Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 20 novembre 2015 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Nel piano di Gauss si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_1(X) = X^3 - (3+2i)X^2 + (1+3i)X$ e si indichi con T_2 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_2(X) = (X-1)(X^2 - (1+3i)X - 2 + 2i)$.*

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i due triangoli.

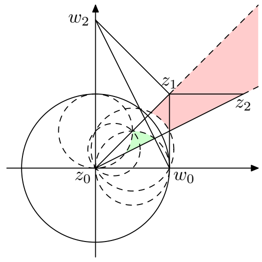
(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati dei triangoli T_1 e T_2, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati dei due triangoli nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_1 \smallsetminus T_2)$ ove si indichi con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

Svolgimento. (a) Le radici di $P_1(X)$ sono i numeri complessi $z_0 = 0$, $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 + i$. Le radici di $P_2(X)$ sono i numeri complessi $w_0 = 1$, $w_1 = z_1$ e $w_2 = 2i$.

(b) I lati dei due triangoli sono le rette

$$\begin{aligned} z_0 \vee z_1 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0, \\ z_0 \vee z_2 &: (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = 0, \\ z_1 \vee z_2 &: iz - i\bar{z} + 2 = 0, \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} w_0 \vee w_1 &: z + \bar{z} = 2, \\ w_0 \vee w_2 &: (2-i)z + (2+i)\bar{z} = 4, \\ w_1 \vee w_2 &: (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 4. \end{aligned}$$



(c) Le immagini delle sei rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze (generalizzate)

$$\begin{aligned} \lambda^*(z_0 \vee z_1) &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(z_0 \vee z_2) &: (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(z_1 \vee z_2) &: z\bar{z} + \frac{i}{2}z - \frac{i}{2}\bar{z} = 0, \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \lambda^*(w_0 \vee w_1) &: z\bar{z} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(w_0 \vee w_2) &: z\bar{z} - \frac{2-i}{4}z - \frac{2+i}{4}\bar{z} = 0, \\ \lambda^*(w_1 \vee w_2) &: z\bar{z} - \frac{1-i}{4}z - \frac{1+i}{4}\bar{z} = 0, \end{aligned}$$

L'insieme $T_1 \smallsetminus T_2$ è formato da due triangolini che si ottengono togliendo a T_1 la sua intersezione con T_2. Il riflesso di questo insieme è anch'esso diviso in due parti, evidenziate in rosso e in verde nella figura. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di W.*

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi: V \to W$ e $\psi : W \to V$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\phi(v_1 + v_3) = \phi(v_2 - v_3) = w_2 + 2w_4, \\ &\phi(v_3 + v_5) = \phi(v_4 - v_5) = 2w_1 - w_4, \\ &\phi(v_2 + v_3 + v_4) = w_1 + w_3 + w_5; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\psi(w_2 + 2w_4) = \psi(w_2 - 2w_5) = v_1 + v_2, \\ &\psi(2w_1 - w_4) = \psi(2w_2 + w_4) = v_3 + v_4, \\ &\psi(w_1 + w_3 + w_5) = 2v_2 + 2v_3 + 2v_4. \end{aligned}$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\psi$ e $W = \ker\psi \oplus \mathrm{im}\phi$. Si determini la matrice nelle basi date della proiezione $\pi : V \to V$ su $\mathrm{im}\psi$, parallelamente a $\ker\phi$. Si dica se la restrizione di ψ all'immagine di ϕ induce o meno un isomorfismo tra $\mathrm{im}\phi$ e $\mathrm{im}\psi$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to V$ tali che $\psi \circ \phi \circ \eta$ coincida con la proiezione $\pi : V \to V$ del punto precedente e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

Svolgimento. (a) I vettori

$$v_1' = v_1 + v_3, \quad v_2' = v_2 - v_3, \quad v_3' = v_3 + v_5, \quad v_4' = v_4 - v_5, \quad v_5' = v_2 + v_3 + v_4;$$

sono una base $\mathcal{V}'$ di V (verificarlo!), quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfi alle condizioni richieste. Analogamente i vettori

$$w_1' = w_2 + 2w_4, \quad w_2' = w_2 - 2w_5, \quad w_3' = 2w_1 - w_4, \quad w_4' = 2w_2 + w_4, \quad w_5' = w_1 + w_3 + w_5,$$

sono una base $\mathcal{W}'$ di W (verificarlo!), e si ragiona come sopra. Dalle condizioni date, risulta che

$$\operatorname{im}\phi = \langle w_1', w_3', w_5' \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker\phi = \langle v_1' - v_2', v_3' - v_4' \rangle\,,$$

le cui equazioni cartesiane, rispetto alle coordinate associate alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, sono

$$\operatorname{im}\phi : \begin{cases} y_1 - 4y_2 - y_3 + 2y_4 = 0 \\ y_3 - y_5 = 0 \end{cases}, \qquad \ker\phi : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

e, analogamente,

$$\operatorname{im}\psi = \langle v_1' + v_2', v_3' + v_4', v_5' \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker\psi = \langle w_1' - w_2', w_3' - w_4' \rangle\,.$$

di equazioni cartesiane

$$\operatorname{im}\psi : \begin{cases} x_3 - x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \qquad \ker\psi : \begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_2 - y_4 - y_5 = 0\,. \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

(b) Si verifica con un facile calcolo che $\ker\phi \cap \operatorname{im}\psi = \langle 0 \rangle$ e $\ker\psi \cap \operatorname{im}\phi = \langle 0 \rangle$ (farlo!); per motivi di dimensione, si tratta di sottospazi complementari. La proiezione $\pi : V \to V$ su $\operatorname{im}\psi$, parallelamente a $\ker\phi$, ha quindi matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo della restrizione di ϕ a $\operatorname{im}\psi$ è $\ker\phi \cap \operatorname{im}\psi = \langle 0 \rangle$, e quindi la restrizione di ϕ a quel sottospazio è un omomorfismo iniettivo tra due spazi della stessa dimensione (finita) e quindi un isomorfismo.

(c) Il nucleo di $\psi \circ \phi$ è $\ker\phi$; e inoltre la restrizione di $\psi \circ \phi$ a $\operatorname{im}\psi$ coincide con la moltiplicazione per 2. Dunque, $\psi \circ \phi = 2\pi$. Dunque, l'applicazione $\frac{1}{2}\pi$ soddisfa alle condizioni poste su η. Ogni altra possibile scelta di η deve differire da questa per un'applicazione lineare $\tau : V \to V$, tale che $\tau(v) \in \ker(\psi \circ \phi)$ per ogni $v \in V$. Le matrici cercate sono tutte e sole quelle che si ottengono sommando a $\frac{1}{2}A$ la matrice (sempre nella base $\mathcal{V}$) di un qualsiasi elemento del sottospazio $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \ker\phi)$, ovvero del sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0 \\ 0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&2 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0 \\ 0&2&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&2&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 3. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ -5 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

(a) *Si determini il rango, r, di A e due matrici invertibili P e Q ad elementi in $\mathbb{Q}$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.*

(b) *Se A è una matrice 5×7, di rango 3, sul campo $\mathbb{F}_q$ (con q elementi), come si possono contare tutte le coppie di matrici invertibili, P e Q, a elementi in $\mathbb{F}_q$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?*

Svolgimento. (a) Tramite operazioni elementari sulle righe di A si ottiene

$$A \sim \begin{array}{r} II \\ I+2II \\ III+5II \\ IV-5II \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 10 & 2 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ III-2II \\ IV+II \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

dunque A ha rango 2 e il nucleo di A è il sottospazio $K = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$. Completiamo la base di K a una base di $\mathbb{Q}^5$ e otteniamo una possibile scelta della matrice Q, ovvero

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Q}).$$

Le colonne non nulle del prodotto AQ (ovvero le prime due colonne di A) si possono completare a una base di $\mathbb{Q}^4$ e ottenere le colonne della matrice P^{-1}; ad esempio, si ha

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q});$$

si verifica con un calcolo diretto che PAQ è la matrice richiesta.

(*b*) Ripercorrendo i passi della costruzione fatta sopra, per determinare la matrice Q, abbiamo scelto una base del nucleo di A e l'abbiamo completata a una base di tutto lo spazio di partenza; dopodiché, per determinare P, abbiamo completato la base dell'immagine così determinata (ovvero le colonne non nulle di AQ) ad una base dello spazio di arrivo.

Nel caso in questione, abbiamo che il nucleo di A ha dimensione 4 sul campo $\mathbb{F}_q$ e quindi ci sono $(q^4-1)(q^4-q)(q^4-q^2)(q^4-q^3)$ scelte possibili per una sua base. Per completare questi vettori a una base di tutto lo spazio di partenza (che ha dimensione 7) ci sono quindi $(q^7-q^4)(q^7-q^5)(q^7-q^6)$ scelte. Restano quindi le scelte necessarie per completare la base così ottenuta dell'immagine di A (che ha dimensione 3) a una base di tutto lo spazio di arrivo (che ha dimensione 5), ovvero $(q^5-q^3)(q^5-q^4)$. Dunque il numero di coppie di matrici possibili è il prodotto di tutte le scelte indicate.

Un'espressione più generale di questo prodotto, in funzione delle dimensioni, $m \times n$, della matrice A e del suo rango r, è

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}-\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{i=1}^{m-r}(q^i-1) \prod_{j=1}^{n-r}(q^j-1) \prod_{h=1}^{r}(q^h-1);$$

che dà conto del fatto che il numero delle coppie non cambia scambiando m con n, ovvero cambiando la matrice A con la sua trasposta. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 20 novembre 2015 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Nel piano di Gauss si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_1(X) = X^3 + (3+2i)X^2 + (1+3i)X$ e si indichi con T_2 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_2(X) = (X+1)(X^2 + (1+3i)X - 2 + 2i)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i due triangoli.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati dei triangoli T_1 e T_2, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati dei due triangoli nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_1 \smallsetminus T_2)$ ove si indichi con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ e $\psi : W \to V$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\phi(v_1+v_4) = \phi(v_5-v_1) = 2w_1+w_4, && \psi(2w_1+w_4) = \psi(w_4-2w_2) = v_4+v_5, \\ &\phi(v_1+v_3) = \phi(v_2-v_3) = 2w_3-w_1, && \psi(2w_3-w_1) = \psi(w_1+2w_4) = v_1+v_2, \\ &\phi(v_1+v_2+v_5) = w_2+w_3+w_5; && \psi(w_2+w_3+w_5) = 2v_1+2v_2+2v_5. \end{aligned}$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\psi$ e $W = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\phi$. Si determini la matrice nelle basi date della proiezione $\pi : W \to W$ su $\operatorname{im}\phi$, parallelamente a $\ker\psi$. Si dica se la restrizione di ϕ all'immagine di ψ induce o meno un isomorfismo tra $\operatorname{im}\psi$ e $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to W$ tali che $\phi \circ \psi \circ \xi$ coincida con la proiezione $\pi : W \to W$ del punto precedente e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times5}(\mathbb{Q}).$$

(a) Si determini il rango, r, di A e due matrici invertibili P e Q ad elementi in $\mathbb{Q}$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

(b) Se A è una matrice 7×5, di rango 4, sul campo $\mathbb{F}_q$ (con q elementi), come si possono contare tutte le coppie di matrici invertibili, P e Q, a elementi in $\mathbb{F}_q$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 novembre 2015 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Nel piano di Gauss si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_1(X) = X^3 + (2-3i)X^2 - (1+3i)X$ e si indichi con T_2 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_2(X) = (X-i)(X^2 + (3-i)X + 2 - 2i)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i due triangoli.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati dei triangoli T_1 e T_2, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati dei due triangoli nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_1 \smallsetminus T_2)$ ove si indichi con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ e $\psi : W \to V$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\phi(v_2 + v_4) = \phi(v_3 - v_4) = w_1 + 2w_3, && \psi(w_1 + 2w_3) = \psi(w_1 - 2w_4) = v_2 + v_3, \\ &\phi(v_1 + v_4) = \phi(v_5 - v_1) = 2w_5 - w_3, && \psi(2w_5 - w_3) = \psi(2w_1 + w_3) = v_4 + v_5, \\ &\phi(v_3 + v_4 + v_5) = w_2 + w_4 + w_5; && \psi(w_2 + w_4 + w_5) = 2v_3 + 2v_4 + 2v_5. \end{aligned}$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\psi$ e $W = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\phi$. Si determini la matrice nelle basi date della proiezione $\pi : V \to V$ su $\operatorname{im}\psi$, parallelamente a $\ker\phi$. Si dica se la restrizione di ψ all'immagine di ϕ induce o meno un isomorfismo tra $\operatorname{im}\phi$ e $\operatorname{im}\psi$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\eta : V \to V$ tali che $\psi \circ \phi \circ \eta$ coincida con la proiezione $\pi : V \to V$ del punto precedente e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

(a) Si determini il rango, r, di A e due matrici invertibili P e Q ad elementi in $\mathbb{Q}$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

(b) Se A è una matrice 7×5, di rango 3, sul campo $\mathbb{F}_q$ (con q elementi), come si possono contare tutte le coppie di matrici invertibili, P e Q, a elementi in $\mathbb{F}_q$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 novembre 2015 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Nel piano di Gauss si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_1(X) = X^3 + (2+3i)X^2 - (1-3i)X$ e si indichi con T_2 l'insieme dei punti interni al triangolo di vertici le radici del polinomio $P_2(X) = (X+i)(X^2 + (3+i)X + 2 + 2i)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i due triangoli.

(b) Si determinino le equazioni delle rette (reali) che formano i lati dei triangoli T_1 e T_2, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(c) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati dei due triangoli nella circonferenza unitaria. Si disegnino tali circonferenze e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_1 \smallsetminus T_2)$ ove si indichi con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ e $\psi : W \to V$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\begin{aligned} &\phi(v_2+v_5) = \phi(v_1-v_2) = w_3+2w_5, & \quad &\psi(w_3+2w_5) = \psi(w_3-2w_1) = v_1+v_5, \\ &\phi(v_2+v_4) = \phi(v_3-v_4) = 2w_2-w_5, & &\psi(2w_2-w_5) = \psi(2w_3+w_5) = v_2+v_3, \\ &\phi(v_1+v_2+v_3) = w_1+w_2+w_4; & &\psi(w_1+w_2+w_4) = 2v_1+2v_2+2v_3. \end{aligned}$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\psi$ e $W = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\phi$. Si determini la matrice nelle basi date della proiezione $\pi : W \to W$ su $\operatorname{im}\phi$, parallelamente a $\ker\psi$. Si dica se la restrizione di ϕ all'immagine di ψ induce o meno un isomorfismo tra $\operatorname{im}\psi$ e $\operatorname{im}\phi$.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\xi : W \to W$ tali che $\phi \circ \psi \circ \xi$ coincida con la proiezione $\pi : W \to W$ del punto precedente e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & -1 \\ -1 & 5 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4\times 5}(\mathbb{Q}).$$

(a) Si determini il rango, r, di A e due matrici invertibili P e Q ad elementi in $\mathbb{Q}$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

(b) Se A è una matrice 5×7, di rango 4, sul campo $\mathbb{F}_q$ (con q elementi), come si possono contare tutte le coppie di matrici invertibili, P e Q, a elementi in $\mathbb{F}_q$, tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_4 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 20 novembre 2015

Nome	Cognome	N. Matricola

ESERCIZIO 1. In the complex plane, let T_1 denote the interior of the triangle whose vertices are the points corresponding to the roots of the polynomial $P_1(X) = X^3 - (3+2i)X^2 + (1+3i)X$ and let T_2 denote the interior of the triangle whose vertices are the points corresponding to the roots of the polynomial $P_2(X) = (X-1)(X^2 - (1+3i)X - 2 + 2i)$.

(a) Find the roots of $P_1(X)$ and $P_2(X)$ and draw the triangles T_1 and T_2 in the complex plane.

(b) Find the equations of the (real) lines containing the sides of the triangles T_1 e T_2, and write these equations in terms of the coordinates z and $\bar{z}$.

(c) Find center and radius of each (generalized) circle obtained by reflection in the unit circle of the lines above. Draw these circles in the complex plane and mark out the region $\lambda_*(T_1 \smallsetminus T_2) = \{ \lambda(z) \mid z \in T_1 \smallsetminus T_2 \}$ (we denote by λ the reflection in the unit circle: $\lambda(z) = 1/\bar{z}$).

ESERCIZIO 2. Let V and W be vector spaces over the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers and fix two ordered basis, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ and $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$, of V and W respectively.

(a) Find (if any) all the linear maps, $\phi\colon V \to W$ and $\psi : W \to V$, subjected to the following conditions

$$\begin{aligned} &\phi(v_1 + v_3) = \phi(v_2 - v_3) = w_2 + 2w_4, && \psi(w_2 + 2w_4) = \psi(w_2 - 2w_5) = v_1 + v_2,\\ &\phi(v_3 + v_5) = \phi(v_4 - v_5) = 2w_1 - w_4, && \psi(2w_1 - w_4) = \psi(2w_2 + w_4) = v_3 + v_4,\\ &\phi(v_2 + v_3 + v_4) = w_1 + w_3 + w_5; && \psi(w_1 + w_3 + w_5) = 2v_2 + 2v_3 + 2v_4. \end{aligned}$$

Find a basis and a set of cartesian equations for the null-space (kernel) and the range (image) of any such map.

(b) Check if $V = \ker\phi \oplus \operatorname{im}\psi$ and $W = \ker\psi \oplus \operatorname{im}\phi$. Write down the matrix relative to the basis $\mathcal{V}$, of the linear map $\pi : V \to V$ which projects a vector on $\operatorname{im}\psi$ along the subspace $\ker\phi$. Does the restriction of ψ to the image of ϕ induce an isomorphism between $\operatorname{im}\phi$ and $\operatorname{im}\psi$?

(c) Find all the linear maps $\eta : V \to V$ such that $\psi \circ \phi \circ \eta = \pi$ and write down their matrices relative to the basis $\mathcal{V}$.

ESERCIZIO 3. Let A be the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 5 & 2 \\ -5 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4\times5}(\mathbb{Q}).$$

(a) Find the rank r of A and write down two invertible matrices P and Q, with entries in $\mathbb{Q}$, such that $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

(b) Let A be a matrix 5×7 (5 rows and 7 columns) of rank 3, with entries in the field $\mathbb{F}_q$ (the field with q elements). Explain how to count all the couples of invertible matrices, P and Q, with entries in the field $\mathbb{F}_q$, such that $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 22 gennaio 2016

ESERCIZIO 1. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Sia $\phi : V \to V$, l'omomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 7 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -4 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si calcolino* $\det A$ *e* $\det({}^tA - A)$.

(b) *Siano $w_1 = v_1 + 2v_2$, $w_2 = 2v_2 + 3v_3$, $w_3 = 3v_3 - 4v_4$, $w_4 = 4v_4 - 5v_5$, $w_5 = 5v_5 - 3v_4$. Si verifichi che $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ è una base di V, e si considerino le matrici $B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$, $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)$, $C = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$. Si scrivano le relazioni tra* $\det A$, $\det B$, $\det C$ *e* $\det P$.

Svolgimento. (a) Con operazioni elementari sulle righe (di determinante 1) si ha

$$A \sim \begin{array}{r} \\ II-2I \\ \\ IV+3I \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & -4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ \\ IV+III \\ V+3II+IV \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

quindi $\det A = 6$. La matrice $H = {}^tA - A$ è antisimmetrica (${}^tH = -H$) e quindi $\det H = \det({}^tH) = \det(-H) = (-1)^5 \det H$, che è possibile se, e solo se, $\det H = 0$.

(b) Con un calcolo diretto, si osserva che la matrice $P^{-1} = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ ha determinante 30 e, inoltre, $C = PA$. Dunque, $\det B = \det \phi = \det A = 6$, e, per la formula di Binet, $\det P = 1/30$ e $\det C = (\det P)(\det A) = 1/5$. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su K. Un sottoinsieme $A \subseteq V$ è un sottospazio affine di dimensione k di V se esistono un vettore $v_0 \in A$ e un sottospazio vettoriale W, di dimensione k, di V (il sottospazio direttore) tali che $A = v_0 + W = \{ v_0 + w \mid w \in W \}$.*

(a) *Sia $A = v_0 + W$ un sottospazio affine di dimensione k di V, allora*

- (i) *si mostri che per ogni $v \in A$ si ha $A = v + W$;*
- (ii) *si mostri che A è un sottospazio vettoriale di V se, e solo se, $A = W$; ovvero se, e solo se, $0_V \in A$;*
- (iii) *dato un iperpiano affine $B = v_1 + U \subset V$, ($\dim U = n - 1$), si mostri che $A \cap B$ o è vuoto, oppure è ancora un sottospazio affine di V; cosa si può dire della $\dim(U \cap W)$ nei due casi?*
- (iv) *si mostri che l'insieme $H = \{ \zeta \in V^* \mid \zeta \circ x = \zeta \circ v_0,\ \forall x \in A \}$ è un sottospazio vettoriale di V^* e se ne calcoli la dimensione;*
- (v) *sia H come sopra e sia $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ una sua base ($d = \dim H$)), si determini la dimensione e una base del sottospazio vettoriale $\langle A \rangle^\perp$.*

(b) *Si mostri che il sottoinsieme A di $\mathbb{R}^5$, formato dalle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} 2X_1 - X_3 + X_5 = 1 \\ 4X_1 - 3X_2 - 2X_3 + 6X_4 + 8X_5 = 8 \\ X_2 - 2X_4 - 2X_5 = -2 \end{cases}$$

è un sottospazio affine e se ne determini un elemento v_0, il sottospazio direttore e la dimensione.

Facendo riferimento alle definizioni dei punti (iv) e (v) soprastanti, si determini una base per ciascuno dei sottospazi H e $\langle A\rangle^\perp$ dello spazio duale di $\mathbb{R}^5$.

Svolgimento. (a) (i) La classe laterale v_0+W non dipende dalla scelta del rappresentante in V; infatti se $v=v_0+w_0\in A$, allora, per ogni $w\in W$, si ha $v+w=v_0+(w_0+w)$ e quindi $v+W\subseteq v_0+W$; e, viceversa, $v_0+w=v+(w-w_0)$ e quindi $v_0+W\subseteq v+W$; da cui l'uguaglianza.
(ii) Se A è sottospazio vettoriale di V allora $0\in A$ e quindi, per quanto visto sopra, $A=W$; e ciò implica che A un sottospazio vettoriale di V. Dunque le affermazioni sono equivalenti.
(iii) Se esiste almeno un vettore $v\in A\cap B$, allora, per quanto visto sopra, $A=v+W$ e $B=v+U$, e quindi $A\cap B=v+(U\cap W)$ ed è perciò un sottospazio affine. In questo caso, $k-1\le\dim(U\cap W)\le k$ e, precisamente, si ha $\dim(U\cap W)=k$ se $W\subset U$, e quindi $A\subset B$; mentre si ha $\dim(U\cap W)=k-1$ negli altri casi. Se, invece, $A\cap B=\varnothing$, allora deve aversi $W\subseteq U$ (perché?) e quindi $\dim(U\cap W)=\dim W=k$.
(iv) Per ogni $x\in A$, $x-v_0\in W$, e quindi $H=W^\perp\subseteq V^*$ e $\dim H=n-k$.
(v) Si ha $\langle A\rangle=\langle v_0\rangle+W$ (verificarlo!). Quindi, se A è un sottospazio vettoriale (ovvero $v_0\in W$), allora $\langle A\rangle^\perp=W^\perp=H$ (stessa dimensione, stessa base). Se, invece $v_0\notin W$, allora $\langle A\rangle^\perp\subset W^\perp=H$ e $\dim A^\perp=n-k-1$. Se A è un iperpiano, $\dim A^\perp=0$ e non esiste una base del sottospazio nullo; altrimenti, $d=n-k>1$, possiamo supporre, a meno di cambiare l'ordine degli elementi di base di H, $(\zeta_1\circ v_0)\neq 0$, e prendere le $d-1$ forme lineari (omogeneizzate)

$$(\zeta_1\circ v_0)\zeta_2-(\zeta_2\circ v_0)\zeta_1,\dots,(\zeta_1\circ v_0)\zeta_d-(\zeta_d\circ v_0)\zeta_1.$$

(b) Con operazioni elementari sulle righe, si verifica che le tre equazioni sono linearmente dipendenti, ovvero $II=2I-3III$. Il sistema ha quindi rango 2 (sia la matrice dei coefficienti che la matrice completa) e perciò le soluzioni sono un sottospazio affine di dimensione 3, ovvero

$$A=v_0+W,\qquad \text{ove}\qquad v_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad \text{e}\quad W=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Una base del sottospazio H è data quindi dai coefficienti delle equazioni omogenee (indipendenti), ovvero $H=W^\perp=\langle(2,0,-1,0,1),\ (0,1,0,-2,-2)\rangle$. Il sottospazio $\langle A\rangle$ ha dimensione 4 e il suo ortogonale è generato dalla forma omogeneizzata, $(0,1,0,-2,-2)+2(2,0,-1,0,1)$, ovvero $\langle A\rangle^\perp=\langle(4,1,-2,-2,0)\rangle$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $\phi:V\to V$ l'endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di matrice*

$$A=\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)=\begin{pmatrix}2&1&1&1\\0&1&0&2\\3&-3&0&-3\\0&2&0&1\end{pmatrix}$$

nella base $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_4\}$.

(a) *Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, autovalori e relativi autospazi e si dica se ϕ è diagonalizzabile.*
(b) *Sia T uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{T}=\{t_1,\dots,t_6\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $L_\phi:Hom_{\mathbb{R}}(T,V)\to Hom_{\mathbb{R}}(T,V)$ definito ponendo $L_\phi(\xi)=\phi\circ\xi$, per ogni $\xi\in Hom_{\mathbb{R}}(T,V)$. Si calcolino il polinomio caratteristico di L_ϕ, autovalori e relativi autospazi e si dica se L_ϕ è diagonalizzabile.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X)=\det(X\mathbf{1}_4-A)=(X+1)^2(X-3)^2$, e le due matrici

$$A+\mathbf{1}_4=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\0&2&0&2\\3&-3&1&-3\\0&2&0&2\end{pmatrix}\qquad \text{e}\qquad A-3\cdot\mathbf{1}_4=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\0&-2&0&2\\3&-3&-3&-3\\0&2&0&-2\end{pmatrix}$$

hanno entrambo rango 2, per cui gli autospazi sono

$$W_1=\ker(\phi+\mathrm{id})=\langle v_1-3v_3,v_2-v_4\rangle\qquad \text{e}\qquad W_2=\ker(\phi-3\mathrm{id})=\langle v_1+v_3,2v_1+v_2+v_4\rangle\,;$$

e ϕ è diagonalizzabile, ovvero $V=W_1\oplus W_2$.

(b) Siano $\pi_i : V \to V$, $i = 1, 2$, le proiezioni associate alla decomposizione $V = W_1 \oplus W_2$. Allora, per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, V)$, si ha

$$\xi = \mathrm{id}_V \circ \xi = (\pi_1 + \pi_2) \circ \xi = \pi_1 \circ \xi + \pi_2 \circ \xi;$$

quindi, identificando lo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_i)$ $(i = 1, 2)$ con il sottospazio di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, V)$ costituito dalle funzioni la cui immagine è contenuta in W_i, abbiamo la decomposizione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, V) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_2),$$

essendo banale l'intersezione tra i due addendi. Per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_i)$, si ha

$$L_\phi(\xi)(t) = \phi(\xi(t)) = c_i \xi(t), \qquad \text{per ogni } t \in T,$$

ove $c_1 = -1$ e $c_2 = 3$; ovvero $L_\phi(\xi) = c_i \xi$ per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_i)$ $(i = 1, 2)$. Quindi L_ϕ è diagonalizzabile, ha gli stessi autovalori, c_1, c_2, di ϕ e gli autospazi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T, W_i)$ $(i = 1, 2)$. Quindi il polinomio caratteristico è $p_{L_\phi}(X) = (X + 1)^{12}(X - 3)^{12}$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 1 febbraio 2016

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - iX + (1-i) \in \mathbb{C}[X]$ e si verifichi che $P(-1) = 0$.*

(a) Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e si disegni nel piano di Gauss il triangolo T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo T, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

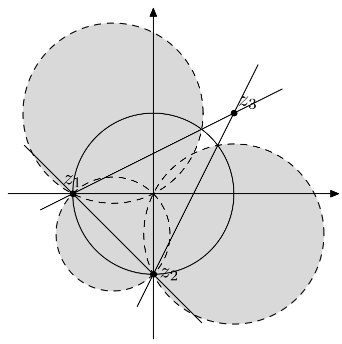
(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" della regione di piano esterna al triangolo T.

(c) Dati due punti, y e z in $\mathbb{C}$, distinti e non allineati con l'origine del piano di Gauss, siano $c \in \mathbb{C}$ e $r \in \mathbb{R}_{>0}$ il centro e il raggio della circonferenza che si ottiene riflettendo la retta $y \vee z$ nella circonferenza unitaria. Si scrivano esplicitamente c e r come funzione dei numeri complessi y e z.

Svolgimento. (a) Si ha $P(X) = (X+1)(X+i)(X-1-i)$ e i tre vertici del triangolo T sono i punti $z_1 = -1$, $z_2 = -i$ e $z_3 = 1+i$. Le tre rette cercate sono quindi $z_1 \vee z_2 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 2 = 0$, $z_1 \vee z_3 : (1+2i)z + (1-2i)\bar{z} + 2 = 0$, $z_2 \vee z_3 : (2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 = 0$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono

$$
\begin{aligned}
\lambda^*(z_1 \vee z_2) &: z\bar{z} + \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z} = 0,\\
\lambda^*(z_1 \vee z_3) &: z\bar{z} + \frac{1+2i}{2}z + \frac{1-2i}{2}\bar{z} = 0,\\
\lambda^*(z_2 \vee z_3) &: z\bar{z} - \frac{2+i}{2}z - \frac{2-i}{2}\bar{z} = 0.
\end{aligned}
$$



Nelle equazioni precedenti, il centro della circonferenza è l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ e il raggio corrispondente è il suo modulo. Il riflesso della regione esterna al triangolo è l'unione dei punti interni alle tre circonferenze riflesse. Si ottiene quindi il disegno a lato.

(c) Per quanto osservato sopra e le note relazioni tra i coefficienti dell'equazione della retta $y \vee z$ e le coordinate dei due punti, il centro della circonferenza è il numero complesso $c = \frac{y-z}{y\bar{z}-\bar{y}z}$ e il raggio è il suo modulo $|c|$. Il lettore è invitato a verificare che il valore di c dipende solo dalla retta $y \vee z$ e non dalla coppia di punti, y e z, che la generano e cosa accade di questa espressione quando i due punti vengono a essere allineati con l'origine. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi*

$$
W_1 = \langle 2v_1 + v_3,\ 4v_1 - 2v_2 + v_3 + 2v_5,\ v_1 - v_2 + v_5 \rangle, \qquad W_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \;\middle|\; \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \right\}.
$$

(a) Si determini la dimensione e una base per ciascuno dei due sottospazi e si verifichi se $V = W_1 \oplus W_2$. In caso affermativo, indicate con π_1 e π_2 in $Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$ le proiezioni su W_1 e W_2 associate a questa decomposizione si scrivano le matrici $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_1)$ e $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_2)$ e si calcoli $\det(3A - 2B)$.

(b) Si determinino le dimensioni e una base per i sottospazi $W_1^\perp$ e $W_2^\perp$ di V^*. È vero che $V^* = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$ e che le applicazioni trasposte π_1^* e π_2^* in $Hom_{\mathbb{Q}}(V^*, V^*)$ sono le proiezioni associate a questa decomposizione?

(c) Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, sia $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ e si indichi con $\pi_i \in Hom_K(V,V)$, $i = 1,2,3$, la proiezione su W_i associata a questa decomposizione. È vero che

$V^* = W_1^\perp \oplus W_2^\perp \oplus W_3^\perp$ e che le applicazioni trasposte $\pi_i^* \in Hom_K(V^*, V^*)$, $i = 1,2,3$, sono le proiezioni associate a questa decomposizione? In caso contrario, qual è la decomposizione di V^* associata a tali proiezioni?

Svolgimento. (a) I tre generatori di W_1, $w_1 = 2v_1 + v_3$, $w_2 = v_1 - v_2 + v_5$, $u = 4v_1 - 2v_2 + 2v_3 + 2v_5$ sono linearmente dipendenti, essendo $u = w_1 + 2w_2$; quindi $\dim W_1 = 2$ e una sua base è w_1, w_2. Il sistema lineare omogeneo che definisce W_2 ha rango 2 ($I - II + 2III$ è l'identità $0 = 0$) e quindi $\dim W_2 = 3$ e una sua base è formata dai vettori $w_3 = 3w_1 + v_3$, $w_4 = v_2 - v_4$, $w_5 = v_4 + v_5$.

Sostituendo una generica combinazione lineare di w_1 e w_2 nelle equazioni che definiscono W_2, si verifica facilmente che $W_1 \cap W_2 = \langle 0 \rangle$; quindi i due sottospazi sono in somma diretta e, guardando alle dimensioni (formula di Grassmann), si conclude che $V = W_1 \oplus W_2$. Dato un vettore $v = \sum_{i=1}^5 x_i v_i \in V$, si ha $\pi_1(v) = aw_1 + bw_2 \in W_1$, ove a e b sono determinati dalla condizione $v - \pi_1(v) \in W_2$; ovvero $a = \frac{-2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 + x_5}{2}$ e $b = \frac{-x_2 - x_4 + x_5}{2}$. Dunque

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 12 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_2) = \mathbf{1}_5 - A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -12 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\phi = 3\pi_1 - 2\pi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$ e sia $D \in \mathcal{A}^5(V)$ una forma 5-lineare, alternante, non nulla su V. Utilizzando la base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di V, possiamo scrivere

$$\det(3A - 2B) = \det\phi = \frac{D(\phi(w_1), \dots, \phi(w_5))}{D(w_1, \dots, w_5)} = \frac{D(3w_1, 3w_2, -2w_3, -2w_4, -2w_5)}{D(w_1, \dots, w_5)} = -3^2 2^3 = -72.$$

(b) A parte la richiesta di determinare delle basi, da quanto visto sopra possiamo affermare che $\dim W_1^\perp = 3$, $\dim W_2^\perp = 2$, $V^* = W_1^\perp \oplus W_2^\perp$ e che π_1^* è la proiezione su $W_2^\perp$, parallelamente a $W_1^\perp$ e π_2^* è la proiezione su $W_1^\perp$, parallelamente a $W_2^\perp$ (perché?). Due basi possono essere $v_1^* - 3v_3^*$, $v_2^* + v_4^* - v_5^*$ per $W_2^\perp$, e $v_1^* + v_2^* - 2v_3^*$, $v_2^* + v_5^*$, v_4^* per $W_1^\perp$.

(c) Sia $n = \dim V = \dim V^*$. Un facile calcolo di dimensioni, mostra che $\dim W_1^\perp + \dim W_2^\perp + \dim W_2^\perp = 2n$ e quindi la somma non è diretta. D'altra parte, per $i = 1,2,3$, si ha $\pi_i^* = (\pi_i \circ \pi_i)^* = \pi_i^* \circ \pi_i^*$ e quindi le trasposte delle proiezioni sono proiezioni. Inoltre

$$\mathrm{im}\,\pi_1^* = (\ker\pi_1)^\perp = (W_2 \oplus W_3)^\perp = W_2^\perp \cap W_3^\perp, \qquad \ker\pi_1^* = (\mathrm{im}\,\pi_1)^\perp = W_1^\perp, \qquad V^* = \ker\pi_1^* \oplus \mathrm{im}\,\pi_1^*.$$

Inoltre, si ha

$$\begin{gathered}(W_1^\perp \cap W_3^\perp) \cap (W_1^\perp \cap W_2^\perp) = W_1^\perp \cap W_2^\perp \cap W_3^\perp = (W_1 + W_2 + W_3)^\perp = \langle 0 \rangle \\ \dim[(W_1^\perp \cap W_3^\perp) \oplus (W_1^\perp \cap W_2^\perp)] = n - \dim W_1 = \dim W_1^\perp,\end{gathered}$$

per cui $(W_1^\perp \cap W_3^\perp) \oplus (W_1^\perp \cap W_2^\perp) = W_1^\perp$ e quindi le tre proiezioni sono associate alla decomposizione

$$V^* = (W_2^\perp \cap W_3^\perp) \oplus (W_1^\perp \cap W_3^\perp) \oplus (W_1^\perp \cap W_2^\perp);$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Sia $\phi : V \to V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) *Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile.*

(b) *Sia $C_\phi : Hom_{\mathbb{Q}}(V,V) \to Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$ l'applicazione definita ponendo $C_\phi(\xi) = \phi \circ \xi - \xi \circ \phi$, per ogni $\xi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$. Si verifichi che C_ϕ è lineare e si determinino autovalori, autospazi e polinomio caratteristico per C_ϕ e si dica se è diagonalizzabile.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X+2)^2(X-3)^3$, e le due matrici

$$A + 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

hanno rispettivamente rango 3 e 2, per cui gli autospazi sono

$$W_1 = \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle 2v_1 - 5v_3, v_2 - v_4 - 4v_5 \rangle \qquad \text{e} \qquad W_2 = \ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle v_1, v_2 + v_5, v_4 \rangle .$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi ϕ è diagonalizzabile, ovvero $V = W_1 \oplus W_2$.

(b) L'applicazione C_ϕ è lineare, perché la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalari.

Le affermazioni successive divengono evidenti se si identificano gli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$ con le rispettive matrici rispetto ad una base fatta dall'unione di una base di W_1 con una base di W_2 e si scrivono le matrici a blocchi. Siano $\pi_i : V \to V$, $1 = 1, 2$, le proiezioni associate alla decomposizione $V = W_1 \oplus W_2$, e quindi sia $\phi = -2\pi_1 + 3\pi_2$. Il nucleo di C_ϕ (ovvero l'autospazio relativo all'autovalore 0) è il sottospazio

$$T_0 = \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi = \pi_1\xi\pi_1 + \pi_2\xi\pi_2 \,\},$$

che ha dimensione 13. I sottospazi

$$T_1 = \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi = \pi_1\xi\pi_2 \,\} \qquad \text{e} \qquad T_2 = \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \mid \xi = \pi_2\xi\pi_1 \,\}$$

sono rispettivamente autospazi di C_ϕ per gli autovalori -5 e 5, entrambi di dimensione 6. Quindi C_ϕ è diagonalizzabile e il suo polinomio caratteristico è $p_{C_\phi}(X) = X^{13}(X-5)^6(X+5)^6$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 febbraio 2016

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^3+2X^2-3X-10 \in \mathbb{C}[X]$ e si verifichi che $P(i-2) = 0$.*

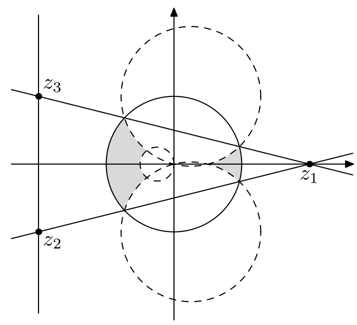
(a) *Si determinino le radici del polinomio $P(X)$ e si disegni nel piano di Gauss il triangolo T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo T, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.*

(b) *Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" dei punti simultanemente interni al triangolo T ed esterni alla circonferenza unitaria.*

(c) *Sia fissato un numero reale positivo c e si consideri l'applicazione $\lambda_c : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ che manda z su $c/\bar{z}$. È vero che $\lambda_c \circ \lambda_c = \mathrm{id}$? Si disegni nel piano di Gauss l'insieme dei punti uniti per l'applicazione λ_c. Sia ora $\eta \neq 0$ un numero complesso e si consideri l'applicazione $\mu_\eta : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ che manda z su $\eta/\bar{z}$. Che dire in questo caso dell'applicazione $\mu_\eta \circ \mu_\eta$ e dei punti uniti di μ_η?*

Svolgimento. (a) Si ha $P(X) = (X-2)(X+2+i)(X+2-i)$ e i tre vertici del triangolo T sono i punti $z_1 = 2$, $z_2 = -2-i$ e $z_3 = -2+i$. Le tre rette cercate sono quindi $z_1 \vee z_2 : (1+4i)z + (1-4i)\bar{z} - 4 = 0$, $z_1 \vee z_3 : (1-4i)z + (1+4i)\bar{z} - 4 = 0$, $z_2 \vee z_3 : z + \bar{z} + 4 = 0$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono



$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} - \frac{1+4i}{4}z - \frac{1-4i}{4}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} - \frac{1-4i}{4}z - \frac{1+4i}{4}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} + \frac{z}{4} + \frac{\bar{z}}{4} = 0.$$

Nelle equazioni precedenti, il centro della circonferenza è l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ e il raggio corrispondente è il suo modulo. Il riflesso della regione interna al triangolo ed esterna alla circonferenza unitaria è costituito dai due sottoinsiemi evidenziati in grigio nel disegno qui sopra.

(c) Si ha $\lambda_c(\lambda_c(z)) = \lambda_c(c/\bar{z}) = z$, quindi $\lambda_c \circ \lambda_c = \mathrm{id}$; inoltre, z è un punto unito se $z = \lambda_c(z) = c/\bar{z}$; ovvero $z\bar{z} = c$. Dunque, l'insieme dei punti uniti è la circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt{c}$.

Fissato un numero complesso $\eta \neq 0$, si ha $\mu_\eta(\mu_\eta(z)) = \mu_\eta(\eta/\bar{z}) = \frac{\eta}{\bar{\eta}}z$. Per ogni numero complesso η, si ha $\frac{\eta}{\bar{\eta}} = e^{2i\mathrm{Arg}\eta}$, e quindi $\mu_\eta \circ \mu_\eta$ è la rotazione attorno all'origine di angolo $2\mathrm{Arg}\eta$, che è l'identità se, e solo se, $\mathrm{Arg}\eta \in \pi\mathbb{Z}$, ovvero $\eta \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$. Il punto z è unito se $z = \mu_\eta(z) = \eta/\bar{z}$, ovvero $z\bar{z} = \eta$ e ciò può accadere solo se η è un numero reale positivo e si ricade in quanto visto sopra. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base.*

(a) *Si verifichi che esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che*

$$\phi(2v_1 - 3v_3) = \phi(v_1 - 2v_3) = v_2 - v_4 - v_5, \qquad \phi(v_2 - v_4 - v_5) = \phi(v_2 + v_4 + v_5) = v_1 - 2v_3,$$
$$\phi(v_1 - v_5) = \phi(v_1 + v_4) = v_5 - v_1.$$

Si determinino dimensione e base per i sottospazi $\ker\phi$ e $\mathrm{im}\phi$ e si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$.

(b) *Indicata con $\pi : V \to V$ la proiezione su $\mathrm{im}\phi$ parallelamente a $\ker\phi$, si determini per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la dimensione del nucleo di $\phi + t\pi$ è maggiore della dimensione di $\ker\phi$. Per tali valori di t si determini la controimmagine tramite $\phi + t\pi$ del vettore $v_1 - v_2 + 2v_3 + v_4 + v_5$. Per gli stessi valori di t si determinino una base dell'ortogonale di $\ker(\phi + t\pi)$ in V^* e una base dell'ortogonale della controimmagine tramite $\phi + t\pi$ del vettore $v_1 + v_2 - 2v_3 - v_4 - v_5$.*

Svolgimento. (a) I vettori

$$w_1 = v_1 - 2v_3, \quad w_2 = v_2 - v_4 - v_5, \quad w_3 = v_1 - v_5, \quad w_4 = v_1 - v_3 = (2v_1 - 3v_3) - (v_1 - 2v_3),$$
$$w_5 = v_4 + v_5 = \tfrac{1}{2}[(v_2 + v_4 + v_5) - (v_2 - v_4 - v_5)]$$

sono una base di V e inoltre, $v_1 + v_4 = w_3 + w_5$. L'applicazione lineare ϕ esiste e si ha

$$\phi(w_1) = w_2, \quad \phi(w_2) = w_1, \quad \phi(w_3) = -w_3, \quad \phi(w_4) = \phi(w_5) = 0.$$

Dunque $V = \operatorname{im}\phi \oplus \ker\phi$, ove

$$\operatorname{im}\phi = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1 - 2v_3, v_2 - v_4 - v_5, v_1 - v_5 \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker\phi = \langle w_4, w_5 \rangle = \langle v_1 - v_3, v_4 + v_5 \rangle .$$

La matrice cercata è $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(*b*) La restrizione di ϕ ad $\operatorname{im}\phi$ è un automorfismo di questo sottospazio, e la restrizione di π allo stesso è l'identità; e inoltre, ϕ e π hanno lo stesso nucleo. Quindi l'applicazione lineare $\phi + t\pi$ ha un nucleo di dimensione maggiore di $2 = \dim\ker\phi$ se, e solo se, $-t$ è un autovalore (reale) per la restrizione di ϕ a $\operatorname{im}\phi$. È facile verificare (ad esempio usando la base $\mathcal{W}$) che ciò accade per $t = \pm 1$.

- Per $t = 1$, si ha $\ker(\phi+\pi) = \langle w_1 - w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle$ e $v_1 + v_2 - 2v_3 - v_4 - v_5 = w_1 + w_2 = \pi(w_1) + \phi(w_1)$; La controimmagine cercata è quindi $S = (v_1 - 2v_3) + \langle v_2 + v_3,\ v_1 - v_5,\ v_1 - v_3,\ v_4 + v_5 \rangle$, per cui gli ortogonali in questione sono $\ker(\phi+\pi)^\perp = \langle v_1^* - v_2^* + v_3^* + v_4^* - v_5^* \rangle$ e $S^\perp = \langle 0 \rangle$.
- Per $t = -1$, si ha $\ker(\phi - \pi) = \langle w_1 + w_2, w_4, w_5 \rangle$ e $v_1 + v_2 - 2v_3 - v_4 - v_5 = w_1 + w_2$ non appartiene a $\operatorname{im}(\phi-\pi) = \langle w_1 - w_2, w_3 \rangle$; la controimmagine cercata è quindi $S = \varnothing$, per cui gli ortogonali in questione sono $\ker(\phi - \pi)^\perp = \langle v_1^* - v_2^* + v_3^*,\ v_4^* - v_5^* \rangle$ e $S^\perp = V^*$ (che, in realtà, è $\langle S \rangle^\perp$). □

ESERCIZIO 3. *Sia $\phi : V \to V$ uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Si consideri l'endomorfismo $M_\phi : Hom_{\mathbb{R}}(V,V) \to Hom_{\mathbb{R}}(V,V)$ definito ponendo $M_\phi(\xi) = \phi \circ \xi \circ \phi$, per ogni $\xi \in Hom_{\mathbb{R}}(V,V)$. Si calcolino il polinomio caratteristico di M_ϕ, autovalori e relativi autospazi e si dica se M_ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X+4)^2(X-1)^2(X-2)$, e le matrici

$$A + 4\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A - \mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad A - 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

hanno rispettivamente rango 3, 3 e 4, per cui gli autospazi sono

$$W_1 = \ker(\phi + 4\mathrm{id}) = \langle v_2 + 6v_5, v_4 \rangle, \quad W_2 = \ker(\phi - \mathrm{id}) = \langle v_1 - v_3 + v_4, v_2 + v_4 + v_5 \rangle,$$
$$W_3 = \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle 12v_1 - 9v_3 + 8v_4 \rangle .$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi ϕ è diagonalizzabile, ovvero $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.
(b) Siano $\pi_i : V \to V$, $i = 1, 2, 3$, le proiezioni associate alla decomposizione $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. Allora, $\phi = c_1\pi_1 + c_2\pi_2 + c_3\pi_3$, con $c_1 = -4$, $c_2 = 1$, $c_3 = 2$, e, per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, si ha

$$\xi = \mathrm{id}_V \circ \xi \circ \mathrm{id}_V = (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \circ \xi \circ (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = \sum_{1 \le i,j \le 3} \pi_i \circ \xi \circ \pi_j;$$

quindi, identificando lo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_j, W_i)$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ con $H_{ji} = \{\, \xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \mid \xi = \pi_i \circ \xi \circ \pi_j \,\}$, abbiamo la decomposizione

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) = \bigoplus_{1 \le i,j \le 3} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W_j, W_i),$$

essendo banale l'intersezione tra ogni addendo e la somma dei rimanenti. Per ogni $\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$, si ha

$$M_\phi(\xi) = \sum_{1 \le i,j \le 3} \phi \circ (\pi_i \circ \xi \circ \pi_j) \circ \phi = \sum_{1 \le i,j \le 3} c_i c_j (\pi_i \circ \xi \circ \pi_j),$$

perché $\pi_h \circ \pi_k = \delta_{h,k}\pi_h$, per $h, k = 1, 2, 3$. Quindi M_ϕ è diagonalizzabile, ha come autovalori i prodotti, a due a due, degli autovalori di ϕ, mentre gli autospazi sono i sottospazi $H_{ji} + H_{ij}$ per $i, j = 1, 2, 3$, ove la somma è diretta se $i \neq j$ (è inutile scrivere due volte lo spazio quando $i = j$, ma evita di indicarli separatamente). Quindi il polinomio caratteristico è $p_{M_\phi}(X) = (X - 16)^4 (X + 4)^8 (X + 8)^4 (X - 1)^4 (X - 2)^4 (X - 4)$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 giugno 2016

ESERCIZIO 1. *Si determinino i numeri complessi z tali che $(z+i)^4 - 16 = 0$.*

(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso P che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del poligono P, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

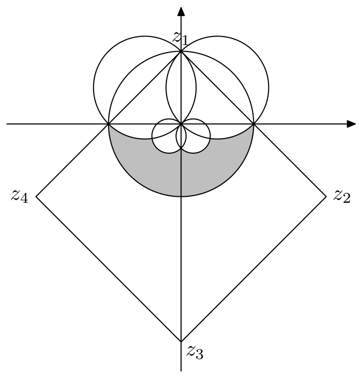
(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" dei punti simultanemente interni al poligono P ed esterni alla circonferenza unitaria.

Svolgimento. (a) Le radici quarte di 16 sono 2, $2i$, -2, $-2i$, e i quattro vertici del quadrato P sono i punti $z_1 = i$, $z_2 = 2-i$, $z_3 = -3i$ e $z_4 = -2-i$. Le quattro rette cercate sono quindi

$$z_1 \vee z_2 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0, \qquad z_2 \vee z_3 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} - 6 = 0,$$
$$z_3 \vee z_4 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} + 6 = 0, \qquad z_4 \vee z_1 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 = 0.$$

(*b*) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono quindi

$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} - \frac{1+i}{6}z - \frac{1-i}{6}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_3 \vee z_4) : z\bar{z} + \frac{1-i}{6}z + \frac{1+i}{6}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_4 \vee z_1) : z\bar{z} + \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z} = 0,$$



Il riflesso della regione interna al quadrato ed esterna alla circonferenza unitaria è costituito dal sottoinsieme evidenziato in grigio nel disegno qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$, siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle rispettive basi e siano $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ e $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_4^*\}$ le corrispondenti basi duali.*

(a) Sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare tale che

$$w_1^* \circ \phi = 2v_1^* + 2v_3^* - 4v_4^* + 2v_5^*, \qquad w_2^* \circ \phi = -v_2^* - 2v_3^* + v_4^* - v_5^*,$$
$$w_3^* \circ \phi = -v_1^* + 2v_2^* + 3v_3^* + v_5^*, \qquad w_4^* \circ \phi = v_1^* + v_3^* - 2v_4^* + v_5^*.$$

Si determinino dimensione e base per i sottospazi $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$ e per i rispettivi ortogonali e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$.

(b) Indicato con r il rango di ϕ, si determinino, se esistono, dei vettori $u_1, \dots, u_r \in W$ e $\zeta_1, \dots, \zeta_r \in V^*$ tali che $\phi = u_1 \otimes \zeta_1 + \cdots + u_r \otimes \zeta_r$. Che relazioni ci sono tra i sottospazi $\ker\phi$, $\mathrm{im}\phi$ e $\langle u_1, \dots, u_r \rangle$, $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_r \rangle$?

(c) Siano V e W spazi vettoriali di dimensione n e m sul campo $\mathbb{F}_q$. Siano V_1 e W_1 due rispettivi sottospazi, di dimensioni k e h, e si indichi con $j : V_1 \to V$ l'inclusione e con $\pi : W \to W/W_1$ la proiezione canonica. Date le applicazioni lineari $\alpha : V_1 \to W$ e $\beta : V \to W/W_1$, tali che $\pi \circ \alpha = \beta \circ j$, è vero che esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, tale che $\phi \circ j = \alpha$ e $\pi \circ \phi = \beta$? In caso affermativo, si dica se tale applicazione è unica oppure si scriva il numero di tali applicazioni come funzione del numero, q, di elementi del campo $\mathbb{F}_q$.

Svolgimento. (a) Ricordiamo che per ogni vettore $w^* \in W^*$, si ha $\phi^*(w^*) = w^* \circ \phi$, ove $\phi^* : W^* \to V^*$ è l'applicazione trasposta di ϕ. Dunque è data la matrice $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\phi^*)$, per cui la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = {}^t\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\phi^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con il metodo di eliminazione di Gauss la matrice A è riga-equivalente a

$$\begin{array}{r} IV \\ -II \\ I-2IV \\ III+IV+2II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le prime due colonne di A sono le coordinate di una base dell'immagine di ϕ, ovvero

$$\operatorname{im}\phi = \langle 2w_1 - w_3 + w_4, -w_2 + 2w_3 \rangle \qquad \text{e} \qquad (\operatorname{im}\phi)^\perp = \langle w_1^* - 2w_4^*, 2w_2^* + w_3^* + w_4^* \rangle .$$

Dalla matrice ridotta si ricava immediatamente

$$\ker\phi = \langle v_1 + 2v_2 - v_3, 2v_1 + v_2 + v_4, v_1 + v_2 - v_5 \rangle \quad \text{e} \quad (\ker\phi)^\perp = \langle v_1^* + v_3^* - 2v_4^* + v_5^*, v_2^* + 2v_3^* - v_4^* + v_5^* \rangle .$$

(b) Il rango di ϕ è uguale a 2. Posto $u_1 = 2w_1 - w_3 + w_4$, $u_2 = -w_2 + 2w_3$ e $\zeta_1 = v_1^* + v_3^* - 2v_4^* + v_5^*$, $\zeta_2 = v_2^* + 2v_3^* - v_4^* + v_5^*$, si ha $\phi = u_1 \otimes \zeta_1 + u_2 \otimes \zeta_2$; ovvero

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\operatorname{im}\phi = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $(\ker\phi)^\perp = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle$.

(c) Identifichiamo V_1 con la sua immagine in V tramite j e fissiamo dei sottospazi $V_2 \subseteq V$ e $W_2 \subseteq W$ tali che $V = V_1 \oplus V_2$ e $W = W_1 \oplus W_2$, per cui la proiezione $\pi : W \to W/W_1$, ristretta a W_2, induce un isomorfismo di spazi vettoriali. Dunque, se $v \in V_1$, poniamo $\phi(v) = \alpha(v)$; se invece $v \in V_2$, poniamo $\phi(v) = w \in W_2$, ove w è l'unico vettore di W_2 tale che $\pi(w) = \beta(v)$. Dunque, se $v = v_1 + v_2 \in V_1 \oplus V_2 = V$, si ha $\phi(v) = \alpha(v_1) + w_2$, con $\pi(w_2) = \beta(v_2)$. Si conclude che

$$\phi(j(v_1)) = \phi(v_1) = \alpha(v_1), \qquad \text{e} \qquad \pi\phi(v_1 + v_2) = \pi(\alpha(v_1)) + \pi(w_2) = \beta(v_1) + \beta(v_2) = \beta(v_1 + v_2),$$

qualunque siano $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Dunque, una tale ϕ esiste. Inoltre, se a ϕ sommo una applicazione lineare $\psi : V \to W$ che sia nulla su V_1 e assuma valori in W_1 ($V_1 \subseteq \ker\psi$ e $\operatorname{im}\psi \subseteq W_1$, ovvero un elemento dell'immagine di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V/V_1, W_1)$ in $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V, W)$), si ha ancora $(\phi+\psi)\circ j = \alpha$ e $\pi \circ (\phi+\psi) = \beta$. Quindi il numero cercato è il numero di elementi dello spazio vettoriale $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(V/V_1, W_1)$, ovvero $q^{\dim(V/V_1)\dim W_1} = q^{(n-k)h}$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale complesso e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) *Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascun autospazio W_i; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile.*

(b) *Per ogni autovalore, si indichi con $\pi_i : V \to V$ la proiezione sul corrispondente autospazio W_i, parallelamente alla somma dei rimanenti. Si dica se l'endomorfismo π_i appartiene a $\mathbb{C}[\phi]$ e, in caso affermativo, lo si scriva come funzione polinomiale dell'endomorfismo ϕ.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X+4)^2(X-1)^2(X-2)$, e le matrici

$$A + 4\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A - \mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A - 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hanno rispettivamente rango 3, 3 e 4, per cui gli autospazi sono

$$W_1 = \ker(\phi + 4\mathrm{id}) = \langle v_1 - v_4, v_2 - v_4 + v_5 \rangle, \quad W_2 = \ker(\phi - \mathrm{id}) = \langle v_1 - 6v_4, 4v_3 + 3v_5 \rangle,$$
$$W_3 = \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle v_3 + v_5 \rangle.$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono, per cui ϕ è diagonalizzabile, ovvero $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

(*b*) Siano a, b e c i tre autovalori, a due a due distinti, di ϕ e siano W_a, W_b e W_c i tre autospazi corrispondenti. Allora, l'endomorfismo $\frac{(\phi-b)(\phi-c)}{(a-b)(a-c)}$ manda a zero tutti i vettori di $W_b \oplus W_c$ e manda in sé stessi i vettori di W_a. Dunque è uguale alla proiezione su W_a parallelamente a $W_b \oplus W_c$. Analogamente possiamo scrivere le altre due proiezioni.

Nel caso presente abbiamo quindi i tre endomorfismi $\pi_1 = \frac{1}{30}(\phi - \mathrm{id})(\phi - 2\mathrm{id})$, $\pi_2 = -\frac{1}{5}(\phi + 4\mathrm{id})(\phi - 2\mathrm{id})$, $\pi_3 = \frac{1}{6}(\phi + 4\mathrm{id})(\phi - \mathrm{id})$. La costruzione si generalizza facilmente al caso di un qualsiasi endomorfismo diagonalizzabile (...e nel caso di un endomorfismo triangolarizzabile?). □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 1 luglio 2016

ESERCIZIO 1. *Sia C la circonferenza del piano di Gauss di equazione*

$$(\sqrt{2}+1)z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + (\sqrt{2}-1) = 0.$$

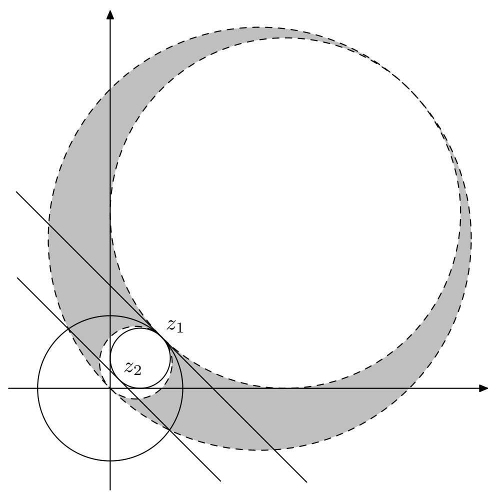
(a) Si determinino centro e raggio della circonferenza C e la si disegni nel piano di Gauss. Si scrivano, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$, le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza nei punti di intersezione con la diagonale del piano di Gauss ($\Re z = \Im z$).

(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo la circonferenza C e le rette del punto precedente nella circonferenza unitaria e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" dei punti simultanemente interni alla regione delimitata dalle due tangenti ed esterni alla circonferenza C.

Svolgimento. (a) La circonferenza C ha centro in $(\sqrt{2}-1)(1+i)$ e raggio $\sqrt{2}-1$; le sue intersezioni con la diagonale sono i punti $z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ e $z_2 = \frac{1+i}{(\sqrt{2}+1)^2\sqrt{2}}$.

Le rette tangenti a C nei punti z_1 e z_2 sono, rispettivamente,

$$r_1 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2\sqrt{2} = 0$$
$$r_2 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2 = 0.$$



(b) La riflessione nella circonferenza unitaria produce le tre circonferenze che nel disegno a fianco appaiono tratteggiate. Precisamente

$$\lambda^*(C) : (\sqrt{2}-1)z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + (\sqrt{2}+1) = 0$$
$$\lambda^*(r_1) : 2\sqrt{2}z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} = 0$$
$$\lambda^*(r_2) : 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2 z\bar{z} - (1-i)z - (1+i)\bar{z} = 0.$$

I centri e i raggi sono, rispettivamente, $\frac{1+i}{\sqrt{2}-1}$ e $\sqrt{2}+1$ per $\lambda^*(C)$, $\frac{1+i}{2\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{2}$ per $\lambda^*(r_1)$, e $\frac{1+i}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2}$ e $\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2}$ per $\lambda^*(r_2)$.

Il riflesso della regione di piano compresa tra le due rette ed esterna alla circonferenza C è la regione evidenziata in grigio nel disegno. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, e W, ove*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + 2v_3 - v_4, \\ u_2 &= v_2 + v_3 + v_5, \\ u_3 &= v_1 - 2v_2 - v_4 - 2v_5, \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad W = \left\{ \sum_{j=1}^{5} x_j v_j \;\middle|\; \begin{aligned} &x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ &2x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ &2x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{aligned} \right\}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei due sottospazi e si dica se $V = U \oplus W$. In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_U^W)$, ove $\pi_U^W : V \to V$ è la proiezione sul sottospazio U, parallelamente a W.

(b) Si considerino i sottospazi $L = \langle v_2, v_4 \rangle$ e $M = \langle v_1, v_3, v_5 \rangle$. È vero che $L \oplus W = U \oplus M = V$? In caso affermativo si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_W^L)$, ove $\pi_W^L : V \to V$ è la proiezione sul sottospazio W, parallelamente a L.

(c) Siano rispettivamente $j : W \to V$ e $p : V \to V/W$, l'inclusione e la proiezione canonica. È vero che esiste un omomorfismo $\psi : V/W \to W$ tale che $U = \{\, v + \psi(p(v)) \mid v \in L \,\}$? In caso negativo spiegare perché non può esistere, in caso affermativo scrivere la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(j \circ \psi \circ p)$.

Svolgimento. (a) $u_1 - 2u_2 - u_3 = 0$ e quindi il sottospazio U ha dimensione 2 e una sua base è data da u_1 e u_2. Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 2 ($III = 2I - II$), quindi il sottospazio W ha dimensione 3 e una sua base è data da $w_1 = v_1 - v_4$, $w_2 = v_2 + v_3 + v_4$, $w_3 = v_3 + v_4 + 2v_5$. $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi (per la formula di Grassmann) $V = U \oplus W$. La matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_U^W) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 0 & -4 & 2 \\ -6 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) È immediato verificare che $L \cap W = \langle 0 \rangle = U \cap M$ e quindi $L \oplus W = U \oplus M = V$. La matrice cercata è

$$B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_W^L) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Preso comunque $u \in U$, si ha $u = \pi_L^W(u) + \pi_W^L(u)$. Posto $v = \pi_L^W(u) \in L$, si ha $u - v \in W$, e quindi $u = \pi_U^W(v)$ e $p(v) = p(u) \in V/W$. Dunque $v + \pi_W^L(\pi_U^W(v)) = u$, per ogni $u \in U$ e perciò

$$U = \left\{\, v + \pi_W^L(\pi_U^W(v)) \mid v \in L \,\right\} \quad \text{con} \quad \operatorname{im}(\pi_W^L \circ \pi_U^W) \subset W \quad \text{e} \quad \ker(\pi_W^L \circ \pi_U^W) \supset W.$$

Dunque, $\pi_W^L \circ \pi_U^W = j \circ \psi \circ p$ per un'opportuno omomorfismo $\psi : V/W \to W$ e la matrice cercata è $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(j \circ \psi \circ p) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi_W^L \circ \pi_U^W) = BA$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ delle basi. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \textit{e sia} \qquad P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino $\det\phi$, autovalori e autospazi per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile.
(b) Si determinino il polinomio $F(X) = \det(AX - P)$ e le sue radici, e si dica che relazioni hanno con il polinomio caratteristico e gli autovalori di ϕ.
(c) Siano ora V uno spazio vettoriale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ delle basi di V, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, $P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V)$. Posto $F(X) = \det(AX - P)$, cosa si può dire del grado di $F(X)$? Cosa si può dire di ϕ quando $F(X)$ ha grado 0?

Svolgimento. Fissato comunque un numero razionale $c \neq 0$, $Ac - P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(c\phi - \mathrm{id}_V)$ e il determinante di questa matrice si annulla se, e solo se, il suo rango non è massimo e quindi esiste un vettore non nullo, $v \in V$, tale che $c\phi(v) - v = 0$; ovvero $\phi(v) = \frac{1}{c}v$ e quindi $\frac{1}{c}$ è un autovalore per ϕ. Perciò, le radici di $F(X)$ sono gli inversi degli autovalori non nulli di ϕ. Infatti, si ha

$$(\det P)^{-1} F(X) = \det(P^{-1}(AX - P)) = \det\left(P^{-1}A - \frac{1}{X}\mathbf{1}_n\right)\det(X\mathbf{1}_n) = (-X)^n p_\phi(1/X),$$

essendo $P^{-1}A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. Con un calcolo diretto, si ha

$$F(t) = \det\begin{pmatrix} t-3 & 1-t & 3-t & t-1 \\ 0 & t+4 & 0 & 0 \\ t+7 & 0 & t-3 & 0 \\ -t-2 & -3t-2 & 0 & 2t-2 \end{pmatrix} = (t+4)(t-1)(t-3)\det\begin{pmatrix} t-3 & -1 & 1 \\ t+7 & 1 & 0 \\ -t-2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 5(t+4)(t-1)(t-3)(t+2).$$

Dunque, ϕ ha quattro autovalori distinti, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, che hanno necessariamente molteplicità (algebrica e geometrica) uguale a uno, e quindi ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ e $\det\phi = \frac{1}{24}$. Gli autospazi sono, nell'ordine, $\langle v_4\rangle$, $\langle v_1 + v_3\rangle$, $\langle v_3\rangle$, $\langle v_2 + v_4\rangle$.

Infine, dalla relazione $(\det P)^{-1}F(X) = (-X)^n p_\phi(1/X)$, si ricava che il grado di $F(X)$ è la differenza tra $n = \dim V$ e la massima potenza di X che divide $p_\phi(X)$; ovvero $n - m_{alg}(0)$, ove $m_{alg}(0)$ indica la molteplicità algebrica dell'autovalore 0. In particolare, se $F(X)$ si riduce ad una costante, significa che ϕ ha solo l'autovalore 0 e quindi è un endomorfismo nilpotente. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 5 settembre 2016

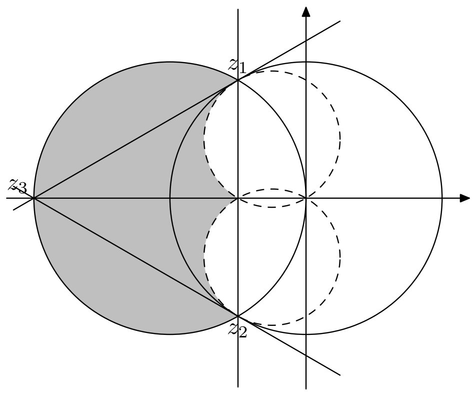
ESERCIZIO 1. *Sia* $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = 1 \}$.

(a) Si disegni nel piano di Gauss l'insieme C. Si scrivano, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$, le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza unitaria nei punti z_1 e z_2 di intersezione tra questa e C. Sia z_3 il punto di intersezione tra le due tangenti.

(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo la circonferenza C e le rette contenenti i lati del triangolo z_1, z_2 e z_3 e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" dei punti interni al triangolo.

Svolgimento. (a) C è la circonferenza di centro -1 e raggio 1; le sue intersezioni con la circonferenza unitaria sono i punti $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le rette tangenti alla circonferenza unitaria nei punti z_1 e z_2 sono, rispettivamente,



$$r_1 : (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 4 = 0,$$
$$r_2 : (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 4 = 0$$

che si intersecano in $z_3 = -2$. (b) La riflessione nella circonferenza unitaria dei lati del triangolo produce la circonferenza C e le altre due che nel disegno a fianco appaiono tratteggiate. Precisamente

$$\lambda^*(r_1) : 4z\bar{z} + (1 + i\sqrt{3})z + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} = 0.$$
$$\lambda^*(r_2) : 4z\bar{z} + (1 - i\sqrt{3})z + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} = 0$$

I centri e i raggi sono, rispettivamente, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}$ e $\frac{1}{2}$ per $\lambda^*(r_1)$, e $\frac{-1-i\sqrt{3}}{4}$ e $\frac{1}{2}$ per $\lambda^*(r_2)$. Il riflesso della regione di piano contenuta nel triangolo di vertici z_1, z_2, z_3, è la regione evidenziata in grigio nel disegno. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e W, ove*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + 2v_3 + v_5, \\ u_2 &= v_1 - v_2 + 2v_3 - v_4, \\ u_3 &= -v_1 + 2v_2 - 2v_3 + 2v_4 + v_5, \end{aligned} \qquad e \qquad W = \left\{ \sum_{j=1}^{5} x_j v_j \;\middle|\; \begin{aligned} x_2 + x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei due sottospazi e si dica se $V = U \oplus W$. In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma)$, ove $\sigma = \sigma_U^W : V \to V$ è la simmetria di asse U e direzione W.

(b) Siano rispettivamente $j : W \to V$ e $p : V \to V/U$, l'inclusione e la proiezione canonica. Si consideri l'applicazione $\Phi : Hom_{\mathbb{Q}}(V,V) \to Hom_{\mathbb{Q}}(W, V/U)$ definita da $\Phi(\phi) = p \circ \phi \circ j$ per ogni $\phi \in Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$. Si determinino nucleo e immagine di Φ e si determini, se esiste, una base $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_{25}\}$ di $Hom_{\mathbb{Q}}(V,V)$ per cui ξ_i e $\Phi(\xi_i)$ siano entrambi isomorfismi, per ogni $i = 1, \dots, 25$.

(c) Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{Q}$, con $V = U \oplus W$ e $\sigma : V \to V$ la simmetria di asse U e direzione W. Dato un sottospazio T di V, è vero che $T = (T \cap U) \oplus (T \cap W)$ se, e solo se, $\sigma(T) \subseteq T$? Si dica che condizione devono soddisfare l'asse e la direzione di una simmetria $\tau : V \to V$, affinché $\tau \circ \sigma$ sia ancora una simmetria di V. È vero che queste simmetrie formano un sottogruppo di $\mathrm{GL}V$*?*

Svolgimento. (a) $u_1 - 2u_2 - u_3 = 0$ e quindi il sottospazio U ha dimensione 2 e una sua base è data da u_1 e u_2. Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 2 ($III = I - II$), quindi il sottospazio W ha dimensione 3 e una sua base è data da $w_1 = v_1 - v_2 - v_5$, $w_2 = 2v_1 - v_2 + v_4$, $w_3 = v_3$. $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi (per la formula di Grassmann) $V = U \oplus W$. La matrice cercata è

$$S = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma_U^W) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & 6 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sia $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ la base di V fatta dai vettori del punto precedente e osserviamo che $\mathcal{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$ è una base di W e $\mathcal{W}' = \{w_1 + U, w_2 + U, w_3 + U\}$ è una base di V/U. Tramite gli isomorfismi $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \to M_5(\mathbb{Q})$, e $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}'} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, V/U) \to M_3(\mathbb{Q})$, l'applicazione $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, V/U)$ corrisponde all'omomorfismo $M_5(\mathbb{Q}) \to M_3(\mathbb{Q})$ definito da $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \mapsto D$, dove le matrici di $M_5(\mathbb{Q})$ sono scritte a blocchi relativi alla decomposizione $V = U \oplus W$. Dunque, $\phi \in \ker\Phi$ se, e solo se, $\phi(w) \in U$ per ogni $w \in W$. Quindi Φ ha un nucleo di dimensione 16, l'immagine ha dimensione 9 e Φ è suriettiva.

Infine, sempre utilizzando la rappresentazione matriciale, possiamo considerare la base di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,V)$ corrispondente alle matrici $\mathbf{1}$, $\mathbf{1} - 2\varepsilon(i,i)$ per $i = 2, \dots, 5$, e $\mathbf{1} + \varepsilon(i,j)$ per $i \neq j$, entrambi in $\{1, \dots, 5\}$.

(c) È chiaro che, essendo $U \cap W = \langle 0 \rangle$, si ha $(T \cap U) \oplus (T \cap W)$ e che questo sottospazio è contenuto in T. Dato $t \in T$, si ha $t = \frac{t+\sigma(t)}{2} + \frac{t-\sigma(t)}{2}$ e i due addendi stanno in U e W, rispettivamente. È chiaro che $\frac{t+\sigma(t)}{2} \in U \cap T$ se, e solo se, $\sigma(t) \in T$ (e analogamente per l'addendo in W); il che permette di concludere.

Infine, se τ e σ sono simmetrie e $\tau\sigma = \tau \circ \sigma$ è ancora una simmetria, ovvero $(\tau\sigma)^2 = \tau\sigma\tau\sigma = \mathrm{id}_V$, allora

$$\sigma\tau = \tau^2\sigma\tau\sigma^2 = \tau(\tau\sigma\tau\sigma)\sigma = \tau\sigma.$$

Dunque gli autospazi U e W di σ devono essere stabili per ciascuna delle simmetrie τ, ovvero deve aversi $\tau(U) = U$ e $\tau(W) = W$ per ciascuna di queste simmetrie ed è chiaro che la composizione di due simmetrie con questa proprietà ha ancora la stessa proprietà (per l'identità e l'inversa non ci sono problemi). Dunque, possiamo affermare che tali simmetrie *generano* un sottogrupo di $\mathrm{GL}V$, ma, in generale, non formano un sottogruppo perché, come abbiamo osservato sopra, il prodotto di due simmetrie è ancora una simmetria se, e solo se, le due simmetrie commutano. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base; si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per ϕ e si dica se ϕ è diagonalizzabile.*
(b) *Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$ e si indichi con $\pi : V \to V$ la proiezione su $\mathrm{im}\phi$ parallelamente a $\ker\phi$. È vero che esiste un endomorfismo $\psi \in \mathbb{Q}[\phi]$, tale che $\psi \circ \phi = \phi \circ \psi = \pi$? In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ e un polinomio $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $P(\phi) = \psi$. Un tale polinomio è unico?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = X^2(X+1)(X+3)^2$, e quindi gli autovalori di ϕ sono $0, -1, -3$. I corrispondenti autospazi sono

$$\ker\phi = \langle v_1 + 2v_2 + 3v_5, v_3 - v_5 \rangle, \quad \ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle 3v_3 - 2v_5 \rangle, \quad \ker(\phi + 3\mathrm{id}) = \langle v_1 - v_2, v_1 + v_2 + v_4 \rangle.$$

Dunque ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

(b) Poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti, si ha $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$. In particolare, la proiezione sull'immagine di ϕ, parallelamente all'autospazio relativo a 0 è

$$\pi = \mathrm{id} - \frac{1}{3}(\phi + \mathrm{id})(\phi + 3\mathrm{id}) = -\frac{\phi^2 + 4\phi}{3}.$$

Dunque

$$\psi = -\frac{1}{3}(\phi + 4\mathrm{id}), \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi) = -\tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Infine, possiamo prendere $P(X) = -\frac{X+4}{3}$ o sommare a questo polinomio un qualsiasi polinomio che stia nel nucleo (certamente non banale) dell'applicazione lineare $P(X) \mapsto P(\phi)$, da $\mathbb{Q}[X]$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 19 settembre 2016

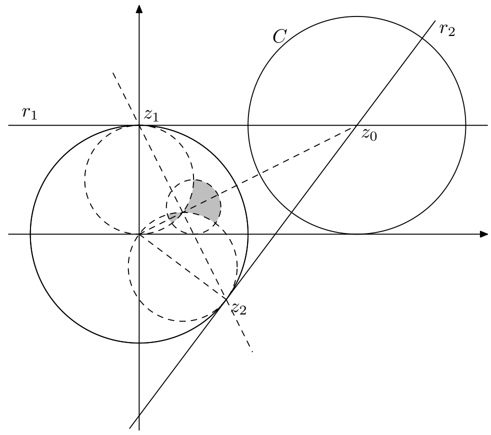
ESERCIZIO 1. *Sia $C = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-2-i| = 1 \}$ e si ponga, come di consueto, $\lambda(z) = 1/\bar{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.*

(a) Si disegni nel piano di Gauss la circonferenza C. Si scrivano le equazioni (reali) in termini delle coordinate z e $\bar{z}$, delle rette, r_1 e r_2, tangenti alla circonferenza unitaria e passanti per il centro di C.

(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo la circonferenza C e le rette r_1 e r_2. Si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il "riflesso" dei punti interni a C che sono compresi tra le due rette.

(c) Siano b_1 e b_2 due punti della circonferenza unitaria non diametralmente opposti e siano t_1 e t_2 le due rette tangenti alla circonferenza unitaria nei punti dati. È vero che il punto $t_1 \cap t_2$ è $2\lambda(b_1 + b_2)$? Sia r la retta per b_1 e b_2; è vero che la circonferenza $\lambda^*(r)$ passa per il punto $t_1 \cap t_2$?

Svolgimento. (a) C è la circonferenza di centro $z_0 = 2 + i$ e raggio 1; le rette passanti per z_0 sono tangenti la circonferenza unitaria nei punti $z_1 = i$ e $z_2 = \frac{4-3i}{5}$ (come fare per trovarli?). Le rette cercate sono quindi $r_1 : iz - i\bar{z} + 2 = 0$ e $r_2 : (4 + 3i)z + (4 - 3i)\bar{z} - 10 = 0$.



(b) La riflessione nella circonferenza unitaria del cerchio C e delle due rette determina le tre circonferenze che appaiono tratteggiate nel disegno,

$$\lambda^*(C) : 4z\bar{z} - (2 - i)z - (2 + i)\bar{z} + 1 = 0.$$
$$\lambda^*(r_1) : 2z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0.$$
$$\lambda^*(r_2) : 10z\bar{z} - (4 + 3i)z - (4 - 3i)\bar{z} = 0$$

I centri e i raggi sono, rispettivamente, $\frac{2+i}{4}$ e $\frac{1}{4}$ per $\lambda^*(C)$, $\frac{i}{2}$ e $\frac{1}{2}$ per $\lambda^*(r_1)$, e $\frac{4-3i}{10}$ e $\frac{1}{2}$ per $\lambda^*(r_2)$. Il riflesso della regione di piano contenuta nel cerchio C e limitata dalle due tangenti è la regione evidenziata in grigio nel disegno.

(c) Ricordando la definizione 'geometrica' della riflessione nella circonferenza unitaria, il riflesso del punto di intersezione delle tangenti $t_1 \cap t_2$, è l'intersezione tra la semiretta per l'origine e $t_1 \cap t_2$ e la retta $b_1 \vee b_2$ (si guardi il disegno identificando b_1, b_2 con i punti z_1, z_2 e considerando le rispettive tangenti). Tale punto è il punto medio $\frac{b_1+b_2}{2}$, e quindi il suo riflesso è proprio $2\lambda(b_1 + b_2) = t_1 \cap t_2$. Poiché il punto $\frac{b_1+b_2}{2}$ stà sulla retta r, il suo riflesso sta sulla circonferenza $\lambda^*(r)$, che è la circonferenza passante per b_1, b_2 e tale punto. Questa circonferenza non è stata rappresentata nel disegno per non appesantire ulteriormente l'immagine. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e W, ove*

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 + v_3 + 2v_4, \\ u_2 &= v_2 - v_3 - 2v_4 + v_5, \\ u_3 &= v_1 + 2v_2 - v_3 - 2v_4 + 2v_5, \end{aligned} \qquad e \qquad W = \left\{ \sum_{j=1}^{5} x_j v_j \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei due sottospazi e si dica se $V = U \oplus W$. In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma_U^W)$, ove $\sigma_U^W : V \to V$ è la simmetria di asse U e direzione W.

(b) Sia ora V uno spazio vettoriale sul campo K, di caratteristica diversa da 2, e $V = U \oplus W$ per opportuni sottospazi U e W. Indicata con $\sigma : V \to V$ la simmetria di asse U e direzione W, sia $\sigma^* : V^* \to V^*$ l'applicazione trasposta. Si mostri che anche σ^* è una simmetria e se ne determinino asse e direzione.

Svolgimento. (a) $u_1 + 2u_2 - u_3 = 0$ e quindi il sottospazio U ha dimensione 2 e una sua base è data da u_1 e u_2. Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 2 ($III = I - II$), quindi il sottospazio W ha dimensione 3 e una sua base è data da $w_1 = v_1 - v_3 + v_5$, $w_2 = v_2 + 2v_3 - v_5$, $w_4 = v_4$. $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi (per la formula di Grassmann) $V = U \oplus W$. La matrice cercata è

$$S = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma_U^W) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Si ha $\sigma^* \circ \sigma^* = (\sigma \circ \sigma)^* = (\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$ e quindi anche σ^* è una simmetria. L'asse di σ^* (ovvero l'autospazio relativo all'autovalore 1) è $W^\perp$, mentre la direzione (ovvero l'autospazio relativo all'autovalore -1) è $U^\perp$. Infatti, se $w^* \in W^\perp$, si ha

$$\sigma^*(w^*) \circ v = \sigma^*(w^*) \circ (u + w) = w^* \circ \sigma(u + w) = w^* \circ (u - w) = w^* \circ u = w^* \circ v,$$

qualunque sia $v = u + w \in V$, e quindi $\sigma^*(w^*) = w^*$. Analogamente, se $u^* \in U^\perp$, si ha

$$\sigma^*(u^*) \circ v = \sigma^*(u^*) \circ (u + w) = u^* \circ \sigma(u + w) = u^* \circ (u - w) = -u^* \circ w = -u^* \circ v,$$

qualunque sia $v = u + w \in V$, e quindi $\sigma^*(u^*) = -u^*$. □

ESERCIZIO 3. *Siano V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base e si indichi con H l'iperpiano di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0$.*

(a) *Si consideri il sottogruppo $\mathscr{G} = \{ \phi \in \mathrm{GL}V \mid \phi(x) = x \ \forall x \in H \}$ di $\mathrm{GL}V$ e si dia l'esempio di due suoi elementi che non commutano, scrivendone le matrici nella base data. Indicato con $\det : \mathscr{G} \to \mathbb{Q}^\times$ l'omomorfismo (di gruppi) che associa ad ogni elemento di $\mathscr{G}$ il suo determinante, si mostri che è un omomorfismo suriettivo e che il suo nucleo, $\mathscr{G}_1$, è un sottogruppo commutativo di $\mathscr{G}$.*

(b) *Si mostri che ogni elemento $\phi \in \mathscr{G}$, che non appartenga a $\mathscr{G}_1$, è diagonalizzabile e se ne determinino gli autovalori e le dimensioni dei relativi autospazi. Si mostri che ogni elemento di $\mathscr{G}_1$, diverso dall'elemento neutro di $\mathscr{G}$, non è diagonalizzabile e se ne determinino gli autovalori e i relativi autospazi.*

(c) *Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione 5 sul campo $\mathbb{F}_q$, sia H un iperpiano e $\zeta \in V^*$ tale che $H = \langle \zeta \rangle^\perp$. Si dica quante sono le basi $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ di V^* tali che $\zeta = v_1^* + v_2^* + v_3^* + v_4^* + v_5^*$.*

Svolgimento. I vettori non nulli di H sono autovettori relativi all'autovalore 1 per ogni ϕ in $\mathscr{G}$; è quindi conveniente usare una base di V ottenuta completando una base di H; ad esempio $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$, con $w_1 = v_1 - 2v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$, $w_3 = v_3 + v_5$, $w_4 = v_4$, $w_5 = v_5$. Matrici di cambiamento di base

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dato $\phi \in \mathscr{G}$, si ha $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \end{pmatrix}$, per opportuni $x_1, \dots, x_5$, ove $x_5 = \det \phi$ può assumere qualunque valore diverso da 0. Due elementi di $\mathscr{G}$ che non commutano sono gli endomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 che, nella base $\mathcal{W}$ hanno matrici

$$B_1 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

le loro matrici nella base richiesta sono quindi $A_1 = PB_1P^{-1}$ e $A_2 = PB_2P^{-1}$.

Rispetto alla base $\mathcal{W}$, gli elementi di $\mathscr{G}_1$ hanno matrice del tipo indicato sopra, con $x_5 = 1$ e si ha

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&x_1\\ 0&1&0&0&x_2\\ 0&0&1&0&x_3\\ 0&0&0&1&x_4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0&y_1\\ 0&1&0&0&y_2\\ 0&0&1&0&y_3\\ 0&0&0&1&y_4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&x_1+y_1\\ 0&1&0&0&x_2+y_2\\ 0&0&1&0&x_3+y_3\\ 0&0&0&1&x_4+y_4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

per cui si tratta di un sottogruppo commutativo (isomorfo ad H, come gruppo additivo).

(b) Proseguendo nelle notazioni precedenti, un elemento $\phi \in \mathscr{G}$, che non appartenga a $\mathscr{G}_1$, ha quindi autovalore 1 con molteplicità (algebrica e geometrica) 4 e l'autovalore $x_5 \notin \{0, 1\}$ con molteplicità (algebrica e geometrica) 1. L'autospazio relativo a 1 è H e quello relativo a x_5 è $\langle x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 + x_4w_4 + (x_5 - 1)w_5\rangle$. Se invece $\phi \in \mathscr{G}_1$, l'unico autovalore è 1, con molteplicità algebrica 5, e molteplicità geometrica 4, a meno che ϕ non sia l'identità, e quindi non è diagonalizzabile eccetto in quest'ultimo caso.

(c) Sia $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_5^*\}$ una base di V^* e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ la base di V, duale della base data. Allora si ha $\zeta = \displaystyle\sum_{i=1}^{5}(\zeta \circ v_i)v_i^*$; quindi una base del tipo cercato deve essere la base duale di una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V tutta costituita da vettori soluzione dell'equazione lineare $\zeta(v) = 1$, che ha come soluzioni dell'equazione omogenea associata l'iperpiano H; ovvero $H_1 = \{\, v \in V \mid \zeta(v) = 1 \,\} = v_0 + H$, ove v_0 è una qualsiasi soluzione dell'equazione (Thm. di Rouché-Capelli). Per costruire una base di V fatta di vettori in H_1, possiamo prendere come primo elemento un qualsiasi vettore v_1 di H_1; come secondo elemento un vettore $v_2 \neq v_1$ di H_1; come terzo elemento un vettore $v_3 \in H_1$ che non sia allineato con i primi due, ovvero $v_3 \notin \langle v_1, v_2\rangle \cap H_1$; e così via, ovvero $v_4, v_5 \in H_1$ con $v_4 \notin \langle v_1, v_2, v_3\rangle \cap H_1$ e $v_5 \notin \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle \cap H_1$. Le scelte possibili sono quindi $q^4(q^4 - 1)(q^4 - q)(q^4 - q^2)(q^4 - q^3)$. □