Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 24 novembre 2014 – Compito **A**

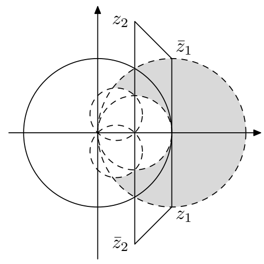
ESERCIZIO 1. *Si considerino i polinomi $P(X) = 2X^2 - (3+i)X + 4 + 2i$ e $Q(X) = 2X^2 - (3-i)X + 4 - 2i$ in $\mathbb{C}[X]$.*

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici dei due polinomi.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del poligono convesso P, che ha come vertici le radici dei polinomi e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I) \cap I$ ove si indichino con I i punti interni a P e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

Svolgimento. (a) Le radici di $P(X)$ sono i numeri complessi $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = \frac{1+3i}{2}$. Le radici di $Q(X)$ sono i loro coniugati, ovvero $\bar{z}_1 = 1 + i$ e $\bar{z}_2 = \frac{1-3i}{2}$.



(b) Il poligono P è quindi un trapezio (cfr. il disegno a fianco) e i suoi lati sono le rette

$$\begin{aligned} &z_1 \vee \bar{z}_1 : z + \bar{z} - 2 = 0, \\ &\bar{z}_1 \vee z_2 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 4 = 0, \\ &z_2 \vee \bar{z}_2 : z + \bar{z} - 1 = 0, \\ &\bar{z}_2 \vee z_1 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 4 = 0, \end{aligned} \qquad \text{quindi} \quad I : \begin{cases} z + \bar{z} < 2 \\ (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 4 < 0 \\ z + \bar{z} > 1 \\ (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 4 < 0 \end{cases}.$$

(c) Le immagini delle quattro rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\begin{aligned} &\lambda^*(z_1 \vee \bar{z}_1) : z\bar{z} - \frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2} = 0, \\ &\lambda^*(\bar{z}_1 \vee z_2) : z\bar{z} - \frac{1-i}{4}z - \frac{1+i}{4}\bar{z} = 0, \\ &\lambda^*(z_2 \vee \bar{z}_2) : z\bar{z} - z - \bar{z} = 0, \\ &\lambda^*(\bar{z}_2 \vee z_1) : z\bar{z} - \frac{1+i}{4}z - \frac{1-i}{4}\bar{z} = 0, \end{aligned} \qquad \text{quindi} \qquad \lambda^*(I) : \begin{cases} z\bar{z} - \frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2} > 0 \\ z\bar{z} - \frac{1-i}{4}z - \frac{1+i}{4}\bar{z} > 0 \\ z\bar{z} - z - \bar{z} < 0 \\ z\bar{z} - \frac{1+i}{4}z - \frac{1-i}{4}\bar{z} > 0 \end{cases}.$$

L'insieme I è formato dai punti interni al trapezio; la parte ombreggiata (escluso il bordo) rappresenta l'insieme $\lambda_*(I)$; si deduce da ciò l'insieme $\lambda_*(I) \cap I$ (evidenziarlo!). □

ESERCIZIO 2. *Sia $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, di grado minore o uguale a 4, e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ la base (ordinata) standard. Sia $W = \mathbb{Q}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.*

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi: V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(1+X^2-X^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \phi(1-X^2+X^4), \qquad \phi(X-X^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \phi(2X-3X^3), \qquad \phi(1+X^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per tali applicazioni si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\phi)$; si determinino inoltre delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si dica se le applicazioni ϕ del punto precedente sono invertibili a destra o a sinistra e, in caso positivo, si trovino tutte le possibili inverse (destre, sinistre o bilatere) e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(c) Sia fissata un'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, tra due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo C; e si indichi con $L_\phi : Hom_C(W, V) \to Hom_C(W, W)$ l'applicazione $\psi \mapsto \phi \circ \psi$. È vero che L_ϕ è iniettiva (risp. suriettiva) se, e solo se, ϕ è iniettiva (risp. suriettiva)? Che relazioni ci sono tra il nucleo (risp. l'immagine) di ϕ e quello (risp. quella) di L_ϕ?

Svolgimento. (a) I polinomi $1+X^2-X^4, 1-X^2+X^4, X-X^3, 2X-3X^3, 1+X^4$ sono una base $\mathcal{V}$ di V e si ha

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2\\ 1/2 & 0 & -1 & 0 & -1/2\\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Dunque l'applicazione lineare ϕ esiste ed è unica. La sua matrice è $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\phi)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$. L'applicazione è suriettiva; quindi $\mathrm{im}\,\phi=\mathbb{Q}^3$, una sua base è la base canonica (l'equazione cartesiana è quella banale $0=0$). Inoltre, $\dim_{\mathbb{Q}}\ker\phi=2$, una sua base è $\{X^2-X^4, X-2X^3\}$ e $\sum_{i=0}^{4} a_iX^i\in\ker\phi$ se, e solo se, $\begin{cases} a_2+a_4=0\\ 2a_1+a_3=0\\ a_0=0\end{cases}$.

(b) L'applicazione ϕ è suriettiva, quindi è invertibile a destra ed ha infinite inverse destre, $\psi: W\to V$, individuate dalle condizioni $\psi(e_i)\in\phi^{-1}(e_i)$ per $i=1,2,3$. Le possibili matrici sono quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\psi)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ a & c & e\\ b & d & f\\ -2a & -2c & -2e\\ -b & -d & -f\end{pmatrix};$$

al variare di (a,b,c,d,e,f) in $\mathbb{Q}^6$.

(c) $\psi\in\mathrm{Hom}_C(W,V)$ appartiene a $\ker L_\phi$ se, e solo se, $\mathrm{im}\,\psi\subseteq\ker\phi$. Dunque, $\ker L_\phi\cong\mathrm{Hom}_C(W,\ker\phi)$, che è nullo se, e solo se, ϕ è iniettiva. Inoltre, $\chi\in\mathrm{Hom}_C(W,W)$ appartiene a $\mathrm{im}\,L_\phi$ se, e solo se, $\mathrm{im}\,\chi\subseteq\mathrm{im}\,\phi$. Dunque, $\mathrm{im}\,L_\phi\cong\mathrm{Hom}_C(W,\mathrm{im}\,\phi)$, che è uguale a $\mathrm{Hom}_C(W,W)$ se, e solo se, ϕ è suriettiva. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Una filtrazione crescente su V è una famiglia di sottospazi $\langle 0\rangle=U_0\subset U_1\subset\cdots\subset U_k=V$; e, per ogni $i=0,\dots,k$, sia $h_i=\dim_C U_i$.*

(a) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0\subset\cdots\subset U_k$, si consideri l'insieme

$$\mathscr{D}=\{\,\phi\in Hom_C(V,V)\mid\phi(U_j)\subseteq U_{j+1},\ j=0,\dots,k-1\,\}.$$

Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $Hom_C(V,V)$ e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione. Quanti elementi contiene l'insieme $\mathscr{D}$ se $C=\mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k=5$ e $h_i=3i$, per $i=0,\dots,5$?

(b) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0\subset\cdots\subset U_k$, è vero che esistono dei sottospazi $W_0\supset\cdots\supset W_k$ tali che $U_j\oplus W_j=V$ per ogni $j=0,\dots,k$? Quante sono le possibili scelte dei sottospazi W_j se $C=\mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k=5$ e $h_i=3i$, per $i=0,\dots,5$?

Svolgimento. (a) L'omomorfismo nullo appartiene a $\mathscr{D}$ e l'insieme è chiuso per combinazioni lineari. Si tratta quindi di un sottospazio di dimensione $d=h_1h_2+(h_2-h_1)h_3+\cdots+(h_{k-1}-h_{k-2})h_k+(h_k-h_{k-1})h_k$.

Sul campo $\mathbb{F}_q$, lo spazio $\mathscr{D}$ è isomorfo a $\mathbb{F}_q^d$, ove d è la dimensione dello spazio; e quindi i suoi elementi sono q^d, con $d=171$.

(b) Essendo $U_0=\langle 0\rangle$, vi è un'unica scelta per il sottospazio W_0, ovvero $W_0=V$. Come W_1 possiamo prendere un qualsiasi complementare di U_1 e vi sono tante scelte quanti sono gli elementi di $\mathrm{Hom}_C(W_1,U_1)$. Scelto W_1, il sottospazio W_2 deve soddisfare alla condizione $(W_1\cap U_2)\oplus W_2=W_1$ e quindi vi sono tante scelte quanti sono gli elementi di $\mathrm{Hom}_C(W_2,W_1\cap U_2)$. Analogamente, il sottospazio W_3 deve soddisfare alla condizione $(W_2\cap U_3)\oplus W_3=W_2$ e così via, fino a esaurire la filtrazione.

Sul campo $\mathbb{F}_q$, le scelte possibili sono quindi il prodotto delle cardinalità degli spazi $\mathrm{Hom}_C(W_i,W_{i-1}\cap U_i)$, per $i=1,\dots,5$, ovvero q^{90}. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 24 novembre 2014 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si considerino i polinomi $P(X) = 2X^2+(1-3i)X-4-2i$ e $Q(X) = 2X^2-(1+3i)X-4+2i$ in $\mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici dei due polinomi.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del poligono convesso P, che ha come vertici le radici dei polinomi e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(I) \smallsetminus I$ ove si indichino con I i punti interni a P e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia $V = \mathbb{Q}[X]_{\le 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, di grado minore o uguale a 4, e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ la base (ordinata) standard. Sia $W = \mathbb{Q}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(1+X^2+X^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \phi(1-X^2-X^4), \qquad \phi(X+X^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \phi(2X+3X^3), \qquad \phi(1-X^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per tali applicazioni si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\phi)$; si determinino inoltre delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si dica se le applicazioni ϕ del punto precedente sono invertibili a destra o a sinistra e, in caso positivo, si trovino tutte le possibili inverse (destre, sinistre o bilatere) e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(c) Sia fissata un'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, tra due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo C; e si indichi con $R_\phi : \mathrm{Hom}_C(W,V) \to \mathrm{Hom}_C(V,V)$ l'applicazione $\psi \mapsto \psi \circ \phi$. È vero che R_ϕ è iniettiva (risp. suriettiva) se, e solo se, ϕ è suriettiva (risp. iniettiva)? Che relazioni ci sono tra il nucleo (risp. l'immagine) di ϕ e l'immagine (risp. il nucleo) di R_ϕ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Una *filtrazione crescente* su V è una famiglia di sottospazi $\langle 0 \rangle = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_k = V$; e, per ogni $i = 0, \dots, k$, sia $h_i = \dim_C U_i$.

(a) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0 \subset \cdots \subset U_k$, si consideri l'insieme

$$\mathscr{D} = \{\, \phi \in \mathrm{Hom}_C(V,V) \mid \phi(U_j) \subseteq U_{j-1},\ j = 1, \dots, k \,\}.$$

Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V,V)$ e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione. Quanti elementi contiene l'insieme $\mathscr{D}$ se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 2i$, per $i = 0, \dots, 5$?

(b) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0 \subset \cdots \subset U_k$, è vero che esistono dei sottospazi $W_0 \supset \cdots \supset W_k$ tali che $U_j \oplus W_j = V$ per ogni $j = 0, \dots, k$? Quante sono le possibili scelte dei sottospazi W_j se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 2i$, per $i = 0, \dots, 5$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 24 novembre 2014 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Si considerino i polinomi $P(X) = 2X^2-(1-3i)X-4-2i$ e $Q(X) = 2X^2+(1+3i)X-4+2i$ in $\mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici dei due polinomi.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del poligono convesso P, che ha come vertici le radici dei polinomi e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $I \setminus \lambda_*(I)$ ove si indichino con I i punti interni a P e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, di grado minore o uguale a 4, e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ la base (ordinata) standard. Sia $W = \mathbb{Q}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(1+X^2-X^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \phi(1-X^2+X^4), \qquad \phi(X-X^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \phi(2X-3X^3), \qquad \phi(1-X^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per tali applicazioni si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\phi)$; si determinino inoltre delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si dica se le applicazioni ϕ del punto precedente sono invertibili a destra o a sinistra e, in caso positivo, si trovino tutte le possibili inverse (destre, sinistre o bilatere) e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(c) Sia fissata un'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, tra due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo C; e si indichi con $L_\phi : \mathrm{Hom}_C(W, V) \to \mathrm{Hom}_C(W, W)$ l'applicazione $\psi \mapsto \phi \circ \psi$. È vero che L_ϕ è iniettiva (risp. suriettiva) se, e solo se, ϕ è iniettiva (risp. suriettiva)? Che relazioni ci sono tra il nucleo (risp. l'immagine) di ϕ e quello (risp. quella) di L_ϕ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Una *filtrazione decrescente* su V è una famiglia di sottospazi $V = W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_k = \langle 0 \rangle$; e, per ogni $i = 0, \dots, k$, sia $h_i = \dim_C W_i$.

(a) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $W_0 \supset \cdots \supset W_k$, si consideri l'insieme

$$\mathscr{D} = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_C(V, V) \mid \phi(W_j) \subseteq W_j,\ j = 0, \dots, k \}.$$

Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V, V)$ e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione. Quanti elementi contiene l'insieme $\mathscr{D}$ se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 10 - 2i$, per $i = 0, \dots, 5$?

(b) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $W_0 \supset \cdots \supset W_k$, è vero che esistono dei sottospazi $U_0 \subset \cdots \subset U_k$ di V tali che $U_j \oplus W_j = V$ per ogni $j = 0, \dots, k$? Quante sono le possibili scelte dei sottospazi U_j se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 10 - 2i$, per $i = 0, \dots, 5$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 24 novembre 2014 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Si considerino i polinomi $P(X) = 2X^2 + (3+i)X + 4 + 2i$ e $Q(X) = 2X^2 + (3-i)X + 4 - 2i$ in $\mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici dei due polinomi.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati del poligono convesso P, che ha come vertici le radici dei polinomi e si scrivano tali equazioni in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del poligono P nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la differenza simmetrica $\lambda_*(I) \triangle I$ (per ogni coppia di sottoinsiemi, A e B, si pone $A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B)$) ove si indichino con I i punti interni a P e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Sia $V = \mathbb{Q}[X]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Q}$, di grado minore o uguale a 4, e sia $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ la base (ordinata) standard. Sia $W = \mathbb{Q}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi: V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(1+X^2+X^4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \phi(1-X^2-X^4), \qquad \phi(X+X^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \phi(2X+3X^3), \qquad \phi(1+X^4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Per tali applicazioni si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\phi)$; si determinino inoltre delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si dica se le applicazioni ϕ del punto precedente sono invertibili a destra o a sinistra e, in caso positivo, si trovino tutte le possibili inverse (destre, sinistre o bilatere) e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(c) Sia fissata un'applicazione lineare, $\phi : V \to W$, tra due spazi vettoriali di dimensione finita su un campo C; e si indichi con $R_\phi : \mathrm{Hom}_C(W, V) \to \mathrm{Hom}_C(V, V)$ l'applicazione $\psi \mapsto \psi \circ \phi$. È vero che R_ϕ è iniettiva (risp. suriettiva) se, e solo se, ϕ è suriettiva (risp. iniettiva)? Che relazioni ci sono tra il nucleo (risp. l'immagine) di ϕ e l'immagine (risp. il nucleo) di R_ϕ?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Una *filtrazione crescente* su V è una famiglia di sottospazi $\langle 0 \rangle = U_0 \subset U_1 \subset \cdots \subset U_k = V$; e, per ogni $i = 0, \dots, k$, sia $h_i = \dim_C U_i$.

(a) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0 \subset \cdots \subset U_k$, si consideri l'insieme

$$\mathscr{D} = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_C(V, V) \mid \phi(U_j) \subseteq U_j, \ j = 0, \dots, k \}.$$

Si dica se $\mathscr{D}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}_C(V, V)$ e, in caso affermativo, se ne determini la dimensione. Quanti elementi contiene l'insieme $\mathscr{D}$ se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 3i$, per $i = 0, \dots, 5$?

(b) Dato uno spazio V e una sua filtrazione, $U_0 \subset \cdots \subset U_k$, è vero che esistono dei sottospazi $W_0 \supset \cdots \supset W_k$ tali che $U_j \oplus W_j = V$ per ogni $j = 0, \dots, k$? Quante sono le possibili scelte dei sottospazi W_j se $C = \mathbb{F}_q$ è il campo finito con q elementi, $k = 5$ e $h_i = 3i$, per $i = 0, \dots, 5$?

ESERCIZIO 1. *Per ogni numero naturale $n \geq 1$, si consideri la matrice*

$$X_{2n} = \sum_{i=1}^{2n} \Big(a\varepsilon(i,i) + \varepsilon(2n-i+1,i) \Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\varepsilon(n-i+1,i) + \varepsilon(2n-i+1,n+i) \Big) - \sum_{i=1}^{[\frac{n+1}{2}]} 2a\varepsilon(n+i,n+i)$$

ove, per ogni numero reale x, si indichi con $[x]$ il numero intero tale che $[x] \leq x < [x]+1$.
(a) Si scrivano le matrici X_4, X_6, X_8, X_{10} e se ne calcoli il determinante in funzione del parametro a.
(b) Si scriva $\det X_{2n}$ in funzione dell'intero n e del parametro a.

Svolgimento. Si ha

$$X_4 = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad X_6 = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$X_8 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad X_{10} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il determinante $\delta_{2n} = \det X_{2n}$, effettuiamo alcune operazioni elementari sulle righe e sulle colonne delle matrici X_{2n}. Sottraiamo alla i-esima riga la riga di posto $n+i$, per $i = 1, \dots, n$. Poi, sottraiamo alla colonna $n+i$ la colonna i, per $i = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$; mentre per $i = \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1, \dots, n$, sommiamo alla colonna $n+i$ la colonna i. Nel caso della matrice X_8, ad esempio, si ottiene

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \end{array}\right) \quad \text{e poi} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right);$$

il caso generale è perfettamente analogo.

Le operazioni su righe e colonne non hanno modificato il determinante ed il determinante della matrice così ottenuta è uguale a $\delta_{2n} = (-1)^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a^{2n}$. In particolare, si ha $\delta_4 = -a^4$, $\delta_6 = a^6$, $\delta_8 = a^8$, $\delta_{10} = -a^{10}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base.*
(a) Indicato con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

si determinino il polinomio caratteristico e gli autovalori per ϕ. Detti $U_1, \dots, U_k$ gli spazi di autovettori per ϕ, relativi ad autovalori a due a due distinti, si mostri che $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ e si determini una base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_5\}$ di V fatta di autovettori per ϕ.

(b) *Si determini la base duale $\mathcal{U}^* = \{u_1^*, \dots, u_5^*\}$ della base $\mathcal{U}$, e la matrice di cambiamento di base $P = \alpha_{\mathcal{U}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id}_{V^*})$. È vero che gli elementi della base duale sono autovettori per l'applicazione trasposta $\phi^* : V^* \to V^*$? Si scrivano le matrici in base $\mathcal{V}$ delle proiezioni $\pi_i : V \to V$ associate alla decomposizione $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ (per ogni $i = 1, \dots, k$, π_i è la proiezione sul sottospazio U_i, parallelamente alla somma dei rimanenti autospazi).*

(c) *Indicata con $F : M_{4\times 5}(\mathbb{Q}) \to M_{4\times 5}(\mathbb{Q})$ l'applicazione definita da $F(X) = XA$, si dica se F è diagonalizzabile e se ne determinino gli autovalori e i relativi autospazi.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+2)(X-2)^2(X+1)^2$, e i relativi autospazi sono $U_1 = \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle 9e_1 - 4e_3 - e_5 \rangle$, $U_2 = \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle e_1 - e_5, e_2 + e_4 \rangle$, $U_3 = \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle 4e_1 - e_5, 2e_2 + 5e_4 \rangle$. Poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, i tre autospazi sono in somma diretta e la loro somma coincide con lo spazio V. Possiamo quindi prendere la base $u_1 = 9e_1 - 4e_3 - e_5$, $u_2 = e_1 - e_5$, $u_3 = e_2 + e_4$, $u_4 = 4e_1 - e_5$, $u_5 = 2e_2 + 5e_4$.

(b) La base duale è costituita dai vettori

$$u_1^* = -\frac{1}{4}v_3^*, \quad u_2^* = -\frac{1}{3}v_1^* - \frac{5}{12}v_3^* - \frac{4}{3}v_5^*, \quad u_3^* = \frac{5}{3}v_2^* - \frac{2}{3}v_4^*, \quad u_4^* = \frac{1}{3}v_1^* + \frac{2}{3}v_3^* + \frac{1}{3}v_5^*, \quad u_5^* = -\frac{1}{3}v_2^* + \frac{1}{3}v_4^*.$$

Per ogni coppia di indici i, j tra 1 e 5, si ha $\phi^*(u_i^*) \circ u_j = u_i^* \circ \phi(u_j) = c_j \delta_{ij}$, ove c_j è l'autovalore relativo all'autovettore u_j. Ciò permette di concludere. Infine, le matrici delle proiezioni sono

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & -5/12 & 0 & -4/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & -2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 5/12 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 4/3 & 0 & 8/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & -2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5/3 & 0 & 5/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(c) È chiaro che X è un autovettore per F se, e solo se, la matrice trasposta ${}^tX$ è un'autovettore per l'applicazione $G : M_{5\times 4}(\mathbb{Q}) \to M_{5\times 4}(\mathbb{Q})$, definita da $G(Y) = ({}^tA)Y$; ovvero se, e solo se, le (trasposte delle) righe di X sono autovettori per la matrice ${}^tA$. Una base di autovettori per ${}^tA$ sono le coordinate (nella base $\mathcal{V}^*$) dei vettori della base $\mathcal{U}^*$; quindi gli autovalori di F sono -2, 2 e -1 e i relativi autospazi sono

$$W_{-2} = \left\langle \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 4&0&5&0&16 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 4&0&5&0&16 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 4&0&5&0&16 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 4&0&5&0&16 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0&5&0&-2&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&5&0&-2&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&5&0&-2&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&5&0&-2&0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1&0&2&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 1&0&2&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&2&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&2&0&1 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&-1&0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 3. *Si consideri la successione di numeri reali $(x_n)_{n\geq 0}$ definita dalle condizioni*

$$x_0 = 1,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2 \qquad e \qquad x_{n+1} = 3x_n + x_{n-1} - 3x_{n-2}, \quad per \quad n \geq 2.$$

(a) *Si determini un'espressione esplicita per il termine generale della successione, x_n, in funzione dell'intero n. Cosa si può dire del $\lim_{n\to\infty} x_n$ e del $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$?*

(b) *Cosa si può dire della successione $(y_n)_{n\geq 0}$ soddisfacente alla stessa relazione ricorsiva ($y_{n+1} = 3y_n + y_{n-1} - 3y_{n-2}$, per $n \geq 2$), ma con valori iniziali $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$?*

(c) *Cosa si può dire del comportamento della successione $(z_n)_{n\geq 0}$, soddisfacente alla relazione ricorsiva data ($z_{n+1} = 3z_n + z_{n-1} - 3z_{n-2}$, per $n \geq 2$), al variare dei valori iniziali $z_0 = a$, $z_1 = b$, $z_2 = c$?*

Svolgimento. (a) Sia $v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, per $n \geq 2$, il vettore che ha come coordinate tre termini consecutivi della successione. Indicata con A la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, si ha $v_{n+1} = Av_n$, per ogni $n \geq 2$; e quindi $v_n = A^{n-2}v_2$, per ogni $n \geq 2$.

Per calcolare le potenze di A e trovare così una descrizione esplicita delle coordinate del vettore v_n, conviene portare la matrice in forma diagonale o triangolare. Il polinomio caratteristico di A è $p_A(X) = (X-3)(X-1)(X+1)$ e quindi la matrice è simile alla matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice diagonalizzante, P, ha come colonne una base di autovettori $u = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, per A e si ha $A = PDP^{-1}$ con $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Si ha quindi

$$v_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2}v_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava con un calcolo diretto $x_n = \frac{3^n - 2 + 9(-1)^n}{8} = \frac{3^n}{8}\left(1 - \frac{2}{3^n} + 9(-\frac{1}{3})^n\right)$. La successione è quindi divergente ($\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$) e i rapporti tra termini successivi tendono a $3 = \lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

(b) Il vettore iniziale della successione è ora $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(v+w)$, per cui

$$v_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} = A^{n-2}v_2 = \frac{1}{2}(v + (-1)^{n-2}w),$$

e quindi $y_n = 1$ se n è pari, mentre $y_n = 0$ se n è dispari. Quindi la successione è indeterminata e non ha senso considerare la successione dei rapporti, perché ci sono infiniti termini uguali a zero.

(c) Per discutere il caso generale, poniamo $\begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$, ovvero

$$\gamma = \frac{c-a}{8}, \qquad \beta = \frac{-2c + 4b + 6a}{8}, \qquad \alpha = \frac{c - 4b + 3a}{8},$$

e osserviamo che si ha

$$v_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = PD^{n-2}P^{-1}\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 3^{n-2}\gamma u + 1^{n-2}\beta v + (-1)^{n-2}\alpha w;$$

da cui si ricava $z_n = 3^n\gamma + \beta + (-1)^n\alpha$.

Quindi, se $\gamma \neq 0$, la successione $(z_n)_{n\geq 0}$ diverge e il rapporto $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ tende a 3 [analogamente al caso (a)]. Altrimenti, se $\gamma = 0$, significa che il vettore iniziale $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio $\langle v, w\rangle$ e, in tal caso, la successione è indeterminata se $\alpha \neq 0$ ed assume il valore $\beta + \alpha$ per n pari ed il valore $\beta - \alpha$ per n dispari [analogamente al caso (b)]. Infine, se $\alpha = 0 = \gamma$, il vettore iniziale è un multiplo di v e quindi la successione è costante con termine generale $z_n = \beta$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 3 febbraio 2015 – Compito **A**

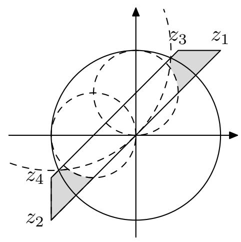
ESERCIZIO 1. *Sia $P(X) = (X^2 - 2i)(4X^2 + (2-2i)X - 5i)$. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici di $P(X)$.*

(a) Indicato con T il poligono convesso che ha come vertici le radici di $P(X)$, si disegni T nel piano di Gauss e si determinino le equazioni, in funzione delle coordinate z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati di tale poligono.

(b) Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria, si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $\lambda^*(T)$ e si evidenzino i punti di $I \cap \lambda^*(I)$, ove con I si indicano i punti interni al poligono T.

Svolgimento. Le radici di $P(X)$ sono i numeri complessi $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = \frac{1+2i}{2}$ e $z_4 = -\frac{2+i}{2}$.

(a) Il poligono P è quindi un trapezio (cfr. il disegno a fianco) e i suoi lati sono le rette



$$z_1 \vee z_2 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0,\qquad z_1 \vee z_3 : iz - i\bar{z} + 2 = 0,\qquad z_2 \vee z_4 : z + \bar{z} + 2 = 0,\qquad z_3 \vee z_4 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0,$$

$$\text{quindi}\quad I: \begin{cases} (1+i)z + (1-i)\bar{z} < 0 \\ iz - i\bar{z} + 2 > 0 \\ z + \bar{z} + 2 > 0 \\ (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 > 0 \end{cases}.$$

(b) Le immagini delle quattro rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze (generalizzate)

$$\begin{aligned} \lambda^*(z_1 \vee z_2) = z_1 \vee z_2 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(z_1 \vee z_3) &: z\bar{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(z_2 \vee z_4) &: z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(z_3 \vee z_4) &: z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0, \end{aligned}\qquad \text{quindi}\qquad \lambda^*(I): \begin{cases} (1+i)z + (1-i)\bar{z} < 0 \\ z\bar{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} > 0 \\ z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} > 0 \\ z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} > 0 \end{cases}.$$

L'insieme I è formato dai punti interni al trapezio; la parte ombreggiata (escluso il bordo) rappresenta l'insieme $\lambda_*(I) \cap I$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ delle rispettive basi. Siano dati i sottospazi $V_1 = \langle v_1 + v_3, v_2 - v_4 \rangle$ di V e $W_1 = \langle w_1, w_2 + w_4, w_3 - w_5 \rangle$ di W e sia $\mathscr{A} = \{\, \phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \phi(V_1) \subseteq W_1 \,\}$.*

(a) Si verifichi che $\mathscr{A}$ è un sottospazio vettoriale di $Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione. È vero che, se $\phi \in \mathscr{A}$ e $\phi^* : W^* \to V^*$ è l'applicazione trasposta, allora $\phi^*(w^*) \in V_1^{\perp}$ per ogni $w^* \in W_1^{\perp}$? Che condizioni si devono porre su $w_0 \in W$ e su $\zeta \in V^*$ affinché l'applicazione $w_0 \otimes \zeta : V \to W$, definita da $x \mapsto w_0(\zeta \circ x)$, appartenga ad $\mathscr{A}$?

(b) È vero che l'omomorfismo $\phi_0 : V \to W$ di matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathscr{A}$? Se $w_5 \in im\phi_0$, si fissi un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi_0(v_0) = w_5$ e si determini, se esiste, una forma lineare $\zeta \in V^*$ tale che $\zeta \circ x = 0$ per ogni $x \in V_1 + ker\phi_0$ e $\zeta \circ v_0 = 1$. In tal caso, che relazioni ci sono tra $rk\phi_0$ e $rk(\phi_0 - w_5 \otimes \zeta)$?

(c) È vero che, per ogni $\phi \in \mathscr{A}$, diversa da 0, esiste un'applicazione $w \otimes \zeta \in \mathscr{A}$ tale che $rk(\phi - w \otimes \zeta) < rk\phi$? Da ciò si può dedurre che ogni omomorfismo $\phi \in \mathscr{A}$ si scrive come $\sum_{i=1}^{r} w_i \otimes \zeta_i$ per opportuni $w_i \otimes \zeta_i \in \mathscr{A}$, e $r = rk\phi$?

Svolgimento. (a) Il sottoinsieme $\mathscr{A}$ di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W)$ contiene la funzione nulla ed è chiuso per combinazioni lineari (se ϕ_1 e ϕ_2 appartengono ad $\mathscr{A}$, allora $a_1\phi_1(v)+a_2\phi_2(v)\in W_1$ per ogni $v\in V_1$, qualunque siano gli scalari, $a_1,a_2\in\mathbb{Q}$). Quindi si tratta di un sottospazio, di dimensione 16 (come si verifica?).

Siano poi $\phi\in\mathscr{A}$, $w^*\in W_1^{\perp}$, e osserviamo che, per qualunque $v\in V_1$, si ha $\phi^*(w^*)\circ v=w^*\circ\phi(v)=0$, perché $\phi\in\mathscr{A}$ e quindi $\phi(v)\in W_1$. Dunque $\phi^*(W_1^{\perp})\subseteq V_1^{\perp}$, per ogni $\phi\in\mathscr{A}$.

Infine, affinché $w_0\otimes\zeta$ appartenga ad $\mathscr{A}$, deve aversi $w_0\in W_1$ oppure $\zeta\in V_1^{\perp}$[†].

(*b*) Si ha $\phi_0(v_1+v_3)=3(w_2+w_4)$ e $\phi_0(v_2-v_4)=2(w_2+w_4)+(w_3-w_5)$ e quindi $\phi_0\in\mathscr{A}$. Inoltre, $\phi(v_1-v_2)=w_5$ e possiamo quindi porre $v_0=v_1-v_2$ (o qualunque altro elemento di $v_0+\ker\phi_0$, ove $\ker\phi_0=\langle 2v_1-3v_2-v_3-3v_4\rangle$). La forma lineare ζ è univocamente determinata dalle condizioni date ed è uguale a $\zeta=2v_1^*+v_2^*-2v_3^*+v_4^*$. In particolare, $\ker(w_5\otimes\zeta)=V_1+\ker\phi_0$, $\mathrm{im}(w_5\otimes\zeta)=\langle w_5\rangle$ e $w_5\otimes\zeta(v_0)=w_5=\phi_0(v_0)$; da cui si conclude che $\ker(\phi_0-w_5\otimes\zeta)\supseteq\ker\phi_0\oplus\langle v_0\rangle$ e quindi il rango di $\phi_0-w_5\otimes\zeta$ è strettamente minore del rango di ϕ_0.

(*c*) Dato $\phi\in\mathscr{A}$, diverso da 0, sia $0\neq w\in\mathrm{im}\phi$, e sia $v\in V$ tale che $\phi(v)=w$. Se $w\in W_1$, possiamo prendere una forma lineare ζ, ortogonale a $\ker\phi$ e tale che $\zeta\circ v=1$ e, chiaramente, l'applicazione lineare $w\circ\zeta$ soddisfa alle condizioni richieste. Se non ci sono vettori non nulli in $\mathrm{im}\,\phi\cap W_1$, deve aversi, $V_1\subseteq\ker\phi$, perché $\phi\in\mathscr{A}$. Dunque, presi i vettori $0\neq w\in\mathrm{im}\phi$ e $v\in V$ tale che $\phi(v)=w$, possiamo trovare una forma lineare ζ ortogonale a $\ker\phi$ e tale che $\zeta\circ v=1$. Di nuovo, $w\circ\zeta\in\mathscr{A}$ e $\mathrm{rk}(\phi-w\otimes\zeta)<\mathrm{rk}\phi$. Possiamo dedurre da ciò la decomposizione dell'applicazione lineare $\phi\in\mathscr{A}$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,e_3\}$. Si consideri l'endomorfismo $\phi:V\to V$ di matrice $A=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)=\begin{pmatrix}5&-4&3\\3&-2&3\\-4&4&-2\end{pmatrix}$.*

(a) *Si mostri che ϕ è diagonalizzabile e si determinino i suoi autovalori c_1,c_2,c_3 e una base di rispettivi autovettori $\mathcal{V}=\{v_1,v_2,v_3\}$.*

(b) *Si determini la corrispondente base duale $\mathcal{V}^*=\{v_1^*,v_2^*,v_3^*\}$ di V^* e si considerino gli endomorfismi $v_i\otimes v_i^*:x\mapsto v_i(v_i^*\circ x)$, per $i=1,2,3$, e le loro matrici in base canonica. È vero che si tratta di proiezioni? Rispetto a quali decomposizioni dello spazio V? È vero che $\phi=\sum_{i=1}^3 c_iv_i\otimes v_i^*$?*

(c) *Dati un endomorfismo diagonalizzabile, ψ di $\mathbb{R}^n$ (con $n\geq 3$), e una sua base di autovettori $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_n\}$, si risponda alle domande analoghe a quelle formulate nel punto precedente.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X)=X^3-X^2-4X+4=(X-1)(X-2)(X+2)$. Gli autovalori sono quindi $1,2,-2$, e una base di corrispondenti autovettori è data da $v_1=e_1+e_2$, $v_2=e_1-e_3$, $v_3=e_1+e_2-e_3$.

(*b*) La base duale di V^* è costituita dai vettori $v_1^*=e_1^*+e_3^*$, $v_2^*=e_1^*-e_2^*$, $v_3^*=-e_1^*+e_2^*-e_3^*$ e le matrici cercate sono

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_1\otimes v_1^*)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_2\otimes v_2^*)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix},\qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_3\otimes v_3^*)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Si tratta delle proiezioni relative alla decomposizione $V=\langle v_1\rangle\oplus\langle v_2\rangle\oplus\langle v_3\rangle$ e si verifica con un calcolo diretto che

$$A=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)=\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_1\otimes v_1^*)+2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_2\otimes v_2^*)-2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v_3\otimes v_3^*),$$

che è sufficiente per concludere.

(*c*) Il caso generale è analogo e si lascia al lettore il compito di scriverlo in modo preciso. □

(†) Usando l'isomorfismo $W\otimes_{\mathbb{Q}}V^*\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W)$ dell'Esercizio 17.(d) del sesto foglio di Esercizi, possiamo scrivere $\mathscr{A}\cong W_1\otimes V^*+W\otimes V_1^{\perp}$ e usare questo isomorfismo per calcolare la dimensione di $\mathscr{A}$.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 3 febbraio 2015 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Sia $P(X) = (X^2 + 2i)(4X^2 - (2 + 2i)X + 5i)$. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici di $P(X)$.

(a) Indicato con T il poligono convesso che ha come vertici le radici di $P(X)$, si disegni T nel piano di Gauss e si determinino le equazioni, in funzione delle coordinate z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati di tale poligono.

(b) Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria, si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $\lambda^*(T)$ e si evidenzino i punti di $I \cap \lambda^*(I)$, ove con I si indicano i punti interni al poligono T.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ delle rispettive basi. Siano dati i sottospazi $V_1 = \langle v_1 + v_4, v_2 - v_3 \rangle$ di V e $W_1 = \langle w_5, w_2 + w_4, w_1 - w_3 \rangle$ di W e sia $\mathscr{A} = \{ \phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \phi(V_1) \subseteq W_1 \}$.

(a) Si verifichi che $\mathscr{A}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione. È vero che, se $\phi \in \mathscr{A}$ e $\phi^* : W^* \to V^*$ è l'applicazione trasposta, allora $\phi^*(w^*) \in V_1^{\perp}$ per ogni $w^* \in W_1^{\perp}$? Che condizioni si devono porre su $w_0 \in W$ e su $\zeta \in V^*$ affinché l'applicazione $w_0 \otimes \zeta : V \to W$, definita da $x \mapsto w_0(\zeta \circ x)$, appartenga ad $\mathscr{A}$?

(b) È vero che l'omomorfismo $\phi_0 : V \to W$ di matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $\mathscr{A}$? Se $w_1 \in \mathrm{im}\,\phi_0$, si fissi un vettore $v_0 \in V$ tale che $\phi_0(v_0) = w_1$ e si determini, se esiste, una forma lineare $\zeta \in V^*$ tale che $\zeta \circ x = 0$ per ogni $x \in V_1 + \ker\phi_0$ e $\zeta \circ v_0 = 1$. In tal caso, che relazioni ci sono tra $\mathrm{rk}\,\phi_0$ e $\mathrm{rk}\,(\phi_0 - w_1 \otimes \zeta)$?

(c) È vero che, per ogni $\phi \in \mathscr{A}$, diversa da 0, esiste un'applicazione $w \otimes \zeta \in \mathscr{A}$ tale che $\mathrm{rk}\,(\phi - w \otimes \zeta) < \mathrm{rk}\,\phi$? Da ciò si può dedurre che ogni omomorfismo $\phi \in \mathscr{A}$ si scrive come $\sum_{i=1}^{r} w_i \otimes \zeta_i$ per opportuni $w_i \otimes \zeta_i \in \mathscr{A}$, e $r = \mathrm{rk}\,\phi$?

ESERCIZIO 3. Sia V lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) Si mostri che ϕ è diagonalizzabile e si determinino i suoi autovalori c_1, c_2, c_3 e una base di rispettivi autovettori $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) Si determini la corrispondente base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ di V^* e si considerino gli endomorfismi $v_i \otimes v_i^* : x \mapsto v_i(v_i^* \circ x)$, per $i = 1, 2, 3$, e le loro matrici in base canonica. È vero che si tratta di proiezioni? Rispetto a quali decomposizioni dello spazio V? È vero che $\phi = \sum_{i=1}^{3} c_i v_i \otimes v_i^*$?

(c) Dati un endomorfismo diagonalizzabile, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (con $n \geq 3$), e una sua base di autovettori, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, si risponda alle domande analoghe a quelle formulate nel punto precedente.

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 23 febbraio 2015

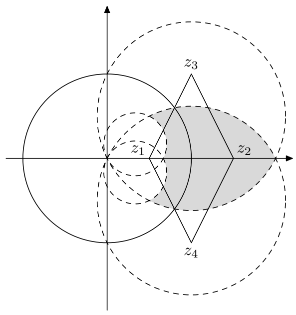
ESERCIZIO 1. *Sia $P(X) = (X^2 - 2X + 2)(X^2 - 2X + \frac{3}{4})$. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss le radici del polinomio $P(X)$.*

(a) Indicato con R il poligono convesso che ha come vertici le radici di $P(X)$, si disegni R nel piano di Gauss e si determinino le equazioni, in funzione delle coordinate z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati di tale poligono.

(b) Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria, si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette contenenti i lati di R e si evidenzino i punti di $\lambda^*(I)$, ove con I si indicano i punti interni al poligono R.

(c) È vero o falso che se r e s sono due rette parallele del piano di Gauss, non passanti per l'origine, le circonferenze $\lambda^*(r)$ e $\lambda^*(s)$ hanno la stessa retta tangente nell'origine? Cosa cambia se una delle due rette passa per l'origine?

Svolgimento. Le radici di $P(X)$ sono $z_1 = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{3}{2}$, $z_3 = 1 + i$, $z_4 = 1 - i$.



(a) I quattro punti sono i vertici di un parallelogramma (un rombo, per la precisione), come appare in figura, e i lati del parallelogramma sono le rette (a due a due parallele)

$$\begin{aligned} &z_1 \vee z_3\colon (2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 = 0 \\ &z_2 \vee z_4\colon (2+i)z + (2-i)\bar{z} - 6 = 0 \\ &z_1 \vee z_4\colon (2-i)z + (2+i)\bar{z} - 2 = 0 \\ &z_2 \vee z_3\colon (2-i)z + (2+i)\bar{z} - 6 = 0 \end{aligned} \qquad \text{quindi} \quad I\colon \begin{cases} (2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 > 0 \\ (2+i)z + (2-i)\bar{z} - 6 < 0 \\ (2-i)z + (2+i)\bar{z} - 2 > 0 \\ (2-i)z + (2+i)\bar{z} - 6 < 0 \end{cases}.$$

(b) Le immagini delle quattro rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\begin{aligned} &\lambda^*(z_1 \vee z_3)\colon z\bar{z} - \tfrac{2+i}{2} z - \tfrac{2-i}{2} \bar{z} = 0 \\ &\lambda^*(z_2 \vee z_4)\colon z\bar{z} - \tfrac{2+i}{6} z - \tfrac{2-i}{6} \bar{z} = 0 \\ &\lambda^*(z_1 \vee z_4)\colon z\bar{z} - \tfrac{2-i}{2} z - \tfrac{2+i}{2} \bar{z} = 0 \\ &\lambda^*(z_2 \vee z_3)\colon z\bar{z} - \tfrac{2-i}{6} z - \tfrac{2+i}{6} \bar{z} = 0 \end{aligned} \qquad \text{quindi} \qquad \lambda^*(I)\colon \begin{cases} \left|z - \frac{2-i}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \left|z - \frac{2-i}{6}\right| > \frac{\sqrt{5}}{6} \\ \left|z - \frac{2+i}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \left|z - \frac{2+i}{6}\right| > \frac{\sqrt{5}}{6} \end{cases}.$$

La parte ombreggiata nella figura (escluso il bordo) rappresenta l'insieme $\lambda_*(I)$.

(c) È vero. Due rette parallele hanno equazioni $r : b\bar{z} + \bar{b}z + c_1 = 0$ e $s : b\bar{z} + \bar{b}z + c_2 = 0$; e $c_1 \neq 0 \neq c_2$ se le due rette non passano per l'origine. Le circonferenze che si ottengono per riflessione nel cerchio unitario sono $\lambda^*(r) : z\bar{z} + \frac{b}{c_1}\bar{z} + \frac{\bar{b}}{c_1}z = 0$ e $\lambda^*(s) : z\bar{z} + \frac{b}{c_2}\bar{z} + \frac{\bar{b}}{c_2}z = 0$. I raggi che congiungono i centri all'origine sono i vettori rappresentati dai numeri complessi $-\frac{b}{c_1}$ e $-\frac{b}{c_2}$, che sono paralleli e quindi le rette tangenti all'origine sono anch'esse parallele in quanto perpendicolari ai raggi corrispondenti. Ciò permette di concludere nel caso generale. Infine, se una delle due rette passa per l'origine, la retta viene a coincidere con la propria riflessione nel cerchio unitario e con la propria tangente nell'origine. □

ESERCIZIO 2. *Siano V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi*

$$U = \langle 2v_1 - 4v_2 - 3v_3 + 2v_4 + v_5,\ v_1 - 2v_2 + v_4,\ 3v_1 - 6v_2 + 3v_3 + 3v_4 - v_5 \rangle$$

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \;\middle|\; \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \right\}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei sottospazi U e W e si verifichi che $V = U \oplus W$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$ della proiezione $\pi : V \to V$ su U, parallelamente a W.

(b) Sia $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(\xi) = \pi \circ \xi - \xi \circ \pi$ per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$. Si determinino nucleo, immagine, autovalori, autospazi e polinomio caratteristico per Φ. Si calcoli $\det(\Phi - n\mathrm{id})$, al variare di n tra i numeri naturali.

(c) Si dica se qualche potenza di Φ è una proiezione, indicandone il nucleo, l'immagine e le rispettive dimensioni. Qual'è la dimensione del sottospazio di endomorfismi di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ generato da $\mathrm{id}, \Phi, \Phi^2, \dots$?

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti, essendo

$$(2v_1 - 4v_2 - 3v_3 + 2v_4 + v_5) - 5(v_1 - 2v_2 + v_4) + (3v_1 - 6v_2 + 3v_3 + 3v_4 - v_5) = 0.$$

Possiamo quindi prendere come base di U i vettori $u_1 = v_1 - 2v_2 + v_4$ e $u_2 = 3v_3 - v_5$.

Il sistema che definisce W ha rango 2 (infatti $I + II = III$); le sue soluzioni formano quindi un sottospazio di dimensione 3, che ha come base i vettori $w_1 = 2v_2 - v_4$, $w_2 = 2v_1 + v_3$, $w_3 = v_3 + v_4 + 2v_5$.

Con un calcolo diretto si verifica che $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi $V = U \oplus W$ e la matrice della proiezione richiesta è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 14 & -6 \\ -2 & -14 & 4 & -28 & 12 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 1 & 7 & -2 & 14 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Utilizzando la base $\mathcal{S} = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ di V, possiamo scrivere le matrici a blocchi, e si ha $\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\pi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\xi) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$; da cui si deduce $\alpha_{\mathcal{S},\mathcal{S}}(\Phi(\xi)) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -C & 0 \end{pmatrix}$. Ne consegue che gli autovalori di Φ sono 0, 1 e -1 e che i rispettivi autospazi sono

$$\begin{aligned} \ker \Phi &= \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi(U) \subseteq U,\ \xi(W) \subseteq W \,\} & & \dim\ker\Phi = 13 \\ \ker(\Phi - \mathrm{id}) &= \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi(U) \subseteq \langle 0 \rangle,\ \xi(W) \subseteq U \,\} & \text{e} & \dim\ker(\Phi - \mathrm{id}) = 6 \\ \ker(\Phi + \mathrm{id}) &= \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi(U) \subseteq W,\ \xi(W) \subseteq \langle 0 \rangle \,\} & & \dim\ker(\Phi + \mathrm{id}) = 6 \end{aligned}$$

La somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è uguale alla dimensione di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$ e quindi Φ è diagonalizzabile e il suo polinomio caratteristico è $p_\Phi(X) = X^{13}(X - 1)^6(X + 1)^6$. In particolare, $\det(\Phi - n\mathrm{id}) = -p_\Phi(n) = -n^{13}(n - 1)^6(n + 1)^6$.

(c) L'endomorfismo Φ^2 è diagonalizzabile e i suoi autovalori sono 0 e 1; quindi è una proiezione e, precisamente, la proiezione su $\mathrm{im}\,\Phi^2 = \ker(\Phi^2 - \mathrm{id}) = \ker(\Phi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\Phi + \mathrm{id}) = \mathrm{im}\,\Phi$, parallelamente a $\ker\Phi = \ker\Phi^2$, le cui dimensioni sono indicate sopra. In particolare, per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V)$, si ha $\Phi^3(\xi) = \Phi(\xi)$; quindi $\Phi^{2n} = \Phi^2$ per ogni $n \geq 1$ e $\Phi^{2n+1} = \Phi$ per ogni $n \geq 0$. Gli endomorfismi id, Φ e Φ^2 sono linearmente indipendenti, e quindi lo spazio generato dalle potenze di Φ è $\langle \mathrm{id}, \Phi, \Phi^2 \rangle$, di dimensione 3.

□

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ una base di V e la rispettiva base duale di V^*.*

(a) Dati $w = v_1 - 2v_2 + v_4 + 2v_5$ e $v^* = v_2^* + 2v_3^* - v_4^* + v_5^*$, si scriva la matrice in base $\mathcal{V}$ dell'omomorfismo $w \otimes v^* : V \to V$, definito da $w \otimes v^*(x) = w(v^* \circ x)$, per ogni $x \in V$. Si determinino nucleo e immagine di $w \otimes v^*$, esibendo delle basi dei due sottospazi. Si dica se l'applicazione lineare $\phi = \mathrm{id}_V - w \otimes v^*$ è invertibile e si determini eventualmente la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1})$.

(b) Dati $w \in V \smallsetminus \{0\}$ e $v^* \in V^* \smallsetminus \{0\}$, è vero che $\phi = \mathrm{id}_V - w \otimes v^*$ non è invertibile se, e solo se, $v^* \circ w = 1$, ovvero se, e solo se ϕ è una proiezione (su quale sottospazio e con quali direzioni)? È vero che $\phi = \mathrm{id}_V - w \otimes v^*$ è una simmetria se, e solo se, $v^* \circ w = 2$ (con quale asse e quali direzioni)?

Svolgimento. (a) Si ha

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(w \otimes v^*) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, $\mathrm{im}\,(w \otimes v^*) = \langle w \rangle$ e $\ker(w \otimes v^*) = \langle v^* \rangle^\perp = \langle v_1, 2v_2 - v_3, v_3 + 2v_4, v_4 + v_5 \rangle$. Essendo, $v^* \circ w \neq 1$, l'omomorfismo ϕ è invertibile e l'inverso è $\phi^{-1} = \mathrm{id}_V + \frac{1}{1 - v^* \circ w} w \otimes v^*$. Dunque

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^{-1}) = \mathbf{1}_5 + \tfrac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Se $v^* \circ w \neq 1$ è ben definita l'applicazione lineare $\psi = \mathrm{id}_V + \frac{1}{1 - v^* \circ w} w \otimes v^*$, che si verifica essere l'inversa di $\phi = \mathrm{id}_V - w \otimes v^*$, essendo $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_V = \psi \circ \phi$. D'altra parte, se $v^* \circ w = 1$, allora $\phi(w) = w - w(v^* \circ w) = 0$ per cui ϕ non è invertibile e inoltre, per ogni $x \in \langle v^* \rangle^\perp$, si ha $\phi(x) = x$. Dunque, se $v^* \circ w = 1$, si ha $V = \langle v^* \rangle^\perp \oplus \langle w \rangle$ (perché?), e ϕ è la proiezione su $\langle v^* \rangle^\perp$, parallelamente a $\langle w \rangle$.

Per quanto visto, se $v^* \circ w = 2$, si ha $\phi^{-1} = \phi$. Quindi ϕ è una simmetria, di asse $\langle v^* \rangle^\perp$ e direzione $\langle w \rangle$, essendo $\phi(w) = -w$ e $\phi(x) = x$ per ogni $x \in \langle v^* \rangle^\perp$[(†)] □

(†) Si osservi che l'affermazione resta vera per spazi vettoriali di dimensione finita su campi di caratteristica diversa da 2. In caratteristica 2, si ha ancora $\phi^2 = \mathrm{id}_V \neq \phi$, ma ϕ non è una simmetria. Cosa si può dire di ϕ in questo caso?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 giugno 2015

ESERCIZIO 1. *Si disegnino nel piano di Gauss i numeri complessi z tali che $z^3 - iz^2 - 4z + 4i = 0$ e si indichi con T il triangolo che ha come vertici tali punti.*

(a) *Si disegni nel piano di Gauss il triangolo T e si scrivano le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i suoi lati. Si determini inoltre l'equazione del cerchio C, con centro nell'origine e passante per $i/2$.*

(b) *Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nel cerchio unitario. Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo tramite λ i lati del triangolo T e la circonferenza C. Si disegnino nel piano di Gauss queste circonferenze.*

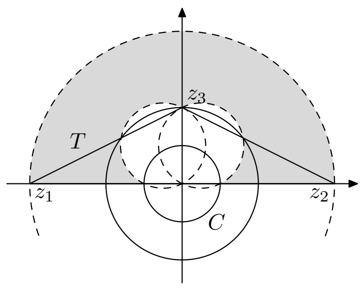
(c) *Si evidenzi la regione $\lambda_*(C^{out}) \cap \lambda_* T^{in}$ ove si indichino con T^{in} i punti interni al triangolo T e con C^{out} i punti esterni alla circonferenza C. È vero che, per ogni coppia di sottoinsiemi A e B del dominio di λ, si ha $\lambda_*(A \cap B) = \lambda_*(A) \cap \lambda_*(B)$? È vero per ogni funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in luogo di λ?*

Svolgimento. Si ha $z^3 - iz^2 - 4z + 4i = (z - i)(z^2 - 4)$; quindi i vertici del triangolo T sono i punti $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = i$.

(a) Il lati del triangolo T sono quindi le rette (cfr. il disegno a fianco)

$$\begin{aligned} z_1 \vee z_2 &: \ -iz + i\bar{z} = 0, \\ z_1 \vee z_3 &: (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 4 = 0, \\ z_2 \vee z_3 &: (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} - 4 = 0 \end{aligned}$$

e il cerchio C ha equazione $4z\bar{z} - 1 = 0$.



(b) Le immagini delle tre rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze (generalizzate)

$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : -iz + i\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} + \tfrac{1+2i}{4} z + \tfrac{1-2i}{4}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} - \tfrac{1-2i}{4} z - \tfrac{1+2i}{4}\bar{z} = 0.$$

La prima è una retta, e le altre due hanno rispettivamente centro in $-\frac{1-2i}{4}$ e $\frac{1+2i}{4}$ e entrambe raggio $\frac{\sqrt{5}}{4}$. La circonferenza $\lambda_*(C)$ ha ancora centro nell'origine e raggio 4.

(c) La regione $\lambda_*(C^{out}) \cap \lambda_* T^{in}$ è evidenziata in grigio nel disegno sopra. Poiché $\lambda \circ \lambda = \mathrm{id}$, per ogni coppia di sottoinsiemi, si ha

$$\lambda_*(A \cap B) = \lambda^*(A \cap B) = \lambda^*(A) \cap \lambda^*(B) = \lambda_*(A) \cap \lambda_*(B).$$

Per una generica funzione l'affermazione è falsa, come si vede prendendo la funzione costante, $f(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, e due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti del piano complesso. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino le matrici ad elementi razionali*

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad e \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si dica se esiste una matrice $G \in M_{5\times 3}(\mathbb{Q})$ tale che $H = FG$. In caso affermativo si determinino tutte le matrici che soddisfano questa condizione. Si dica se formano un sottospazio vettoriale o una sottovarietà lineare di $M_{5\times 3}(\mathbb{Q})$ e se ne determini l'eventuale dimensione. Infine, date F e H, si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché vi sia un sottospazio vettoriale di matrici G tali che $FG = H$.*

(b) *Siano V, W e Z spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente n, m e h sul campo $\mathbb{F}_q$ con q elementi; e siano date due applicazioni lineari $\phi : W \to Z$ e $\eta : V \to Z$. Si dica sotto quali ipotesi esiste* *un'applicazione lineare $\psi : V \to W$ tale che $\eta = \phi \circ \psi$. Si dica se tutte le applicazioni lineari, ψ, soddisfacenti a tale condizione formano un sottospazio vettoriale o una sottovarietà lineare di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)$ e se ne determini il numero, in funzione di ϕ e η .*

(c) *Dati tre spazi vettoriali V, W, Z, su un campo C e tre applicazioni lineari $\phi : W \to Z$, $\psi : V \to W$, $\eta : V \to Z$, tali che $\eta = \phi \circ \psi$; è vero che esistono delle basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W e $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_h\}$ di Z tali che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{Z}}(\eta) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{Z}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, per opportuni interi $r \le s$? In caso negativo si spieghi perché non possono esistere; in caso affermativo si spieghi come trovarle e le si determini (se esistono) per delle matrici F, G e H del punto (a).*

Svolgimento. (a) Qualunque sia la matrice G, le colonne della matrice FG sono combinazione lineare delle colonne della matrice F (ovvero l'immagine dell'applicazione lineare composta, FG, è contenuta nell'immagine di F). Dunque una matrice G soddisfacente alle condizioni richieste può esistere se, e solo se, le colonne di H sono combinazione lineare delle colonne di F (ovvero l'immagine di H è contenuta nell'immagine di F); e ciò è quanto accade per le matrici date.

Le matrici cercate formano quindi la sottovarietà lineare

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} 2a & 2c & 2e \\ b & d & f \\ -b & -d & -f \\ -a & -c & -e \\ 2b & 2d & 2f \end{pmatrix} \,\middle|\, (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{Q}^6 \right\}$$

di dimensione 6.

Una sottovarietà lineare è un sottospazio vettoriale se, e solo se, passa per l'origine, ovvero se la matrice nulla, $G = \mathbf{0}$, è una soluzione del problema $H = FG$. Ciò accade se, e solo se, $H = \mathbf{0}$.

(b) L'applicazione lineare ψ può esistere se, e solo se, $\mathrm{im}\,\eta \subseteq \mathrm{im}\,\phi$. In tal caso, le funzioni ψ formano una sottovarietà lineare di sottospazio direttore isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, \ker\phi)$, di dimensione $n(m-r)$, ove $r = \mathrm{rk}\,\phi$. Dunque, o non vi sono soluzioni, oppure il loro numero è uguale a $q^{n(m-r)}$, se $\mathrm{im}\,\eta \subseteq \mathrm{im}\,\phi$.

(c) In generale, le basi cercate non esistono. Se esistessero dovrebbe aversi, in particolare, $\mathrm{rk}\,\psi = r = \mathrm{rk}\,\eta$ e ciò accade solo per particolari scelte di ψ. In generale, si ha $\mathrm{rk}\,\psi \ge \mathrm{rk}\,\eta$ e vale l'uguaglianza se, e solo se, $\ker\psi = \ker\eta$. Sotto questa ulteriore ipotesi, si possono trovare delle basi soddisfacenti alle condizioni richieste; precisamente, si può fissare una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, tale che $v_{r+1}, \dots, v_n$ sia una base di $\ker\eta = \ker\psi$. Prendere $w_1 = \psi(v_1), \dots, w_r = \psi(v_r)$ in W e completarli prima ad una base $w_1, \dots, w_s$ di un complementare di $\ker\phi$ e poi ad una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W in modo che $w_{s+1}, \dots, w_m$ sia una base di $\ker\phi$. Infine, si prendono i vettori $z_1 = \phi(v_1), \dots, z_s = \phi(w_s)$ e si completano a una base $\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_h\}$ di Z.

Nel caso delle matrici date sul campo $\mathbb{Q}$, la soluzione particolare indicata sopra soddisfa all'ulteriore ipotesi di avere rango 2, come H (tali matrici formano una sottovarietà lineare di dimensione 4, come si vede imponendo la condizione che G e H abbiano lo stesso nucleo). In questo caso possiamo prendere le basi $\mathcal{V} = \{e_1, e_3, e_1 + 2e_2 - 2e_3\}$, $\mathcal{W} = \{2e_3, e_1, e_2, 2e_1 - e_4, e_2 - e_3 + 2e_5\}$, $\mathcal{Z} = \{2e_1 + 4e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4, e_1, e_4\}$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ una sua base e si consideri l'endomorfismo $\phi : V \to V$ di matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.*

(a) *Si determinino polinomio caratteristico, autovalori e autospazi di ϕ. Si dica se ϕ è diagonalizzabile e si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.*

(b) *Si dica se esiste una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ di V e degli scalari $c_1, \dots, c_4$, tali che $\phi = \sum_{j=1}^4 c_j w_j \otimes w_j^*$, ove $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_4^*\}$ è la base duale di V^*. In tal caso si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ e $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id})$.*

Svolgimento. (a) Polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = X^2(X-3)^2$, con i due autovalori 0 e 3 di molteplicità algebrica 2. I relativi autospazi sono $\ker\phi = \langle v_1 + v_3, v_2 + v_4 \rangle$ e $\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle 2v_1 - v_3, 3v_1 - 5v_2 + 3v_3 - 2v_4 \rangle$;

quindi ϕ è diagonalizzabile. Due matrici che soddisfano alle richieste sono

$$D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&3&0 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1&0&2&3 \\ 0&1&0&-5 \\ 1&0&-1&3 \\ 0&1&0&-2 \end{pmatrix}.$$

(b) È sufficiente prendere una base di autovettori e come scalari gli autovalori relativi. Quindi possiamo scrivere le matrici

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1&0&2&3 \\ 0&1&0&-5 \\ 1&0&-1&3 \\ 0&1&0&-2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id}) = {}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3&0&1/3&0 \\ 1&-2/3&0&-1/3 \\ 2/3&0&1/3&0 \\ -1&5/3&0&1/3 \end{pmatrix},$$

e concludere la discussione. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 luglio 2015

ESERCIZIO 1. *Si disegnino nel piano di Gauss le radici del polinomio $P(X) = (X^2 - (2-i)X)(X^2 - (1+4i)X - 6 + 2i)$ e si indichino con Q il poligono convesso che ha come vertici tali radici e con T il triangolo che ha come vertici le radici esterne alla circonferenza unitaria.*

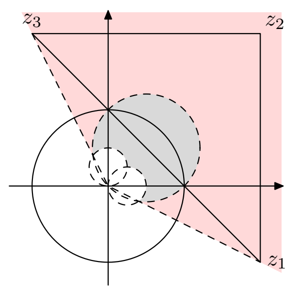
(a) Si disegni nel piano di Gauss il triangolo T e si scrivano le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i suoi lati. Si determinino le equazioni dei restanti lati di Q.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nel cerchio unitario. Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo tramite λ i lati del triangolo T e i lati di Q.

(c) Si evidenzi la regione $\lambda^*(T)$, ove si indichino con T i punti interni al triangolo T, e si dica se $\lambda^*(T)$ è contenuta o meno nel poligono Q. Si evidenzi (in un altro disegno) la regione $\lambda^*(Q)$, ove si indichino con Q i punti interni al poligono Q, e si dica se $\lambda^*(Q)$ è contenuta o meno nel triangolo T.

Svolgimento. Le radici di $P(X)$ sono $z_0 = 0$, $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 2 + 2i$, $z_3 = -1 + 2i$; quindi le ultime 3 sono i vertici del triangolo T.

(*a*) Il lati del triangolo T e i restanti lati di Q sono quindi le rette (cfr. il disegno a fianco)



$$z_1 \vee z_2 : z + \bar{z} = 4,$$
$$z_2 \vee z_3 : -iz + i\bar{z} = 4,$$
$$z_1 \vee z_3 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0$$

$$z_0 \vee z_1 : (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} = 0,$$
$$z_0 \vee z_3 : (2-i)z + (2+i)\bar{z} = 0.$$

(*b*) Le immagini dei tre lati del triangolo tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le tre circonferenze qui sotto, mentre i restanti lati di Q coincidono col proprio riflesso (circonferenze generalizzate)

$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} - \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{4}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} + \tfrac{i}{4}z - \tfrac{i}{4}\bar{z} = 0, \quad \lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} - \tfrac{1-i}{2}z - \tfrac{1+i}{2}\bar{z} = 0.$$

Le tre circonferenze hanno rispettivamente centro in $\frac{1}{4}$, $\frac{i}{4}$ e $\frac{1+i}{2}$ e raggi $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(*c*) La regione λ^*T è evidenziata in grigio nel disegno sopra ed è contenuta nel quadrilatero Q, perché i riflessi dei vertici z_1 e z_3 appartengono alle semirette che congiungono l'origine a tali punti. Poiché $T \subset Q$, si ha $\lambda^*T \subseteq \lambda^*Q$ e abbiamo evidenziato in rosso chiaro la regione (illimitata) che viene ad aggiungersi. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano date le rispettive basi, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$.*

(a) Dati i sottospazi

$$V_1 = \langle v_1 - v_3, v_2 - v_4 + v_5 \rangle \qquad e \qquad V_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \mid x_2 + x_3 = 0 = x_2 - x_3 \right\},$$

si verifichi che $V = V_1 \oplus V_2$ e si scriva la matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\alpha)$ della proiezione $\alpha : V \to V$ su V_1 parallelamente a V_2.

(b) Dati i sottospazi

$$W_1 = \langle w_1 + w_2 - w_3 - w_4, w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \rangle \quad e \quad W_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{4} y_i w_i \mid y_1 + y_2 = 0 = y_3 + y_4 \right\},$$

si verifichi che $W = W_1 \oplus W_2$ e si scriva la matrice $B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\beta)$ della proiezione $\beta : W \to W$ su W_1 parallelamente a W_2.

(c) *Si consideri l'insieme C delle applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che $\phi\alpha = \beta\phi$. Si verifichi che è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$ e se ne calcoli la dimensione. Siano $\alpha_0 = 3\alpha^*$ e $\beta_0 = (2\mathrm{id}_W - 2\beta)^*$. Si determini la dimensione del sottospazio $D = \{ \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W^*, V^*) \mid \psi\beta_0 = \alpha_0\psi \}$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\psi)$ al variare di ψ in D.*

Svolgimento. (a) La verifica che i due sottospazi sono complementari è routine. La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Un vettore $a(w_1+w_2-w_3-w_4)+b(w_1+w_2+w_3+w_4)$ appartiene a $W_1 \cap W_2$ se, e solo se, $a+b = 0 = a-b$. Quindi $W_1 \cap W_2 = \langle 0 \rangle$ e, per le formule di Grassmann, la somma ha dimensione 4, ovvero $W_1 \oplus W_2 = W$. La matrice della proiezione è quindi

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\beta) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) L'omomorfismo $\phi : V \to W$ sta in C se, e solo se, $\phi(V_1) \subseteq W_1$ e $\phi(V_2) \subseteq W_2$. Si tratta quindi di un sottospazio di dimensione 10 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, W)$.

L'omomorfismo $\psi : W^* \to V^*$ sta in D se, e solo se, $W_1^\perp \subseteq \ker\psi$ e $\psi(W_2^\perp) \subseteq V_1^\perp$. Si tratta quindi di un sottospazio di dimensione 6 di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W^*, V^*)$ e le corrispondenti matrici sono tutte del tipo

$$\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a & d & d \\ b & b & e & e \\ a & a & d & d \\ b+c & b+c & e+f & e+f \\ c & c & f & f \end{pmatrix}.$$

In particolare, $\psi\beta_0 = 0 = \alpha_0\psi$, per ogni $\psi \in D$. □

ESERCIZIO 3. *Sia C un campo di caratteristica diversa da 2 e sia $\tau : M_n(C) \to M_n(C)$ l'applicazione che manda ogni matrice A nella sua trasposta ${}^tA$.*

(a) *Si determinino il determinante, il polinomio caratteristico, gli autovalori e gli autospazi di τ e si dica se è diagonalizzabile.*

(b) *Si risponda alle stesse domande quando C è un campo di caratteristica 2.*

Svolgimento. (a) Si ha $\det\tau = (-1)^{\binom{n}{2}}$, $p_\tau(X) = (X-1)^{\binom{n+1}{2}}(X+1)^{\binom{n}{2}}$, gli autospazi sono

$$\ker(\tau - \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \,\middle|\, {}^tA = A \right\} = \langle \varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i) \ \mid 1 \le i \le j \le n \rangle,$$

di dimensione $\binom{n+1}{2}$, e

$$\ker(\tau + \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \,\middle|\, {}^tA = -A \right\} = \langle \varepsilon(i,j) - \varepsilon(j,i) \ \mid 1 \le i < j \le n \rangle,$$

di dimensione $\binom{n}{2}$. Dunque τ è diagonalizzabile.

(b) Se il campo ha caratteristica 2, allora $\det\tau = 1$, $p_\tau(X) = (X-1)^{n^2}$, l'unico autospazio è

$$\ker(\tau - \mathrm{id}) = \left\{ A \in M_n(C) \,\middle|\, {}^tA = A \right\} = \langle \varepsilon(i,i) \ \mid 1 \le i \le n \rangle \oplus \langle \varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i) \ \mid 1 \le i < j \le n \rangle,$$

di dimensione $\binom{n+1}{2}$, e quindi τ non è diagonalizzabile. La sua forma di Jordan ha n blocchi di ordine 1 corrispondenti agli autovettori $\varepsilon(i,i)$ con $i = 1 \dots, n$; e $\binom{n}{2}$ blocchi di ordine 2, ciascuno in corrispondenza con l'autovettore generalizzato $\varepsilon(i,j)$, per $1 \le i < j \le n$, e con la sua immagine tramite $\tau - \mathrm{id}$, l'autovettore $\varepsilon(i,j) + \varepsilon(j,i)$ (N.B. In caratteristica 2, $1 = -1$). □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 1 settembre 2015

ESERCIZIO 1. [8 punti] *Nel piano di Gauss si consideri il triangolo T di vertici $z_1 = -1$, $z_2 = i$, $z_3 = z_1 + z_2$.*

(a) *Si determinino le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette che formano i lati del triangolo T e si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati di T nella circonferenza unitaria.*

(b) *Si disegnino il triangolo T e le circonferenze del punto precedente e si evidenzi la regione $\lambda_*(T^{in})$, ove si indichino con T^{in} i punti interni a T e con λ la riflessione nel cerchio unitario.*

(c) *Si determini l'equazione, in funzione di z e $\bar{z}$, della circonferenza, C, di centro z_3 e passante per z_1 e z_2. È vero che $\lambda^* C = C$? È vero che $\lambda(P)$ è esterno a C se P è interno a C? Come si possono caratterizzare tutte le circonferenze, C', del piano di Gauss tali che $\lambda^* C' = C'$?*

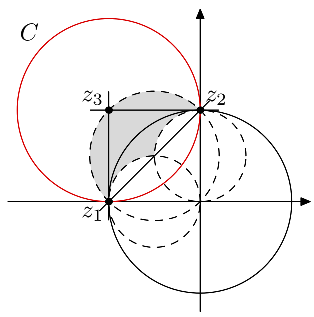
Svolgimento. (a) Le tre rette sono

$$z_1 \vee z_2 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} = -2, \qquad z_1 \vee z_3 : z + \bar{z} = -2, \qquad z_2 \vee z_3 : iz - i\bar{z} = -2;$$

a cui corrispondono, per riflessione nel cerchio unitario, le circonferenze

$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : 2z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : 2z\bar{z} + z + \bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : 2z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0;$$

i cui centri e raggi sono: $\frac{1-i}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{2}$ e $\frac{i}{2}$, $\frac{1}{2}$ rispettivamente.



(b) Gli oggetti sono rappresentati nella figura a fianco, dove la regione $\lambda_*(T^{in})$ è evidenziata in grigio.

(c) Il cerchio C ha equazione $z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0$ e con un calcolo diretto si verifica che coincide con la sua riflessione $\lambda^* C$. I punti interni a C vengono trasformati da λ in punti interni alla stessa circonferenza. Le circonferenze (reali) che coincidono con le loro riflessioni nel cerchio unitario sono tutte e sole quelle di equazioni $z\bar{z} - \bar{b}z - b\bar{z} + 1 = 0$, con $b \in \mathbb{C}$ e $|b| > 1$. Una caratterizzazione più geometrica si ottiene osservando che sono le circonferenze *ortogonali* alla circonferenza unitaria, ovvero tali che le tangenti nei punti di intersezione passino per il centro dell'altra circonferenza (perché?). □

ESERCIZIO 2. [12 punti] *Siano U, V, W spazi vettoriali sul campo K, siano $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, delle rispettive basi e siano date le applicazioni lineari $\phi : U \to W$, $\psi : V \to W$ di matrici $F = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $G = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.*

(a) *Si determinino nucleo, immagine per ϕ e ψ e delle rispettive basi.*

(b) *Si verifichi che il prodotto cartesiano $U \times V$ con le operazioni $((u,v),(u',v')) \mapsto (u+u', v+v')$ e $(\alpha,(u,v)) \mapsto (\alpha u, \alpha v)$, è uno spazio vettoriale su K e se ne determini la dimensione e una base. Si dimostri che il sottoinsieme $U \times_W V = \{\, (u,v) \in U \times V \mid \phi(u) = \psi(v) \,\}$ è un sottospazio vettoriale e se ne determinino la dimensione, una base e un sistema minimale di equazioni cartesiane (nelle coordinate associate alla base fissata su $U \times V$).*

(c) *Fissata una base $\mathcal{P}$ di $U \times_W V$, si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{P},\mathcal{U}}(p_U)$ e $\alpha_{\mathcal{P},\mathcal{V}}(p_V)$, ove $p_U : (u,v) \mapsto u$ e $p_V : (u,v) \mapsto v$. Fissato lo spazio vettoriale T su K con base $\mathcal{T} = \{t_1, t_2\}$, siano $\alpha : T \to U$ e $\beta : T \to W$ le applicazioni lineari di matrici $A = \alpha_{\mathcal{T},\mathcal{U}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \alpha_{\mathcal{T},\mathcal{V}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si verifichi che*

$\phi \circ \alpha = \psi \circ \beta$ e si determini, se esiste, un'applicazione lineare $\nu : T \to U \times_W V$ tale che $\alpha = p_U \circ \nu$ e $\beta = p_V \circ \nu$.

(*d*) *Si mostri che $(U \times V)^* \cong U^* \times V^*$ e si scriva esplicitamente $(u^*, v^*) \circ (u, v)$ in funzione delle applicazioni $\circ : U^* \times U \to K$ e $\circ : V^* \times V \to K$. È vero che da questo isomorfismo si deduce*

$$(U \times_W V)^* \cong \frac{U^* \times V^*}{\{\, (\phi^*(w^*), -\psi^*(w^*)) \mid w^* \in W^* \,\}}?$$

Svolgimento. (*a*) Con un calcolo diretto, nelle coordinate date, si ha

$$\operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ \ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{e} \quad \operatorname{im}\psi = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \ \ker\psi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

(*b*) Il prodotto cartesiano con le operazioni date è uno spazio vettoriale su K, di dimensione $\dim U + \dim V = 7$, con la base $\{(u_1, 0), (u_2, 0), (u_3, 0), (0, v_1), (0, v_2), (0, v_3), (0, v_4)\}$. Il sottoinsieme $U \times_W V$ è un sottospazio di $U \times V$, essendo il nucleo dell'applicazione lineare $\phi p_U - \psi p_V$ (ove p_U e p_V sono le applicazioni nel testo). Il rango di tale applicazione lineare è $\dim(\operatorname{im}\phi + \operatorname{im}\psi) = 3$, quindi la dimensione del nucleo è 4; ovvero $\dim(U \times_W V) = \dim\ker\phi + \dim\ker\psi + \dim(\operatorname{im}\phi \cap \operatorname{im}\psi)$. Nella base data soddisfa al sistema di equazioni cartesiane di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ove le righe della matrice equivalente sono, nell'ordine, III, II, $I - III - II$ e $IV - II + 2I - 2III$, e danno un sistema minimale di equazioni cartesiane per il sottospazio $U \times_W V$.

(*c*) Possiamo prendere come base $\mathcal{P}$ di $U \times_W V$ i vettori $(u_1 - u_2 + u_3, 0)$, $(0, v_1 - v_2 + v_3)$, (u_2, v_4), $(u_3, -v_1)$. Con questa base si ha

$$\alpha_{\mathcal{P},\mathcal{U}}(p_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{P},\mathcal{V}}(p_V) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Con un calcolo diretto (ad esempio, usando le matrici), si verifica che $\phi\alpha - \psi\beta = 0$. Inoltre,

$$\begin{aligned} (\alpha(t_1), \beta(t_1)) &= (u_1 - u_2 + u_3, 0) + 2(0, v_1 - v_2 + v_3) + (u_3, -v_1), \\ (\alpha(t_2), \beta(t_2)) &= (0, v_1 - v_2 + v_3) + 2(u_2, v_4) \end{aligned}$$

per cui ν esiste e $\alpha_{\mathcal{T},\mathcal{P}}(\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(*d*) L'isomorfismo si ottiene osservando che l'applicazione bilineare $(u^*, v^*) \circ (u, v) = u^* \circ u + v^* \circ v$ è non-degenere. Il duale del sottospazio $U \times_W V$ di $U \times V$ è quindi il quoziente $(U \times V)^*/(U \times_W V)^\perp$; e, ricordando che $U \times_W V = \ker(\phi p_U - \psi p_V)$, si ha

$$[\ker(\phi p_U - \psi p_V)]^\perp = \operatorname{im}(\phi p_U - \psi p_V)^* = \operatorname{im}(p_U^* \phi^* - p_V^* \psi^*) = \{\, (\phi^*(w^*), -\psi^*(w^*)) \mid w^* \in W^* \,\},$$

che è quanto dovevamo dimostrare. □

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Sia K un campo, sia n un numero intero maggiore o uguale a 2 e si indichi con P_n la matrice*

$$P_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(K).$$

(a) *Sia K un campo di caratteristica diversa da 2; si determinino, polinomio caratteristico, autovalori e relativi autospazi di P_n al variare dell'intero n. Che si può dire del suo polinomio minimo?*

(b) *Sia K un campo di caratteristica diversa da 2 e si consideri l'endomorfismo definito da $X \mapsto P_nXP_n$ per ogni $X \in M_n(K)$. Si determinino, polinomio caratteristico, autovalori e relativi autospazi di questo endomorfismo al variare dell'intero n. Che si può dire del suo polinomio minimo?*

(c) *Si discutano le due domande precedenti nel caso in cui K abbia caratteristica 2.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di P_n è uguale a

$$p_n(X) = \det(X\mathbf{1}_n - P_n) = (X-1)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}(X+1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

ove, per ogni numero reale x, si pone $\lfloor x \rfloor = \max\{\, n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \,\}$ [la *parte intera* di x]. Gli autovalori sono quindi ± 1 con le molteplicità algebriche indicate e gli autospazi corrispondenti sono, per $n \in 2\mathbb{Z}$,

$$W_1 = \left\langle e_1 + e_n, \dots, e_{\frac{n}{2}} + e_{\frac{n}{2}+1} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W_{-1} = \left\langle e_1 - e_n, \dots, e_{\frac{n}{2}} - e_{\frac{n}{2}+1} \right\rangle;$$

della stessa dimensione; mentre, per $n \in 1 + 2\mathbb{Z}$,

$$W_1 = \left\langle e_1 + e_n, \dots, e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + e_{\lfloor \frac{n+1}{2}+1 \rfloor}, e_{\lfloor \frac{n+1}{2}+1 \rfloor} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W_{-1} = \left\langle e_1 - e_n, \dots, e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - e_{\lfloor \frac{n+1}{2}+1 \rfloor} \right\rangle.$$

Il polinomio minimo di P_n è chiaramente $X^2 - 1$.

(b) L'applicazione $\sigma : X \mapsto P_nXP_n$ scambia le posizioni delle entrate della matrice X (farsi il conto per $n = 2, 3$) e, precisamente, l'elemento di posto (i, j) in P_nXP_n è l'elemento x_{hk} della matrice X, con $h = n - i + 1$ e $k = n - j + 1$. In particolare, $\sigma^2 = \mathrm{id}$ e quindi si tratta anche in questo caso di una simmetria. L'autospazio relativo all'autovalore 1 ha dimensione $\lfloor \frac{n^2+1}{2} \rfloor$, mentre quello relativo all'autovalore -1 ha dimensione $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$. Lasciamo al lettore il compito di scrivere le matrici di una base dei due sottospazi. Anche in questo caso il polinomio minimo è $X^2 - 1$.

(c) In ambedue i casi il polinomio minimo è $X^2 - 1 = (X-1)^2$ (in caratteristica 2) e quindi i due endomorfismi non sono diagonalizzabili, ma si decompongono in blocchi di Jordan di ordine minore o uguale a 2. Precisamente, per $n \in 2\mathbb{Z}$, sui sottospazi

$$\langle e_1, e_1 + e_n \rangle, \dots, \left\langle e_{\frac{n}{2}}, e_{\frac{n}{2}} + e_{\frac{n}{2}+1} \right\rangle$$

restano indotti blocchi di Jordan di ordine 2 (il secondo vettore è l'autovettore); mentre, per $n \in 1 + 2\mathbb{Z}$, sui sottospazi

$$\langle e_1, e_1 + e_n \rangle, \dots \left\langle e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, e_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \right\rangle$$

restano indotti blocchi di Jordan di ordine 2 (il secondo vettore è l'autovettore) e $e_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ è ancora un autovettore relativo all'autovalore 1.

Una situazione analoga si presenta nel caso dell'applicazione $\sigma : X \mapsto P_nXP_n$ e lasciamo al lettore il compito di determinare il numero dei blocchi di Jordan di ordine 2 e le relative basi. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 settembre 2015

ESERCIZIO 1. [10 punti] *Si consideri il polinomio* $P(X) = (X+1)(X^2 - 2(1-i)X - 1 - 2i) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) *Si disegni nel piano di Gauss il triangolo, T, che ha come vertici le radici del polinomio $P(X)$ e determinino le equazioni, in funzione di z e $\bar{z}$, delle rette (reali) che costituiscono i lati di T.*

(b) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati di T nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $T^{in} \cap \lambda_*(T^{out})$, ove si indichino con T^{out} i punti esterni a T, con T^{in} i punti interni a T e con λ la riflessione nel cerchio unitario.*

(c) *Si dia una condizione necessaria e sufficiente sul cerchio C, affinché l'insieme $\lambda^*(C^{in}) = (\lambda^* C)^{out}$; cioè affinché i punti interni alla circonferenza C vengano riflessi in punti esterni alla circonferenza $\lambda^* C$.*

Svolgimento. (a) e (b) Le tre radici di $P(X)$ sono, $z_0 = -1$, $z_1 = -i$, $z_2 = 2 - i$ e le rette che li congiungono sono

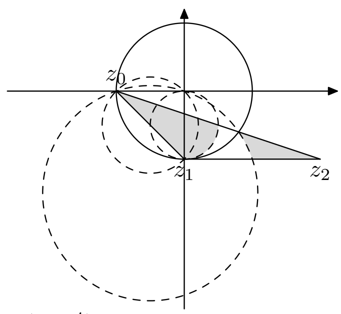
$$r_1 = z_0 \vee z_1 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 2 = 0, \quad r_2 = z_0 \vee z_2 : (1-3i)z + (1+3i)\bar{z} + 2 = 0, r_3 = z_1 \vee z_2 : -iz + i\bar{z} + 2 = 0,$$

che formano i lati di T. Le immagini delle rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\lambda^*(r_1) : \bar{z}z + \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left| z + \frac{1+i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\lambda^*(r_2) : \bar{z}z + \frac{1-3i}{2}z + \frac{1+3i}{2}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left| z + \frac{1+3i}{2} \right| = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\lambda^*(r_3) : \bar{z}z - \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = 0, \quad \text{ovvero} \quad \left| z + \frac{i}{2} \right| = \frac{1}{2};$$



La parte ombreggiata della figura soprastante rappresenta l'insieme $T^{in} \cap \lambda^*(T^{out})$.

(c) Scriviamo l'equazione del cerchio C nella forma $z\bar{z} - \bar{b}z - b\bar{z} + c = 0$. Affinché i punti interni alla circonferenza C vengano riflessi in punti esterni alla circonferenza $\lambda^* C$ è necessario e sufficiente che dopo la riflessione nel cerchio unitario la disuguaglianza $z\bar{z} - \bar{b}z - b\bar{z} + c < 0$ 'cambi di segno'. Dunque è necessario e sufficiente che si abbia $c < 0$. ciò è equivalente al fatto che l'origine ($z = 0$) sia un punto interno al cerchio C (e quindi anche a $\lambda^* C$) [scrivere per bene l'equivalenza delle due condizioni]. □

ESERCIZIO 2. [10 punti] *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi.*

(a) *Si considerino le applicazioni lineari $\alpha : V \to V$, $\beta : W \to W$ e $\phi : V \to W$ definite dalle condizioni*

$$\begin{aligned} \alpha(v_1 + v_2) &= 2v_2 + 2v_3 \\ \alpha(v_2 + v_3) &= 2v_1 + 2v_2 \\ \alpha(v_1 + v_3) &= 2v_1 - 2v_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta(w_1 + 2w_3) &= 2w_2 + w_4 = \beta(2w_1 - w_3) \\ \beta(w_2 + 2w_4) &= w_1 - 2w_3 = \beta(2w_2 - w_4) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \phi(v_1 + v_2) &= w_1 - 2w_3 \\ \phi(v_2 + v_3) &= 2w_2 + w_4. \\ \phi(v_1 + v_3) &= w_1 - w_4 \end{aligned}$$

Si determinino la dimensione e una base per nucleo e immagine di ciascuno di questi omomofismi.

(b) *Si determini (se esiste) un'applicazione lineare $\psi : V \to W$ tale che $\beta\psi = \phi\alpha$. Si dica se l'insieme $\mathscr{A} = \{ \psi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \beta\psi = \phi\alpha \}$ è un sottospazio vettoriale o il traslato di un sottospazio vettoriale (sottospazio affine) di $Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$. Si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale e un eventuale vettore di traslazione (nel caso di un sottospazio affine).*

(c) *Siano ora V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{Q}$ e siano date le applicazioni lineari $\alpha : V \to V$, $\beta : W \to W$ e $\phi : V \to W$. Che condizioni devono soddisfare le applicazioni date affinché $\mathscr{A} = \{ \psi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \mid \beta\psi = \phi\alpha \} = \langle 0 \rangle$? Per quali scelte si ha invece $\mathscr{A} = Hom_{\mathbb{Q}}(V, W)$?*

Svolgimento. (a) Gli insiemi $\{v_1+v_2,\, v_2+v_3,\, v_1+v_3\}$ e $\{w_1+2w_3,\, 2w_1-w_3,\, w_2+2w_4,\, 2w_2-w_4\}$ sono basi dei due spazi vettoriali e quindi le applicazioni lineari sono ben definite. Dalle condizioni date, si ricava

$$\begin{array}{lll} \ker\alpha = \langle v_1\rangle & \ker\beta = \langle w_1-3w_3, w_2-3w_4\rangle & \ker\phi = \langle 0\rangle \\ \operatorname{im}\alpha = \langle v_1+v_2, v_2+v_3\rangle & \operatorname{im}\beta = \langle w_1-2w_3, 2w_2+w_4\rangle & \operatorname{im}\phi = \langle w_1-2w_3, 2w_2+w_4, w_1-w_4\rangle \end{array}$$

ove i generatori dati sono basi dei rispettivi sottospazi.

(*b*) Si ha $\phi(\alpha(v_1+v_2)) = 4w_2+2w_4 = \beta(2w_1+4w_3)$, $\phi(\alpha(v_2+v_3)) = 2w_1-4w_3 = \beta(2w_2+4w_4)$, $\phi(\alpha(v_1)) = 0 = \beta(0)$; quindi soddisfa alle condizioni richieste l'applicazione lineare $\psi_0 : V \to W$, definita da $\psi_0(v_1+v_2) = 2w_1+4w_3$, $\psi_0(v_2+v_3) = 2w_2+4w_4$, e $\psi_0(v_1) = 0$, ovvero l'applicazione lineare di matrice

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'insieme $\mathscr{A}$ è un sottospazio affine di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W)$, perché due elementi di $\mathscr{A}$ differiscono per un'applicazione lineare che manda tutto V in $\ker\beta$. Dunque $\mathscr{A}$ è il traslato tramite ψ_0 del sottospazio degli omomorfismi $\nu : V \to W$, tali che $\operatorname{im}\nu \subseteq \ker\beta$. Il sottospazio è isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,\ker\beta)$; ha quindi dimensione 6 e una sua base è data dalle applicazioni lineari di matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

nelle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

(*c*) La determinazione di $\mathscr{A}$ equivale alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari (capire nei dettagli questa affermazione), quindi la soluzione si riduce al solo vettore nullo quando il sistema è omogeneo, ovvero $\phi\alpha = 0$, e ha un'unica soluzione quando β è iniettivo, ovvero quando $\ker\beta = \langle 0\rangle$. L'insieme $\mathscr{A}$ è tutto lo spazio vettoriale $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W)$ quando $\phi\alpha = 0$ e $\beta = 0$ (cioè $\ker\beta = W$). □

ESERCIZIO 3. [10 punti] *Siano U e V spazi vettoriali sul campo K, siano fissate le rispettive basi $\mathcal{U} = \{u_1,\dots,u_k\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_n\}$ e siano $\mathcal{U}^* = \{u_1^*,\dots,u_k^*\}$ e $\mathcal{V}^* = \{v_1^*,\dots,v_n^*\}$ le corrispondenti basi duali.*

(a) *Presi comunque $\phi \in \mathrm{Hom}_K(U,V)$ e $\psi \in \mathrm{Hom}_K(V,U)$ si mostri che*

$$\sum_{i=1}^{k} \psi^*(u_i^*) \circ \phi(u_i) = \sum_{j=1}^{n} \phi^*(v_j^*) \circ \psi(v_j).$$

Indicato con $\psi * \phi$ questo elemento di K, si dica se $\psi * \phi = \mathrm{tr}(\psi \circ \phi)$.

(b) *Si mostri che $(\psi,\phi) \mapsto \psi * \phi$ è un'applicazione bilineare non degenere $\mathrm{Hom}_K(V,U) \times \mathrm{Hom}_K(U,V) \to K$ e quindi permette di identificare ognuno dei due spazi vettoriali col duale dell'altro. Si verifichi infine che questa applicazione non dipende dalla scelta delle basi.*

(c) *Dati $u \in U$, $v \in V$, $u^* \in U^*$ e $v^* \in V^*$, calcolare $(u \otimes v^*) * (v \otimes u^*)$.*

Svolgimento. (a) Siano $A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\phi)$, $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\psi)$ e quindi ${}^tB = \alpha_{\mathcal{U}^*,\mathcal{V}^*}(\psi^*)$. Si ha quindi, per ogni $i = 1,\dots,k$,

$$\psi^*(u_i^*) \circ \phi(u_i) = (b_{i1}v_1^* + \cdots + b_{in}v_n^*) \circ (a_{1i}v_1 + \cdots + a_{ni}v_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji},$$

da cui si ottiene

$$\psi * \phi = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}a_{ji} = \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB).$$

(b) La composizione di applicazioni bilineari distribuisce rispetto alla somma e al prodotto per scalari, quindi l'applicazione è bilineare. Per verificare che è non degenere, sia $\psi \neq 0$ e fissiamo due indici i_0 e j_0, tali che $\psi^*(u_{i_0}^*) = b_{i_0 1}v_1^* + \cdots + b_{i_0 n}v_n^*$, con $b_{i_0 j_0} \neq 0$. Sia $\lambda : U \to V$ l'applicazione lineare definita da

$$\lambda(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq i_0 \\ v_{j_0} & \text{se } i = i_0 \end{cases}.$$

Allora, si ha

$$\psi * \lambda = \sum_{i=1}^{k} \psi^*(u_i^*) \circ \lambda(u_i) = (b_{i_0 1}v_1^* + \cdots + b_{i_0 n}v_n^*) \circ v_{j_0} = b_{i_0 j_0} \neq 0.$$

Che non dipenda dalla scelta delle basi discende già dall'osservazione che $\psi * \phi = \mathrm{tr}(\psi \circ \phi)$. Per vederlo direttamente si può ragionare così: date le basi $\mathcal{U}' = \{u_1', \ldots, u_k'\}$ e $\mathcal{V}' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$, siano $P = \alpha_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}(\mathrm{id})$ e $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\mathrm{id})$ le matrici di cambiamento di base. Allora $A' = \alpha_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(\phi) = QAP$ e $B' = \alpha_{\mathcal{V}',\mathcal{U}'}(\psi) = P^{-1}BQ^{-1}$ e quindi calcolando con queste nuove basi, si ha

$$\psi * \phi = \mathrm{tr}(B'A') = \mathrm{tr}(P^{-1}BAP) = \mathrm{tr}(BA)$$

come si doveva dimostrare.

(c) Per quanto visto

$$(u \otimes v^*) * (v \otimes u^*) = \mathrm{tr}((u \otimes v^*) \circ (v \otimes u^*)) = (v^* \circ v)\mathrm{tr}(u \otimes u^*) = (v^* \circ v)(u^* \circ u).$$

Fine dei conti. □