ($h = O + e_1 - e_2 + \langle 2e_1 + e_2 + e_3 \rangle$), che è parallelo a v. Quindi l'isometria composta è una rototraslazione di asse h. □

ESERCIZIO 4. [6 punti] *Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio euclideo di dimensione n.*

(a) Dati i vettori $v_1, \dots, v_h$, $w_1, \dots, w_k$ in $\mathbb{E}^n$, linearmente indipendenti, si considerino i parallelepipedi

$$P_1 = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^h a_i v_i \mid a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, h \right\}, \qquad P_2 = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^k b_i w_i \mid b_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k \right\},$$
$$P_3 = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^h a_i v_i + \sum_{j=1}^k b_j w_j \mid a_i, b_j \in [0,1],\ i = 1, \dots, h,\ j = 1, \dots, k \right\}.$$

È vero che $vol^{h+k}(P_3) = vol^h(P_1)\, vol^k(P_2)$, se $\langle v_1, \dots, v_h \rangle$ e $\langle w_1, \dots, w_k \rangle$ sono ortogonali?

(b) Siano date due sottovarietà lineari $\mathbb{L} = P + U$ e $\mathbb{M} = Q + W$ di $\mathbb{E}^n$ e siano $u_1, \dots, u_r$ una base di $U \cap W$, $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_h$ una base di U, $u_1, \dots, u_r, w_{r+1}, \dots, w_k$ una base di W. Si dimostri che

$$dist(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = \frac{vol^{h+k-r+1}(Q - P, u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_h, w_{r+1}, \dots, w_k)}{vol^{h+k-r}(u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_h, w_{r+1}, \dots, w_k)}.$$

Svolgimento. (*a*) Fissata una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con le stesse lettere, $v_1, \dots, v_h$, $w_1, \dots, w_k$ le colonne di coordinate dei vettori corrispondenti nella base fissata. Indicate poi con $V \in M_{n \times h}(\mathbb{R})$ e $W \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ le due matrici che hanno come colonne $v_1, \dots, v_h$ e $w_1, \dots, w_k$, rispettivamente, si ha

$$vol^{h+k}(P_3) = \sqrt{\det {}^t(V|W)\,(V|W)} = \sqrt{\det \left(\begin{array}{c|c} {}^tVV & {}^tVW \\ \hline {}^tWV & {}^tWW \end{array}\right)},$$
$$vol^h(P_1) = \sqrt{\det {}^tVV}, \qquad vol^k(P_2) = \sqrt{\det {}^tWW}.$$

Si deduce da ciò la tesi quando $\langle v_1, \dots, v_h \rangle$ e $\langle w_1, \dots, w_k \rangle$ sono ortogonali, ovvero ${}^tVW = \mathbf{0}$.

(*b*) Il volume al numeratore non cambia se prendiamo come P e Q una coppia di punti di minima distanza, ovvero con $Q - P \in \langle u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_h, w_{r+1}, \dots, w_k \rangle^\perp$ (perché?). Per quanto visto nel punto precedente, la frazione risulta uguale a $vol^1(Q - P) = \|Q - P\|$, che è proprio la distanza tra le due sottovarietà lineari. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 16 settembre 2014

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Determinare la forma di Jordan di ϕ^{-1} e i suoi autospazi generalizzati.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-5)^3(X-6)^2$ e quindi gli autovalori sono 5 e 6, con molteplicità (algebrica) 3 e 2, rispettivamente. I relativi autovettori generano i sottospazi $\ker(\phi-5) = \langle e_4 \rangle$ e $\ker(\phi-6) = \langle -e_3 + e_4 + e_5 \rangle$ quindi vi è un unico blocco di Jordan di ordine 3 per l'autovalore 5 e un unico blocco di Jordan di ordine 2 per l'autovalore 6.

Il polinomio minimo $\lambda_\phi(X) = p_\phi(X) = (X-5)^3(X-6)^2$.

(b) Osservando che

$$(A-5) = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A-6 = \begin{pmatrix} 3 & -12 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (A-6)^2 = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 30 & 0 & 30 \\ -1 & 4 & 13 & 0 & 13 \\ 3 & -12 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & 12 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si ha che $\ker(\phi-6)^2 = \langle -e_3 + e_4 + e_5, 4e_1 + e_2 + 4e_4 \rangle$ quindi $v_5 := 4e_1 + e_2 + 4e_4$ è autovettore generalizzato di periodo 2 relativo all'autovalore 6 e definiamo $v_4 = (\phi-6)v_5 = 4e_3 - 4e_4 - 4e_5 \in \ker(\phi-6)$. Infine $v_3 = 30e_1 + 13e_2 + 3e_3 - e_4 - 2e_5$ è autovettore generalizzato di periodo 3 relativo all'autovalore 5 e $v_2 = (\phi-5)v_3 = -33e_1 - 11e_2 + 33e_3 - 2e_4 - 33e_5$, $v_1 = -33e_4$.

In questo modo abbiamo una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, rispetto a cui ϕ ha matrice di Jordan e possiamo quindi scrivere

$$J = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & -33 & 30 & 0 & 4 \\ 0 & -11 & 13 & 0 & 1 \\ 0 & 33 & 3 & 4 & 0 \\ -33 & -2 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -33 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Siano $\overline{V_5}$ e $\overline{V_6}$ gli autospazi generalizzati relativi rispettivamente agli autovalori 5 e 6 per ϕ. Allora, essendo $J = P^{-1}AP$ si ha $J^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, si ottiene che la forma di Jordan di ϕ^{-1} è

$$J' = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

e gli autospazi generalizzati di ϕ^{-1} sono $\overline{V_{1/5}} = \overline{V_5}$ e $\overline{V_{1/6}} = \overline{V_6}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ e i piani $\pi_1 : z = 0$, $\pi_2 : y = 0$, $\pi_3 : y + z = 0$, $\pi_4 : 2y + z = 0$.*
(1) Determinare le matrici (nel s.d.r. $\mathscr{R}$) di tutte le affinità, f, di $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ che soddisfino a tutte le condizioni seguenti:

(a) l'asse delle ascisse $y = z = 0$ sia costituita da punti uniti per f,
(b) $f(\pi_k) = \pi_{k+1}$ per ogni $k = 1, 2, 3$ e
(c) $f(O + e_1 + e_2 + e_3) = O + e_1 + e_2$.

(2) Determinare tutti le sottovarietà lineari unite per f.

Svolgimento. (*1*) Sia f una tale affinità e φ l'applicazione lineare associata. Affinché l'asse delle ascisse sia costituita da punti uniti si deve avere $f(O) = O$ e $\varphi(e_1) = e_1$ da cui si ricavano le prime due colonne della matrice. Inoltre e_2 è parallelo al piano π_1 quindi $\varphi(e_2) \in \{y = 0\}$ mentre e_3 è parallelo al piano π_2 quindi $\varphi(e_3) \in \{y + z = 0\}$. La matrice cercata deve essere del tipo:

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & a & a' \\ 0 & 0 & 0 & b' \\ 0 & 0 & b & -b' \end{array}\right)$$

con $bb' \neq 0$.

La condizione $f(\pi_3) = \pi_4$ impone che $(0, 0, 2, 1)A = \alpha(0, 0, 1, 1)$ da cui si ottiene $b = b'$. Infine la condizione (c) determina $b = 1$ e $a + a' = 0$ da cui si ottiene che le matrici cercate sono tutte e sole

$$A_a = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

con $a \in \mathbb{Q}$.

(*2*) Per ogni $a \in \mathbb{Q}$ i punti uniti per A_a sono tutti e soli i punti dell'asse $y = z = 0$.

Notiamo che la matrice dell'endomorfismo φ_a ha sempre polinomio caratteristico $P(X) = (1-X)(X^2 + X - 1)$ la cui unica radice in $\mathbb{Q}$ è 1. Quindi i piani uniti per A_a sono tutti e soli i piani di equazioni $x + ay = k$ con $k \in \mathbb{Q}$ mentre l'unica retta unita è l'asse $y = z = 0$. Cosa cambia se si considera il campo dei numeri reali $\mathbb{R}$ invece di $\mathbb{Q}$? □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si consideri il piano $\pi : x + 3y = 0$.*

(a) Si determini il piano π' parallelo a π tale che, detta σ_1 la riflessione ortogonale di asse π', si abbia $\sigma(O + 2e_1 + 6e_2) = O$. Si determini inoltre la matrice di σ_1 nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$.

(b) Sia t la retta ortogonale a π e passante per il punto $Q = O + e_1 + 3e_2 + e_3$. Detto τ il piano contenente t e parallelo a e_3 si classifichi l'isometria ottenuta componendo la riflessione, σ_2, di asse τ dopo σ_1.

(c) Si consideri il punto Q nel piano π: $Q = O - 3e_1 + e_2 \in \pi$. Determinare tutte le rette contenute in π passanti per Q e aventi distanza 1 da t.

Svolgimento. (a) La direzione ortogonale a π è $\langle e_1 + 3e_2 \rangle$ quindi per ogni punto P si deve avere $\sigma_1(P) - P =\in \langle e_1 + 3e_2 \rangle$. In particolare per $P = O + 2e_1 + 6e_2$ si ha $\sigma_1(P) - P = -2e_1 - 6e_2 \in \langle e_1 + 3e_2 \rangle$ quindi la riflessione ortogonale esiste e il punto medio $M = (\sigma_1(P) + P)/2 = O + e_1 + 3e_2$ è un punto unito per σ_1 quindi π' deve passare per M da cui si ricava $\pi' : x + 3y = 10$. Dalla consueta formula $\sigma_1(X) = X - 2\frac{(X-M)\cdot n}{n\cdot n}n$ si ricava la matrice

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 4/5 & -3/5 & 0 \\ 6 & -3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(*b*) La retta t ha equazioni $t : z - 1 = 3x - y = 0$, e $\tau : 3x - y = 0$, $R := t \cap \pi' = \{O + e_1 + 3e_2 + e_3\}$. Preso il sistema di riferimento ortonormale $\mathscr{R}' = \{R; v_1 = (e_1 + 3e_2)/\sqrt{10}, v_2 = (3e_1 - e_2)/\sqrt{10}, v_3 = v_1 \times v_2 = -e_3\}$ si ha:

$$T = \alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(\sigma_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad S = \alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(\sigma_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad TS = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

è una rotazione attorno all'asse $R+\langle e_3\rangle$ di angolo π.

(c) Si ha $H = t\cap\pi = \{O+e_3\}$ consideriamo il fascio di piani di asse la retta $t' : Q+\langle e_1+3e_2\rangle : z = 3x-y+10 = 0$ ossia la retta parallela a t passante per Q.

$$\pi_{\alpha,\beta} : \alpha z+\beta(3x-y+10) = 0, \qquad \text{con } (\alpha,\beta) \text{ parametri omogenei.}$$

Possiamo parametrizzare tutte le rette contenute in π e passanti per Q come intersezione tra π e un piano del fascio, ovvero $r_{\alpha,\beta} = \pi_{\alpha,\beta}\cap\pi$; e $dist(r_{\alpha,\beta}, t) = dist(\pi_{\alpha,\beta}, H)$. In questo modo si ottengono le due rette:

$$r : \begin{cases} z = 0 \\ x+3y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' : \begin{cases} -6x+2y+9z-20 = 0 \\ x+3y = 0. \end{cases}$$

□