Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 23 febbraio 2015

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ un endomorfismo soggetto alle seguenti condizioni:*

$$2 = rk(\phi + 2id)^4 = rk(\phi + 2id)^3 < rk(\phi + 2id)^2; \qquad \det(\phi^2 + id) = 0.$$

(a) Si determinino tutte le possibili matrici di Jordan per ϕ indicandone il rispettivo polinomio minimo e polinomio caratteristico.
(b) Quali fra le matrici di Jordan di ϕ sono simili ad una matrice in $M_5(\mathbb{R})$?

Svolgimento. (a) La prima condizione impone: $3 = \dim\ker(\phi+2\mathrm{id})^4 = \dim\ker(\phi+2\mathrm{id})^3 > \dim\ker(\phi+2\mathrm{id})^2$ e sapendo che $\ker(\phi + 2\mathrm{id}) \subsetneq \ker(\phi + 2\mathrm{id})^2 \subsetneq \ker(\phi + 2\mathrm{id})^3$ si ottiene

$$\dim\ker(\phi + 2\mathrm{id}) = 1; \quad \dim\ker(\phi + 2\mathrm{id})^2 = 2; \quad \dim\ker(\phi + 2\mathrm{id})^3 = \dim\ker(\phi + 2\mathrm{id})^4 = 3.$$

Quindi tutte le possibili forme di Jordan di ϕ hanno un unico blocco di Jordan relativo all'autovalore -2 di ordine 3. Inoltre essendo $\det(\phi^2 + 1) = \det((\phi + i)(\phi - i)) = \det(\phi + i)\det(\phi - i) = 0$ si ricava che almeno uno tra i valori $i, -i$ è autovalore di ϕ. In conclusione le possibili forme di Jordan di ϕ contengono oltre al blocco di Jordan di ordine 3 e autovalore -2:

- 2 blocchi di ordine 1 relativo all'autovalore i, il cui polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x + 2)^3(x - i)^2$ mentre il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x + 2)^3(x - i)$;
- un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore i con polinomio caratteristico uguale al polinomio minimo $p_\phi(x) = (x + 2)^3(x - i)^2 = \lambda_\phi(x)$;
- un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore i ed un blocco di ordine 1 relativo ad un autovalore $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha \notin \{-2, i\}$, il polinomio caratteristico coincide con il polinomio minimo e $p_\phi(x) = (x+2)^3(x-i)(x-\alpha) = \lambda_\phi(x)$;
- 2 blocchi di ordine 1 relativo all'autovalore $-i$, il cui polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = (x + 2)^3(x + i)^2$ mentre il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = (x + 2)^3(x + i)$;
- un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore $-i$ con polinomio caratteristico uguale al polinomio minimo $p_\phi(x) = (x + 2)^3(x + i)^2 = \lambda_\phi(x)$;
- un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore $-i$ ed un blocco di ordine 1 relativo ad un autovalore $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha \notin \{-2, -i, i\}$, il polinomio caratteristico coincide con il polinomio minimo e $p_\phi(x) = (x + 2)^3(x + i)(x - \alpha) = \lambda_\phi(x)$.

(b) Essendo il polinomio caratteristico di una matrice in $M \in M_5(\mathbb{R})$ a coefficienti reali dato $\gamma \in \mathbb{C}$ autovalore di M anche il suo coniugato $\overline{\gamma}$ deve essere autovalore di M quindi l'unica forma di Jordan possibile fra quelle precedenti è:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{simile a} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

ESERCIZIO 2. *In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, \ldots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari:*

$$\pi : O + e_3 + \langle -e_1 + e_3 - e_4, e_2 \rangle \qquad \sigma : O + e_2 + \langle e_1 + e_2 + e_4, 2e_1 + e_2 - e_4 \rangle$$

(a) Determinare la posizione reciproca delle sottovarietà lineari π e σ ed eventuali punti di intersezione.
(b) È possibile definire l'applicazione affine $\pi_\sigma^{V_\pi}$ di proiezione sulla sottovarietà lineare σ parallela allo spazio direttore di π? Se sì calcolarne la matrice associata rispetto al s.d.r. $\mathscr{R}$.

(c) *Si consideri σ come uno spazio affine con il sistema di riferimento $\mathscr{R}' = \{O' = O + e_2; v_1 = e_1 + e_2 + e_4, v_2 = 2e_1 + e_2 - e_4\}$. Esiste un'applicazione affine f da $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ a σ tale che $f(X) = X$ per ogni $X \in \sigma$ e, detta ϕ l'applicazione lineare soggiacente a f, si abbia $V_\pi := \langle -e_1 + e_3 - e_4, e_2\rangle = ker(\phi)$? Se sì darne un esempio indicandone la matrice associata rispetto ai sistemi di riferimento $\mathscr{R}$ in $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ ed $\mathscr{R}'$ in σ.*

Svolgimento. (a) I due piani si intersecano nel punto $P = \pi \cap \sigma = O + e_1 + 2e_2 + e_4$, gli spazi direttori sono complementari $V_\pi \oplus V_\sigma = \mathbb{R}^4$ e $\pi \vee \sigma = \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$.
(b) Essendo $V_\pi \oplus V_\sigma = \mathbb{R}^4$ si può definire l'applicazione affine di proiezione sulla sottovarietà lineare σ parallela allo spazio direttore di π tale che per ogni $X \in \mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ si abbia: $\pi_\sigma^{V_\pi}(X) \in \sigma$ e $\pi_\sigma^{V_\pi}(X) - X \in V_\pi$. La matrice richiesta è:

$$M = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

(c) L'applicazione affine richiesta esiste ed è la proiezione su σ lungo la direzione di π. Dalla matrice M del punto (b) si ricava che $f(O) = O + e_2 = O' + 0v_1 + 0v_2$, $\phi(e_1) = e_1 + 2/3e_2 = 1/3v_1 + 1/3v_2$, $\phi(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4}$, $\phi(e_3) = e_1 + e_2 + e_4 = v_1$ e $\phi(e_4) = 1/3e_2 + e_4 = 2/3v_1 - 1/3v_2$ da cui si ottiene la matrice N richiesta:

$$N = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right).$$

□

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = (O, \{e_1, e_2, e_3\})$ si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

(a) *Determinare la posizione reciproca e la distanza fra r e s, i punti di minima distanza $R \in r$ e $S \in s$ e il coseno dell'angolo fra le due rette r e s.*
(b) *Determinare la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$ della riflessione σ_τ rispetto al piano $\tau : 2x - 2y + z = -1$ e calcolare $\sigma_\tau(r)$ e $\sigma_\tau(R)$.*
(c) *Si consideri il punto $S_1 = 0 + 2e_1 + e_2 - 3e_3$ in s. Determinare un punto R_1 nella retta r tale che il tetraedro di vertici R, R_1, S e S_1 abbia volume 3.*

Svolgimento. (a) Le due rette sono sghembe, i punti di minima distanza sono $R = O + 2e_1 + 3e_2 + e_3$ e $S = O + 3e_1 + 2e_2 - 3e_3$ da cui si ricava che la distanza fra r e s è $||S - R|| = ||e_1 - e_2 - 4e_3|| = 3\sqrt{2}$. Gli spazi direttori di r e s sono rispettivamente $V_r = \langle 2e_1 - 2e_2 + e_3\rangle$ e $V_s = \langle e_1 + e_2\rangle$ quindi il coseno è 0 ovvero le due rette sono ortogonali fra loro.
(b) La matrice richiesta è:

$$S = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4/9 & 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & 8/9 & 1/9 & 4/9 \\ -2/9 & -4/9 & 4/9 & 7/9 \end{array}\right).$$

La retta r è la sottovarietà lineare $r : O + 5e_2 + \langle 2e_1 - 2e_2 + e_3\rangle$. Perciò il piano τ è ortogonale alla retta r e passa per il punto R quindi $\sigma_\tau(r) = r$ e $\sigma_\tau(R) = R$.
(c) Detta t la retta passante per R e S possiamo notare che le rette r, s e t sono a due a due sono ortogonali fra loro ($V_r = \langle 2e_1 - 2e_2 + e_3\rangle$, $V_s = \langle e_1 + e_2\rangle$ e $V_t = \langle e_1 - e_2 - 4e_3\rangle$) quindi il volume del tetraedro richiesto è $(\|S - R\| \cdot \|S_1 - S\| \cdot \|R_1 - R\|)/6 = 3$. Inoltre $\|S - R\| = 3\sqrt{2}$, $\|S_1 - S\| = \sqrt{2}$ da cui si ottiene $\|R_1 - R\| = 3$ quindi $R_1 = R \pm 3u_r$ ove u_r è un versore della retta r: $u_r = (2e_1 - 2e_2 + e_3)/3$: $R_1 = O + 4e_1 + e_2 + 2e_3$ o $R_1' = O + 5e_2$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 Aprile 2015

ESERCIZIO 1. Sia $\phi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Determinare tutte le matrici di Jordan, non simili fra loro, di ordine 5 aventi lo stesso polinomio minimo di A.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ si considerino le rette r, s e il piano π:

$$r : O + \langle e_2 \rangle \qquad s : O + 2e_1 + \langle e_2 + e_3 \rangle \qquad \pi : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare la posizione reciproca di r e s e la dimensione di $r \vee s$; la posizione reciproca di r e π e la dimensione di $r \vee \pi$; la posizione reciproca di s e π e la dimensione di $s \vee \pi$.

(b) Determinare equazioni cartesiane ed equazioni parametriche della sottovarietà lineare $\mathbb{L} := (r \vee s) \cap \pi$.

(c) Determinare un sistema di riferimento affine su $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ (con indeterminate X_1, X_2, X_3, X_4) tale che la retta r sia l'asse delle X_1 e la retta s sia parallela all'asse delle X_2. Scrivere le equazioni cartesiane di π in tale sistema di riferimento.

(d) Si consideri $P = O + e_1 \in \pi$. Determinare, se esiste, una retta t passante per P tale che $\dim(t \vee r) = 2$ e $\dim(t \vee s) = 2$. È unica?

(e) Quali sono tutti e soli i punti $Q \in \pi$ per cui esiste una retta h_Q (che varia al variare di Q) tale che $\dim(h_Q \vee r) = \dim(h_Q \vee s) = 2$?

ESERCIZIO 3. Sia V uno spazio vettoriale su un campo C e φ un endomorfismo di V nilpotente di ordine 5, inoltre supponiamo che $\dim(\ker(\varphi^3)) = 5$. Determinare, a meno di similitudine, tutte le possibili forme canoniche di Jordan di φ.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 19 Giugno 2015

ESERCIZIO 1. *Si consideri $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.*

(1) Si classifichi secondo Eulero la rigidità τ la cui matrice associata rispetto ad $\mathscr{R}$ è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Se ne determinino le sottovarietà lineari unite e nel caso sia una glissorotazione, risp. glissoriflessione o risp. rotoriflessione si scriva τ come composizione di una traslazione con una rotazione, risp. traslazione con una riflessione, risp. rotazione con una riflessione (è sufficiente indicare la matrice della riflessione).

(3) Determinare tutte le isometrie f di $\mathbb{E}^3$ (fornendone la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$) tali che $f \circ \tau$ sia una traslazione di vettore non nullo.

Svolgimento. (*1*) La rigidità τ è inversa in quanto $\det(T) = -1$. L'unico punto unito è $P = O + e_3$ quindi τ è una rotoriflessione (con angolo $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$): composizione di una rotazione con una simmetria ortogonale di asse un piano ortogonale all'asse di rotazione. L'asse di rotazione è $t : P + V_{-1} = O + e_3 + \langle e_1 + \sqrt{3}e_2 + \sqrt{3}e_3 \rangle$ mentre l'asse di simmetria è $\sigma : x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = \sqrt{3}$.

(*2*) L'unico punto unito è P, l'unica retta unita è l'asse di rotazione t e l'unico piano unito è il piano asse di simmetria σ. La matrice della simmetria è:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\sqrt{3}}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2\sqrt{3}}{7} & -\frac{2\sqrt{3}}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2\sqrt{3}}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2\sqrt{3}}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

(*3*) Indichiamo con $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{pmatrix}$ la matrice di τ a blocchi e con $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & B \end{pmatrix}$ la matrice (a blocchi) rispetto al s.d.r. $\mathscr{R}$ di una rigidità f tale che $f \circ \tau$ sia una traslazione di un vettore $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$. Allora $FT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix}$ quindi $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & {}^tA \end{pmatrix}$ con $b \neq \frac{\sqrt{3}}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 + e_3$. □

ESERCIZIO 2. *In $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino il piano $\pi : x + y = 0$ e il punto $P = 0 + e_1$.*

(a) Determinare: la distanza $d(\pi, P)$ tra il piano π e il punto P; le equazioni cartesiane della retta t ortogonale a π e passante per P e le coordinate del punto di intersezione $M := t \cap \pi$.

(b) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della riflessione ortogonale (simmetria) di asse π.

(c) Determinare una condizione necessaria e sufficiente su un punto $Q \in \mathbb{E}^3$ affinché esista una una rigidità τ di $\mathbb{E}^3$ con: $\tau(\pi) = \pi$ e $\tau(P) = Q$ e fornire per ogni tale Q un esempio di τ.

(d) Determinare, scrivendone la matrice rispetto ad un opportuno sistema di riferimento scelto dallo studente, tutte le possibili rigidità dirette τ di $\mathbb{E}^3$ (con $\det(\tau) = 1$) tali che $\tau(\pi) = \pi$ e $\tau(P) = R$ con $R = O - e_2$.

Svolgimento. (a) Si ha: $d(\pi, P) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $t : \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e $M = O + \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$.

(*b*) La matrice della riflessione ortogonale σ (simmetria) di asse π è:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia τ una rigidità tale che $\tau(\pi) = \pi$ e $\tau(P) = Q$. Tutte le rigidità conservano le distanze quindi $d(P, \pi) = d(\tau(P), \tau(\pi)) = d(Q, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi è necessario che $d(Q, \pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ cioè Q deve appartenere a uno dei due piani paralleli a π aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}$ da esso: $Q \in \pi_1 \cup \pi_2$ con $\pi_1 : x + y = 1$ e $\pi_2 : x + y = -1$. Questa condizione è anche sufficiente in quanto se $Q \in \pi_1$ dato che anche $P \in \pi_1$ la traslazione τ_v di vettore $v = Q - P$ soddisfa alla condizione $\tau_v(\pi) = \pi$ e $\tau_v(P) = Q$. Se invece $Q \in \pi_2$ allora detto $w = \sigma(Q) - P = Q - \sigma(P)$ la composizione della traslazione τ_w con la riflessione ortogonale σ di asse π lascia unito π e manda P in Q.

(d) Notiamo che $R \in \pi_2$ e $R = \sigma(P)$. Sia τ una rigidità diretta tale che $\tau(\pi) = \pi$ e $\tau(P) = R$. Il punto $M = \frac{P+R}{2} = O + \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$ appartiene a π e $d(M, P) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ quindi $\tau(M) \in \tau(\pi) = \pi$ e $d(\tau(M), \tau(P)) = d(\tau(M), R)$ e da cui si ricava $\tau(M) = M$ e detta ϕ l'applicazione lineare soggiacente a τ si ha: $\phi(P - M) = \tau(P) - \tau(M) = R - M = -(P - M)$ quindi il vettore $\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2$ è autovettore per ϕ. Si consideri il sistema di riferimento $\mathscr{R}_1 = \{M; e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2\}$. Affinché τ verifichi $\tau(\pi) = \pi$ e $\tau(P) = R$ la matrice di τ nel sistema $\mathscr{R}'$ deve essere:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioè tutte e sole le τ richieste sono rotazioni di angolo π attorno ad una retta contenuta nel piano $x + y = 0$ e passante per M.

□

ESERCIZIO 3. *In $\mathbb{E}^4$ con il sistema di riferimento canonico si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbb{M} : O + 11e_1 + \langle -e_1 + 3e_3, e_4 \rangle .$$

(1) Determinare tutte le coppie di punti di minima distanza tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$. Calcolare la distanza fra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$.
(2) Determinare un'equazione cartesiana di un iperpiano σ equidistante da $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ cioè: $d(\mathbb{L}, \sigma) = d(\mathbb{M}, \sigma)$.
(3) Determinare le equazioni cartesiane di una retta r parallela contemporaneamente sia a $\mathbb{L}$ che a $\mathbb{M}$ ed avente distanza 5 da entrambe le sottovarietà lineari.

Svolgimento. (1) Le sottovarità linerai $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ sono piani che non si intersecano i cui spazi direttori hanno intersezione $\langle e_4 \rangle$. Le coppie di punti di minima distanza sono: $(L_\alpha, M_\alpha) = (O + e_1 + \alpha e_4, O + 10e_1 + 3e_3 + \alpha e_4)$ da cui si ricava che la distanza $d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = 3\sqrt{10}$.

(2) Gli iperpiani equidistanti da $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono: quelli con distanza nulla da entrambe cioè che intersecano sia $\mathbb{L}$ che $\mathbb{M}$ (ad esempio $x_3 = 0$) oppure quello con distanza positiva pari a $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ parallelo sia a $\mathbb{L}$ che a $\mathbb{M}$ e passante per il punto medio di una coppia di minima distanza $M_0 = \frac{L_0 + M_0}{2} = O + \frac{11}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3$ quindi $3x_1 + x_3 = 18$.

(3) Per quanto visto in (1) una retta parallela simultaneamente ad $\mathbb{L}$ e ad $\mathbb{M}$ deve avere come spazio direttore $\langle e_4 \rangle$. Notiamo che $d(M_0, \mathbb{L}) = d(M_0, \mathbb{M}) = \frac{3\sqrt{10}}{2}$. Sia $N_x = M_0 + xu_l + xu_m$ con $x \in \mathbb{R}$ e u_l e u_m versori tali che $u_l = e_2 \in V_\mathbb{L} \cap V_\mathbb{M}^\perp$ e $u_m = -\frac{1}{\sqrt{10}}e_1 + \frac{3}{\sqrt{10}}e_3 \in V_\mathbb{M} \cap V_\mathbb{L}^\perp$. Allora, essendo $L_0 + xu_l \in \mathbb{L}$ e $M_0 + xu_l + xu_m - (L_0 + xu_l) = (M_0 - L_0) + xu_m \in V_\mathbb{L}^\perp$, si ha:

$$d(N, \mathbb{L}) = d(M_0 + xu_l + xu_m, L_0 + xu_l) = \|(M_0 - L_0) + xu_m\| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + x^2}$$

(perché $M_0 - L_0$ è ortogonale a $u_m \in V_\mathbb{M}$). Analogamente $d(N, \mathbb{M}) = d(M_0 + xu_l + xu_m, M_0 + xu_m) = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + x^2}$. Quindi se vogliamo che $d(N, \mathbb{L}) = d(N, \mathbb{M}) = 5$ si deve avere $\left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2 + x^2 = 25$ da cui si ricava $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Quindi la retta passante r per $N = M_0 + \frac{\sqrt{10}}{2}u_l + \frac{\sqrt{10}}{2}u_m = O + 5e_1 + \frac{\sqrt{10}}{2}e_2 + 3e_3$ e direzione $\langle e_4 \rangle$ soddisfa le condizioni richieste ed ha equazioni cartesiane: $r : \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x_3 = 3 \end{cases}$. □

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 Giugno 2015

ESERCIZIO 1. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.
(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Determinare $\Delta \in M_4(\mathbb{R})$ diagonalizzabile e $N \in M_4(\mathbb{R})$ nilpotente tali che $A = \Delta + N$ con $\Delta N = N\Delta$.

ESERCIZIO 2. Siano ϕ, ψ endomorfismi nilpotenti di C^n tali che $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$.
(a) Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\psi(\ker(\phi^k)) \leq \ker(\phi^k)$ e $\psi(\mathrm{im}(\phi^k)) \leq \mathrm{im}(\phi^k)$.
(b) Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $\psi^{n-k}\phi^k = 0$.
(c) Dimostrare che per ogni $x \in C$ l'endomorfismo $x\psi + \phi$ è nilpotente. Se α, β sono endomorfismi nilpotenti di C^n, ma $\alpha\beta \neq \beta\alpha$ è ancora vero che $x\alpha + \beta$ è nilpotente per ogni $x \in C$?

ESERCIZIO 3. Si considerino lo spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ dotato del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e le sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}_\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{L} : O + 2e_1 - e_3 + \langle e_2 + e_4, e_1 \rangle \qquad \mathbb{M}_\alpha : O + e_2 + \langle \alpha e_1 + e_3 \rangle .$$

(1) Determinare la posizione reciproca di $\mathbb{L}$ a $\mathbb{M}_\alpha$ e la $\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}_\alpha)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
(2) Poniamo $\alpha = 0$. Per ogni punto $P \notin \mathbb{L} \cup \mathbb{M}_0$ calcolare la dimensione $\dim((P \vee \mathbb{L}) \cap (P \vee \mathbb{M}_0))$.
(3) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della simmetria di asse $\mathbb{L}$ e direzione $W = \langle e_2, e_3 \rangle$.

ESERCIZIO 4. Si consideri $\mathbb{E}^3$ munito del sistema di riferimento $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(1) Si classifichi secondo Eulero e si determinino le sottovarietà lineari unite della rigidità τ la cui matrice rispetto ad $\mathscr{R}$ è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1 & -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(2) Nel caso sia una glissorotazione, risp. glissoriflessione o risp. rotoriflessione si scriva τ come composizione di una traslazione con una rotazione, risp. traslazione con una riflessione, risp. rotazione con una riflessione indicandone le rispettive matrici nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$.
(3) Determinare tutte le rette r passanti per l'origine O, contenute nel piano $\pi : 2x - y = 0$ e tali che r formi con $\tau(r)$ un angolo θ con $|\cos(\theta)| = 2/3$.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 Luglio 2015

ESERCIZIO 1. Sia V uno spazio vettoriale di $\dim(V) = 6$ sul campo $\mathbb{R}$ e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo soggetto alle seguenti condizioni:

$$\dim\ker(\phi - 2\mathrm{id})^3 = 4; \qquad \dim\ker(\phi - \mathrm{id})^2 = 2.$$

Determinare tutte le possibili forme canoniche di Jordan a meno di similitudine per un tale endomorfismo ϕ. Per ogni tale forma canonica indicare il polinomio minimo e scrivere la tabella delle dimensioni delle filtrazioni dei nuclei.

ESERCIZIO 2. Si considerino V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita n, $\varphi : V \to V$ un endomorfismo di V avente n autovalori reali distinti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e ψ un endomorfismo di V tale che $\psi\varphi = \varphi\psi$.

(a) Si dimostri che ψ è diagonalizzabile.
(b) Si dimostri che se φ è ortogonalmente diagonalizzabile allora anche ψ è ortogonalmente diagonalizzabile.
(c) Si calcoli la dimensione di $\mathbb{R}[\varphi]$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con il sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L}_\alpha : O + e_1 + \langle e_1 + \alpha e_2, e_3\rangle \qquad \mathbb{M} : O + e_2 + \langle e_1 + e_2, e_4\rangle$$

con $V_{\mathbb{L}_\alpha} = \langle e_1 + \alpha e_2, e_3\rangle$ e $V_{\mathbb{M}} = \langle e_1 + e_2, e_4\rangle$.

(1) Determinare $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathbb{M}$, $\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M}$, $\dim(V_{\mathbb{L}_\alpha} \cap V_{\mathbb{M}})$ e $\dim(\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M})$ al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Esistono dei valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{L}_\alpha$ e $\mathbb{M}$ siano sghembe?
(2) Determinare le equazioni cartesiane di un piano π passante per il punto $P = O + e_1 + e_2$ tale che $\dim(\pi \cap \mathbb{L}_\alpha) = 1 = \dim(\pi \cap \mathbb{M})$. Tale piano è unico?
(3) Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$ della trasformazione affine di proiezione su $\mathbb{L}_0$ lungo la direzione di $\mathbb{M}$.

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ dotato del sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino le rette:

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 4y = -8 \\ 3y + z = 14 \end{cases}$$

1. Si determini la distanza $d(r, s)$ fra r e s, i punti di minima distanza $R \in r$, $S \in s$ e il coseno dell'angolo fra le due rette.
2. Si determini la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della rigidità $f = t_v \circ s$ ottenuta componendo la traslazione t_v di vettore $v = 4e_1 + 2e_2$ dopo la simmetria ortogonale s di asse $\sigma : 2x + y = 1$. Si classifichi la rigidità f e se ne determinino le sottovarietà lineari unite.
3. Si determini un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ tale che la matrice associata alla simmetria s sia diagonale e si calcoli la matrice di f nel sistema di riferimento $\mathscr{R}'$.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 1 Settembre 2015

ESERCIZIO 1. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.

(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.

(c) Si determinino una matrice $\Delta \in M_5(\mathbb{R})$ diagonalizzabile ed una matrice $N \in M_5(\mathbb{R})$ nilpotente tali che $A = \Delta + N$ con $\Delta N = N\Delta$.

(d) Si scriva la matrice, C, compagna del polinomio caratteristico di ϕ. È vero che C è simile ad A? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO 2. Sia k un campo e V un k-spazio vettoriale di dimensione finita. Sia $\psi : V \to V$ un endomorfismo con $\det(\psi) = 0$. Dimostrare che $\ker\psi$ e $\operatorname{im}\psi$ sono in somma diretta (quindi $V = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\psi$) se e solo se il polinomio minimo di ψ si scrive come $\lambda_\psi(x) = xq(x)$ con $q(0) \neq 0$.

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$ con il sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : O + \langle 2e_1 + 3e_2 - e_3, e_4 \rangle \qquad \mathbb{M} : O + e_4 + \langle e_1 - e_2, e_3 \rangle .$$

(1) Determinare $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

(2) Esiste una retta passante per l'origine O e ortogonale sia a $\mathbb{L}$ che a $\mathbb{M}$?

(3) Determinare la retta r contenuta in $\mathbb{L}$, passante per $P = O + 2e_1 + 3e_2 - e_3$ e ortogonale a $\mathbb{M}$. Calcolare la distanza fra r e $\mathbb{M}$.

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ dotato del sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$

1. Si determini la matrice della simmetria ortogonale s di asse $\pi : 3x + 5y = 1$.
2. Si determini un sistema di riferimento euclideo $\mathscr{R}'$ tale che la matrice associata alla simmetria s sia diagonale.
3. Sia $\pi_k : 3x+5y = k$ un piano parallelo a π. Calcolare la distanza tra π_k e π. Si denoti con s_k la simmetria ortogonale di asse π_k. Si determini un valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che $s_k \circ s$ sia uguale alla traslazione di vettore $v = 3e_1 + 5e_2$.

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 Settembre 2015

ESERCIZIO 1. Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ di matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino polinomio caratteristico, polinomio minimo, autovalori e spazi di autovettori per ϕ.
(b) Si determinino una matrice di Jordan, J, ed una matrice invertibile, P, tali che $J = P^{-1}AP$.
(c) Si determinino esplicitamente Δ diagonalizzabile ed N nilpotente tali che $A = \Delta + N$ con $\Delta N = N\Delta$.

ESERCIZIO 2. Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo con polinomio minimo $\lambda_f(x) = x(x-\alpha)^m$ e $m \le n-1$.
(1) Dimostrare che $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ sono in somma diretta (quindi $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$).
(2) Detto $\pi : V \to V$ l'endomorfismo di proiezione su $\ker(f)$ lungo $\operatorname{im}(f)$, si determini un polinomio $h(x) \in \mathbb{C}[x]$ tale che $h(f) = \pi$.

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sistemi di riferimento: $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ (canonico) e $\mathscr{R}' = \{O; 5e_3 + 11e_4, -e_3 + 23e_4, 54e_1 - e_2, e_1 + e_2\}$. Useremo le incognite $x_1, \dots x_4$ per il sistema di riferimento canonico $\mathscr{R}$ e $X_1, \dots X_4$ per il sistema di riferimento $\mathscr{R}'$.
(1) Si considerino i piani $\pi : \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ e $\tau : \begin{cases} X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$ (eq. cart. nel sdr $\mathscr{R}'$). Determinare la matrice nel sistema di riferimento canonico della simmetria s di asse π e direzione parallela a τ.
(2) Determinare la matrice associata a s^{2n} rispetto al sistema di riferimento canonico per ogni $n \in \mathbb{N}$.
(3) Sia $\sigma_a : \begin{cases} X_3 = 0 \\ aX_1 + (a-1)X_4 = 2a - 1 \end{cases}$ (eq. cart. nel sdr $\mathscr{R}'$). Determinare la posizione reciproca di π e σ_a al variare di $a \in \mathbb{R}$ scrivendone le eventuali intersezioni in coordinate rispetto al sdr $\mathscr{R}$.

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ dotato del sistema di riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si consideri la rigidità h di matrice

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

1. Classificare la rigidità h e determinarne tutte le sottovairetà lineari unite.
2. Esiste un sdr euclideo $\mathscr{R}'$ diverso da $\mathscr{R}$ tale che la matrice associata a h rispetto a $\mathscr{R}'$ sia ancora H? In caso affermativo fornirne un esempio.
3. Siano $R = O + e_1$ e $r : R + \langle e_3 \rangle$. Determinare le equazioni cartesiane di una retta s parallela a $\langle e_2 \rangle$ avente distanza 5 da s e tale che R sia punto di minima distanza (su r).
4. Si considerino la retta r del punto precedente e la retta $t : R + \langle e_1 + e_2 \rangle$. Determinare il piano σ contenente r e t e le equazioni cartesiane delle rette contenute in σ bisettrici di r e t.