Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 25 novembre 2016 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 + iX^2 - (2-2i)X - 4 + 2i$ *e si verifichi che* $P(i-1) = 0$. *Nel piano di Gauss si indichi con* T *il triangolo di vertici le radici del polinomio* $P(X)$.

(a) *Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i vertici del triangolo* T *e le le equazioni delle rette (reali) che formano i suoi lati in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(b) *Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati di* T *nella circonferenza unitaria e si evidenzi la regione* $\lambda_*(T_1) \cap T_1$, *ove si indichi con* T_1 *l'insieme dei punti interni al triangolo* T *e con* λ *la riflessione nella circonferenza unitaria.*

(c) *Nel piano di Gauss, si consideri la retta (reale)* $r : (1-i)z + (1+i)\bar{z} = 2$ *e si determinino le intersezioni di* r *con l'asse reale e l'asse immaginario. Indicata con* $\sigma_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *la riflessione rispetto alla retta* r, *si scriva il numero complesso* $\sigma_r(z)$ *come funzione di* z. *Indicata con* $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nel cerchio unitario, sia* $C = \lambda^*(r)$ *e si scriva il numero complesso* $\lambda_C(z)$ *come funzione di* z, *ove* λ_C *è la riflessione nella circonferenza* C. *È vero che* $\lambda_C = \lambda \circ \sigma_r \circ \lambda$?

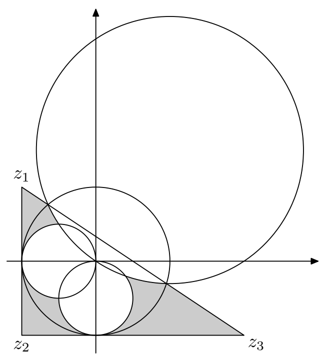
Svolgimento. Si ha $P(i-1) = (i-1)^3 + (2+i)(i-1)^2 - 4 + 2i = 0$.

(a) Si ha quindi

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + 1 - i)(X^2 - (1-2i)X - (3+i)) \\ &= (X + 1 - i)(X + 1 + i)(X - 2 + i). \end{aligned}$$

Le radici di $P(X)$ sono i numeri complessi $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 2 - i$. I lati del triangolo sono quindi le rette

$$\begin{aligned} &z_1 \vee z_2 : z + \bar{z} + 2 = 0, \\ &z_1 \vee z_3 : (2-3i)z + (2+3i)\bar{z} - 2 = 0, \\ &z_2 \vee z_3 : iz - i\bar{z} - 2 = 0, \end{aligned}$$



(b) Le immagini delle rette tramite la riflessione nel cerchio unitario sono le circonferenze

$$\begin{aligned} &\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} + \frac{z}{2} + \frac{\bar{z}}{2} = 0, \\ &\lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} - \frac{2-3i}{2}z - \frac{2+3i}{2}\bar{z} = 0, \\ &\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} - \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = 0. \end{aligned} \quad \text{ovvero} \quad \begin{aligned} &\lambda^*(z_1 \vee z_2) : \left|z + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \\ &\lambda^*(z_1 \vee z_3) : \left|z - \frac{2+3i}{2}\right| = \frac{\sqrt{13}}{2}, \\ &\lambda^*(z_2 \vee z_3) : \left|z + \frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'insieme $\lambda_*(T_1) \cap T_1$ è evidenziato in grigio nella figura.

(c) L'intersezione di r con l'asse reale (di equazione $-iz + i\bar{z} = 0$) è $w_0 = 1$; l'intersezione con l'asse immaginario è $w_1 = i$. Siano $\tau(z) = z - 1$ la traslazione che porta la retta r sulla parallela passante per l'origine, $\rho(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$ la rotazione attorno all'origine che porta la retta traslata a sovrapporsi con l'asse reale, e indichiamo con $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ il coniugio. Allora, $\sigma_r = \tau^{-1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma \circ \rho \circ \tau$, da cui si deduce, con un calcolo diretto, che $\sigma_r(z) = -i\bar{z} + 1 + i$. Dunque

$$\lambda(\sigma_r(\lambda(z))) = \frac{(1+i)\bar{z}}{2\bar{z} - (1-i)}$$

coincide con la riflessione nella circonferenza $C = \lambda^*(r)$, di centro $z_0 = \frac{1+i}{2}$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [cf. ad esempio la formula (A.2.3) del libro]. $\square$

ESERCIZIO 2. *Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ di W.*

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(v_1 - 2v_3 + v_5) = \phi(v_4 - v_2) = 2w_1 - 2w_3, \qquad \phi(-2v_3) = 4w_4 - 2w_1,$$
$$\phi(v_2 + 2v_3 + v_4) = \phi(v_5 - v_1) = 4w_2 - 2w_4.$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Sia $V' = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \;\middle|\; 2x_1 + 3x_5 = 0 = x_1 + 2x_5 \right\}$. Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus V'$ e si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$, ove $\pi : V \to V$ è la proiezione su V' parallelamente a $\ker\phi$. Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\phi \circ \psi = \phi$ esibendo per ciascuna di queste la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$.

(c) Sia $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi e $\phi : \mathbb{F}_q^5 \to \mathbb{F}_q^4$ l'applicazione lineare di matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Quante sono le applicazioni lineari $\xi : \mathbb{F}_q^4 \to \mathbb{F}_q^4$ tali che $\xi \circ \phi = \phi$?

Svolgimento. (a) I vettori

$$v_1' = v_1 - 2v_3 + v_5, \quad v_2' = v_2 + 2v_3 + v_4, \quad v_3' = -2v_3, \quad v_4' = v_4 - v_2, \quad v_5' = v_5 - v_1,$$

sono una base $\mathcal{V}'$ di V (verificarlo!), quindi esiste un'unica applicazione lineare $\phi : V \to W$ che soddisfi alle condizioni richieste; e si ha

$$\operatorname{im}\phi = \langle w_1 - w_3, 2w_4 - w_1, 2w_2 - w_4 \rangle = \left\{ \sum_{i=0}^{4} y_i w_i \;\middle|\; 4y_1 + y_2 + 4y_3 + 2y_4 = 0 \right\},$$

$$\ker\phi = \langle v_1' - v_4',\, v_2' - v_5' \rangle = \langle v_1 + v_2,\, 2v_3 + v_4 - v_5 \rangle, \quad \text{di equazioni} \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

(b) Si verifica con un facile calcolo che $\ker\phi \cap V' = \langle 0 \rangle$ (farlo!) e, per motivi di dimensione, si tratta di sottospazi complementari. La proiezione $\pi : V \to V$ su V' parallelamente a $\ker\phi$, ha quindi matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $v \in V$, si ha $v = v' + n$ con $v' = \pi(v) \in V'$ e $n \in \ker\phi$; dunque, $\phi(v) = \phi(v') = \phi(\pi(v))$. Per cui $\phi \circ \pi = \phi$; inoltre, se $\phi \circ \psi = \phi = \phi \circ \pi$, si ha necessariamente $\phi \circ (\psi - \pi) = 0$ e quindi $\operatorname{im}(\psi - \pi) \subseteq \ker\phi$; per cui $\psi = \pi + \eta$ al variare di $\eta \in \mathscr{A} = \{\, f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, V) \mid \operatorname{im} f \subseteq \ker\phi \,\} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V, \ker\phi)$. Passando alle matrici, dobbiamo quindi sommare alla matrice A tutte le matrici del sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&2&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&2 \\ 0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Qualunque sia il campo $\mathbb{F}_q$, B ha rango 2 e quindi $\operatorname{im}\phi$ è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{F}_q^4$. Fissato un complementare W' di $\operatorname{im}\phi$ ($\mathbb{F}_q^4 = W' \oplus \operatorname{im}\phi$), le applicazioni cercate differiscono dalla proiezione $\pi' : \mathbb{F}_q^4 \to \mathbb{F}_q^4$ su $\operatorname{im}\phi$ parallelamente a W' per un endomorfismo di $\mathbb{F}_q^4$ che si annulla su $\operatorname{im}\phi$. Il sottospazio di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q^4, \mathbb{F}_q^4)$ formato dagli omomorfismi che si annullano su $\operatorname{im}\phi$ è isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_q}(W', \mathbb{F}_q^4)$ e quindi ha dimensione 8, per cui ci sono q^8 omomorfismi del tipo cercato. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 novembre 2016 – Compito **B**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - iX^2 - (2-2i)X + 4 - 2i$ e si verifichi che $P(i+1) = 0$. Nel piano di Gauss si indichi con T il triangolo di vertici le radici del polinomio $P(X)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i vertici del triangolo T e le le equazioni delle rette (reali) che formano i suoi lati in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati di T nella circonferenza unitaria e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_2) \cap T_2$, ove si indichi con T_2 l'insieme dei punti esterni al triangolo T e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

(c) Nel piano di Gauss, si consideri la retta (reale) $r : (1+i)z + (1-i)\bar{z} = 2$ e si determinino le intersezioni di r con l'asse reale e l'asse immaginario. Indicata con $\sigma_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la riflessione rispetto alla retta r, si scriva il numero complesso $\sigma_r(z)$ come funzione di z. Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nel cerchio unitario, sia $C = \lambda^*(r)$ e si scriva il numero complesso $\lambda_C(z)$ come funzione di z, ove λ_C è la riflessione nella circonferenza C. È vero che $\lambda_C = \lambda \circ \sigma_r \circ \lambda$?

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(v_1 + v_2 - 2v_3) = \phi(v_5 - v_4) = 2w_2 - 2w_4, \qquad \phi(-2v_3) = 4w_1 - 2w_2,$$
$$\phi(2v_3 + v_4 + v_5) = \phi(v_1 - v_2) = 4w_3 - 2w_1.$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Sia $V' = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \,\middle|\, 2x_1 + 3x_2 = 0 = x_1 + 2x_2 \right\}$. Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus V'$ e si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$, ove $\pi : V \to V$ è la proiezione su V' parallelamente a $\ker\phi$. Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\phi \circ \psi = \phi$ esibendo per ciascuna di queste la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$.

(c) Sia $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi e $\phi : \mathbb{F}_q^4 \to \mathbb{F}_q^5$ l'applicazione lineare di matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Quante sono le applicazioni lineari $\xi : \mathbb{F}_q^5 \to \mathbb{F}_q^5$ tali che $\xi \circ \phi = \phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 novembre 2016 – Compito **C**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 + iX^2 - (2+2i)X + 4 + 2i$ e si verifichi che $P(1+i) = 0$. Nel piano di Gauss si indichi con T il triangolo di vertici le radici del polinomio $P(X)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i vertici del triangolo T e le le equazioni delle rette (reali) che formano i suoi lati in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati di T nella circonferenza unitaria e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_2) \cap T_1$, ove si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo T, con T_2 l'insieme dei punti esterni al triangolo T e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

(c) Nel piano di Gauss, si consideri la retta (reale) $r : (1-i)z + (1+i)\bar{z} = -2$ e si determinino le intersezioni di r con l'asse reale e l'asse immaginario. Indicata con $\sigma_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la riflessione rispetto alla retta r, si scriva il numero complesso $\sigma_r(z)$ come funzione di z. Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nel cerchio unitario, sia $C = \lambda^*(r)$ e si scriva il numero complesso $\lambda_C(z)$ come funzione di z, ove λ_C è la riflessione nella circonferenza C. È vero che $\lambda_C = \lambda \circ \sigma_r \circ \lambda$?

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi: V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(v_2 - 2v_3 + v_4) = \phi(v_1 - v_5) = -2w_1 + 2w_3, \qquad \phi(-2v_3) = 4w_2 - 2w_3,$$
$$\phi(v_1 + 2v_3 + v_5) = \phi(v_2 - v_4) = -2w_2 + 4w_4.$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Sia $V' = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \;\middle|\; 2x_2 + 3x_4 = 0 = x_2 + 2x_4 \right\}$. Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus V'$ e si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$, ove $\pi : V \to V$ è la proiezione su V' parallelamente a $\ker\phi$. Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\phi \circ \psi = \phi$ esibendo per ciascuna di queste la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$.

(c) Sia $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi e $\phi : \mathbb{F}_q^4 \to \mathbb{F}_q^5$ l'applicazione lineare di matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Quante sono le applicazioni lineari $\xi : \mathbb{F}_q^5 \to \mathbb{F}_q^5$ tali che $\xi \circ \phi = \phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 25 novembre 2016 – Compito **D**

ESERCIZIO 1. Si consideri il polinomio $P(X) = X^3 - X^2 + (2+2i)X + 2 - 4i$ e si verifichi che $P(i-1) = 0$. Nel piano di Gauss si indichi con T il triangolo di vertici le radici del polinomio $P(X)$.

(a) Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i vertici del triangolo T e le le equazioni delle rette (reali) che formano i suoi lati in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Si determinino centri e raggi delle circonferenze (generalizzate) che si ottengono riflettendo i lati di T nella circonferenza unitaria e si evidenzi la regione $\lambda_*(T_1) \cap T_2$, ove si indichi con T_1 l'insieme dei punti interni al triangolo T, con T_2 l'insieme dei punti esterni al triangolo T, e con λ la riflessione nella circonferenza unitaria.

(c) Nel piano di Gauss, si consideri la retta (reale) $r : (1+i)z + (1-i)\bar{z} = -2$ e si determinino le intersezioni di r con l'asse reale e l'asse immaginario. Indicata con $\sigma_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la riflessione rispetto alla retta r, si scriva il numero complesso $\sigma_r(z)$ come funzione di z. Indicata con $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nel cerchio unitario, sia $C = \lambda^*(r)$ e si scriva il numero complesso $\lambda_C(z)$ come funzione di z, ove λ_C è la riflessione nella circonferenza C. È vero che $\lambda_C = \lambda \circ \sigma_r \circ \lambda$?

ESERCIZIO 2. Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali e siano fissate le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ di V, e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$ di W.

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi\colon V \to W$ che soddisfano alle seguenti condizioni

$$\phi(2v_3 - v_4 - v_5) = \phi(v_1 - v_2) = 2w_2 - 2w_4, \qquad \phi(-2v_3) = 4w_3 - 2w_4,$$
$$\phi(v_1 + v_2 + 2v_3) = \phi(v_4 - v_5) = 4w_1 - 2w_3.$$

Si determinino delle basi e sistemi di equazioni cartesiane per nucleo e immagine di tali applicazioni.

(b) Sia $V' = \left\{ \sum_{i=1}^{5} x_i v_i \;\middle|\; 2x_4 + 3x_5 = 0 = x_4 + 2x_5 \right\}$. Si verifichi che $V = \ker\phi \oplus V'$ e si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$, ove $\pi : V \to V$ è la proiezione su V' parallelamente a $\ker\phi$. Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\phi \circ \psi = \phi$ esibendo per ciascuna di queste la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$.

(c) Sia $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi e $\phi : \mathbb{F}_q^5 \to \mathbb{F}_q^4$ l'applicazione lineare di matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in base canonica. Quante sono le applicazioni lineari $\xi : \mathbb{F}_q^4 \to \mathbb{F}_q^4$ tali che $\xi \circ \phi = \phi$?

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 20 gennaio 2017

ESERCIZIO 1. *Per ogni intero $n \geq 2$ si consideri la matrice*

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} j\left(\varepsilon(j,j) + \varepsilon(n+1-j,j) + (\lfloor \tfrac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor)\varepsilon(\lfloor \tfrac{n+1}{2} \rfloor, j)\right) - \sum_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} 2j\varepsilon(n+1-j,j),$$

ove $\{\, \varepsilon(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq n \}$ è la base canonica di $M_n(\mathbb{R})$ e $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera del numero reale x, ovvero l'unico intero tale che $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
(a) Si scrivano le matrici X_2, X_3, X_4, X_5 e se ne calcolino i determinanti.
(b) Si scriva il determinante di X_n come funzione di n.
(c) Si calcoli il polinomio caratteristico di X_n e si dica se la matrice è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

Svolgimento. (a) Si ha

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Dunque, $d_2 = \det X_2 = 4$, $d_3 = \det X_3 = 12$, $d_4 = \det X_4 = 96$, $d_5 = \det X_5 = 480$. I determinanti si ottengono con un calcolo diretto. Ad esempio, nel caso di X_5, possiamo osservare che, con operazioni elementari sulle righe di determinante 1, la matrice assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ III-I-II \\ IV+II \\ V+I \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Per $n \geq 6$, le matrici X_n hanno forma analoga. Per n pari, sottraendo alla riga $n+1-j$ la riga di posto j, per $j = 1, \dots, n/2$ (operazioni elementari con determinante 1), si arriva analogamente a una forma triangolare, ove sulla diagonale principale ci sono i numeri reali $1, 2, \dots, n/2, n+2, n+4, \dots, 2n$. Dunque il determinante è uguale a $\det X_n = n!2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, per n pari.

Per n dispari, per portare X_n a forma triangolare, si possono fare le stesse operazioni elementari, ovvero sottrarre alla riga $n+1-j$ la riga di posto j, per $j = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, e poi sottrarre alla riga centrale (di posto $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$) tutte le righe soprastanti. In questa forma triangolare, sulla diagonale principale ci sono i numeri reali $1, 2, \dots, \lfloor (n+1)/2 \rfloor, n+3, n+5, \dots, 2n$. Anche in questo caso il determinante è uguale a $\det X_n = n!2^{\lfloor n/2 \rfloor}$, che è quindi la formula generale per il determinante di X_n, per ogni $n \geq 2$.

(*c*) Operando gli stessi scambi sulle righe e sulle colonne, ovvero portando l'ultima riga (e l'ultima colonna) al secondo posto; la penultima riga (e la penultima colonna) al quarto posto, e così via, possiamo ridurre la matrice a una forma a blocchi diagonali di ordine 2 per n pari. Analogamente, per n dispari si ottengono i blocchi diagonali di ordine 2, più un'ultima riga contenente una permutazione della riga centrale, che ha l'elemento $\frac{n+1}{2}$ all'ultimo posto. Ovvero

$$\begin{pmatrix} 1 & n & & & & & \\ -1 & n & & & & & \\ & & 2 & n-1 & & & \\ & & -2 & n-1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{n}{2} & \frac{n+2}{2} \\ & & & & & -\frac{n}{2} & \frac{n+2}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & n & & & & & & \\ -1 & n & & & & & & \\ & & 2 & n-1 & & & & \\ & & -2 & n-1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} & \\ & & & & & -\frac{n-1}{2} & \frac{n+3}{2} & \\ 1 & n & 2 & n-1 & \dots & & & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}$$

n pari $\qquad\qquad$ n dispari

Queste matrici sono simili alla matrice originaria, quindi il polinomio caratteristico è

$$\prod_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\big(X^2-(n+1)X+2j(n+1-j)\big) \text{ per } n \text{ pari}$$

$$(X-\tfrac{n+1}{2})\prod_{j=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\big(X^2-(n+1)X+2j(n+1-j)\big) \text{ per } n \text{ dispari.}$$

Per $n\geq 3$ alcuni fattori quadratici non hanno radici reali e quindi la matrice non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V}=\{v_1,\dots,v_5\}$ una sua base. Si consideri l'endomorfismo $\phi:V\to V$ di matrice*

$$A=\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)=\begin{pmatrix}-3&5&0&3&0\\0&2&0&0&0\\-1&1&-1&-2&3\\-4&4&0&5&0\\3&-3&-2&1&4\end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per l'endomorfismo ϕ. Si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D=P^{-1}AP$.*

(b) *Sia W l'autospazio di ϕ di dimensione massima e si indichi con $\pi:V\to V$ la proiezione su W parallelamente alla somma degli altri autospazi. Si determini, se esiste una base $\mathcal{W}=\{w_1,\dots,w_5\}$ di V tale che $\pi=w_1\otimes w_1^*+\cdots+w_r\otimes w_r^*$, ove $r=\dim W$ e $\mathcal{W}^*=\{w_1^*,\dots,w_5^*\}$ è la base di V^* duale della base $\mathcal{W}$.*

(c) *Sia $\Phi:Hom_{\mathbb{R}}(V,V)\to Hom_{\mathbb{R}}(V,V)$ l'applicazione lineare definita ponendo $\Phi(\xi)=3\xi-\xi\circ\pi-\pi\circ\xi$, ove π è la proiezione del punto precedente. Si determinino, polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per l'applicazione Φ e si dica se è diagonalizzabile.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X)=(X+1)(X-1)(X-2)^2(X-3)$ e si ha

$$A+\mathbf{1}=\begin{pmatrix}-2&5&0&3&0\\0&3&0&0&0\\-1&1&0&-2&3\\-4&4&0&6&0\\3&-3&-2&1&5\end{pmatrix},\qquad A-\mathbf{1}=\begin{pmatrix}-4&5&0&3&0\\0&1&0&0&0\\-1&1&-2&-2&3\\-4&4&0&4&0\\3&-3&-2&1&3\end{pmatrix}$$

$$A-2\mathbf{1}=\begin{pmatrix}-5&5&0&3&0\\0&0&0&0&0\\-1&1&-3&-2&3\\-4&4&0&3&0\\3&-3&-2&1&2\end{pmatrix},\qquad A-3\mathbf{1}=\begin{pmatrix}-6&5&0&3&0\\0&-1&0&0&0\\-1&1&-4&-2&3\\-4&4&0&2&0\\3&-3&-2&1&1\end{pmatrix}.$$

Per ogni autovalore molteplicità geometrica e algebrica coincidono e gli autospazi sono

$$\ker(\phi+\mathrm{id}_V)=\langle 9v_1+34v_3+6v_4+7v_5\rangle,\qquad \ker(\phi-\mathrm{id}_V)=\langle 3v_3+2v_5\rangle,$$
$$\ker(\phi-3\mathrm{id}_V)=\langle v_1+10v_3+2v_4+15v_5\rangle,\qquad \ker(\phi-2\mathrm{id}_V)=\langle v_1+v_2,v_3+v_5\rangle.$$

Dunque ϕ è diagonalizzabile e le matrici cercate sono

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&2&0\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}\quad\text{e}\quad P=\begin{pmatrix}9&0&1&0&1\\0&0&0&0&1\\34&3&10&1&0\\6&0&2&0&0\\7&2&15&1&0\end{pmatrix}.$$

(*b*) Consideriamo la base di autovettori $\mathcal{W}=\{w_1,\dots,w_5\}$, tale che $P=\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$. Si ha $W=\langle w_4,w_5\rangle$, quindi in questa base si ha $\pi=w_4\otimes w_4^*+w_5\otimes w_5^*$, ove $\mathcal{W}^*=\{w_1^*,\dots,w_5^*\}$ è la base duale della base $\mathcal{W}$.

(*c*) Siano $U=\ker(\phi+\mathrm{id}_V)\oplus\ker(\phi-\mathrm{id}_V)\oplus\ker(\phi-3\mathrm{id}_V)$ e $W=\ker(\phi-2\mathrm{id}_V)$. Si ha $V=U\oplus W$ e, nella base $\mathcal{W}$, si ha $U=\langle w_1,w_2,w_3\rangle$ e $W=\langle w_4,w_5\rangle$. Possiamo quindi scrivere a blocchi le matrici degli elementi di

$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ relativamente a questa decomposizione; in particolare la matrice di π è $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\pi) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{smallmatrix}\right)$. Dato $\xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$, possiamo scriverne analogamente la matrice a blocchi, ovvero $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\xi) = X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ e si ha

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\Phi(\xi)) = 3\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A & 3B \\ 3C & 3D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3A & 2B \\ 2C & D \end{pmatrix}.$$

Dunque Φ ha seguenti spazi di autovettori

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \{\, \xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid W \subseteq \ker\xi,\ \operatorname{im}\xi \subseteq U \,\} && \text{autovettori relativi all'autovalore 3} \\ \mathscr{B} &= \{\, \xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid \xi(U) \subseteq W,\ \xi(W) \subseteq U \,\} && \text{autovettori relativi all'autovalore 2} \\ \mathscr{D} &= \{\, \xi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) \mid U \subseteq \ker\xi,\ \operatorname{im}\xi \subseteq W \,\} && \text{autovettori relativi all'autovalore 1} \end{aligned}$$

e si ha $\dim \mathscr{A} = 9$, $\dim \mathscr{B} = 12$, $\dim \mathscr{D} = 4$, per cui la somma delle dimensioni è uguale a $\dim \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V) = 25$. Gli spazi indicati sono quindi gli autospazi e Φ è perciò diagonalizzabile. Infine, il polinomio caratteristico è $p_\Phi(X) = (X-1)^4(X-2)^{12}(X-3)^9$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 27 gennaio 2017

ESERCIZIO 1. *Si consideri il polinomio* $P(X) = X^3 - (2+3i)X^2 - (1-4i)X + (2-i) \in \mathbb{C}[X]$ *e si verifichi che* $P(1) = 0$.

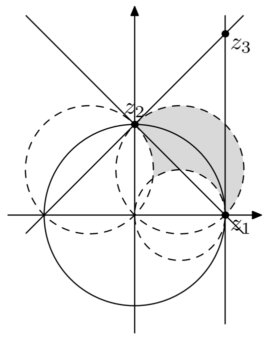
(a) *Si determinino le radici del polinomio* $P(X)$ *e si disegni nel piano di Gauss il triangolo* T *che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del triangolo* T*, in termini delle coordinate* z *e* $\bar{z}$.

(b) *Sia* $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ *la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando il riflesso* $\lambda^*(I)$ *della regione di piano,* I*, interna al triangolo* T*. È vero che i punti di* $I \cap \lambda^*(I)$ *sono punti uniti per la riflessione* λ*?*

Svolgimento. (a) Si ha $P(X) = (X-1)(X-i)(X-1-2i)$ e i tre vertici del triangolo T sono i punti $z_1 = 1$, $z_2 = i$ e $z_3 = 1+2i$. Le tre rette cercate sono quindi $z_1 \vee z_2 : (1-i)z + (1+i)\bar{z} - 2 = 0$, $z_1 \vee z_3 : z + \bar{z} - 2 = 0$, $z_2 \vee z_3 : (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 2 = 0$.

(b) Sia $\lambda(z) = 1/\bar{z}$, per $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria. Le circonferenze riflesse sono

$$\begin{aligned}
\lambda^*(z_1 \vee z_2) &: z\bar{z} - \frac{1-i}{2}z - \frac{1+i}{2}\bar{z} = 0, \\
\lambda^*(z_1 \vee z_3) &: z\bar{z} - \frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2} = 0, \\
\lambda^*(z_2 \vee z_3) &: z\bar{z} + \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z} = 0.
\end{aligned}$$



Nelle equazioni precedenti, il centro della circonferenza è l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ e il raggio corrispondente è il suo modulo. Il riflesso della regione esterna al triangolo è l'unione dei punti interni alle tre circonferenze riflesse. Si ottiene quindi il disegno a lato.

I punti uniti nella riflessione λ sono tutti e soli i punti della circonferenza unitaria ($z = 1/\bar{z}$ se, e solo se, $z\bar{z} = 1$), mentre l'insieme $I \cap \lambda^*(I)$ contiene molti punti che non appartengono a tale circonferenza, come si vede dal disegno sopra. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{Q}$ *e sia* $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ *una sua base. Sia* $\phi : V \to V$ *un endomorfismo tale che*

$$\phi(v_1 - 3v_3) = 3v_2 - 2v_4 = \tfrac{1}{2}\phi(3v_2 - 2v_4), \quad \phi(2v_3 - v_5) = v_2 - v_4 = \phi(v_4 - v_2), \quad \phi(v_1 - v_5) = v_5 - v_1.$$

(a) *Si determinino dimensione e una base per i sottospazi* $\ker\phi$ *e* $\operatorname{im}\phi$*. Si mostri che* ϕ *è diagonalizzabile e si determini una base di autovettori* $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ *di* V*, scrivendo le coordinate dei suoi elementi nella base* $\mathcal{V}$.

(b) *Si determinino le coordinate, nella base duale* $\mathcal{V}^*$ *della base* $\mathcal{V}$*, degli elementi della base duale* $\mathcal{W}^*$ *della base* $\mathcal{W}$*. È vero che gli elementi di* $\mathcal{W}^*$ *sono autovettori per l'endomorfismo* $\phi^* : V^* \to V^*$*? Che relazioni ci sono tra gli ortogonali degli autospazi di* ϕ^* *e gli autospazi di* ϕ*?*

Svolgimento. (a) Dalle condizioni date si ricava che, per un tale endomorfismo, deve aversi

$$\ker(\phi - 2\mathrm{id}_V) = \langle 3v_2 - 2v_4 \rangle, \qquad \ker(\phi + \mathrm{id}_V) = \langle v_2 - v_4,\, v_1 - v_5 \rangle,$$
$$\ker\phi = \langle 2v_1 - 3v_2 - 6v_3 - 2v_4,\, v_2 + 2v_3 - v_4 - v_5 \rangle.$$

Poiché i vettori

$$w_1 = 3v_2 - 2v_4, \quad w_2 = v_2 - v_4, \quad w_3 = v_1 - v_5, \quad w_4 = 2v_1 - 3v_2 - 6v_3 - 2v_4, \quad w_5 = v_2 + 2v_3 - v_4 - v_5,$$

sono una base di V, essendo linearmente indipendenti, si conclude che esiste un unico endomorfismo ϕ determinato dalle condizioni precedenti e che la base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ è una base di autovettori per ϕ.

(b) Per quanto visto al punto precedente, si ha

$$P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e dunque} \qquad {}^tP^{-1} = \alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{V}^*}(\mathrm{id}_{V^*}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per ogni elemento $\zeta \in V^*$, si ha $\zeta = \sum_{j=1}^5 (\zeta \circ w_j) w_j^*$, perché le basi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{W}^*$ sono basi duali. Si ha quindi per ogni vettore w_i^* della base $\mathcal{W}^*$

$$\phi^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^5 (\phi^*(w_i^*) \circ w_j) w_j^* = c_i w_i^*,$$

ove c_i è l'autovalore di ϕ relativo all'autovettore w_i. Infatti, qualunque siano i e j, si ha

$$\phi^*(w_i^*) \circ w_j = w_i^* \circ \phi(w_j) = c_j (w_i^* \circ w_j) = c_j \delta_{ij} \qquad \text{[simbolo di Kronecker]}.$$

Si ha quindi

$$\begin{gathered} \ker(\phi - 2\mathrm{id}_V) = \langle w_1 \rangle, \quad \ker(\phi + \mathrm{id}_V) = \langle w_2, w_3 \rangle, \quad \ker\phi = \langle w_4, w_5 \rangle; \\ \ker(\phi^* - 2\mathrm{id}_{V^*}) = \langle w_1^* \rangle, \quad \ker(\phi^* + \mathrm{id}_{V^*}) = \langle w_2^*, w_3^* \rangle, \quad \ker\phi^* = \langle w_4^*, w_5^* \rangle, \end{gathered}$$

da cui si conclude che si ha

$$\ker(\phi^* - 2\mathrm{id}_{V^*}) = \langle w_1^* \rangle = \langle w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle^\perp = \ker(\phi + \mathrm{id}_V)^\perp \cap \ker\phi^\perp;$$

e le analoghe relazioni per gli altri autospazi. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascuno degli autospazi; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.

(b) È vero che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\,\phi$? In caso contrario si determinino equazioni cartesiane per $\mathrm{im}\,\phi$, $\mathrm{im}\,\phi^2$, $\mathrm{im}\,\phi^3$, $\mathrm{im}\,\phi^4$, etc., e si dica se esiste, un esponente k tale che $V = \ker\phi^k \oplus \mathrm{im}\,\phi^k$.

(c) Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{Q}$, $\phi : V \to V$ un endomorfismo e k un intero positivo. Si dimostri che se $\mathrm{im}\,\phi^k \cap \ker\phi = \langle 0 \rangle$, allora

$$\mathrm{im}\,\phi^k = \mathrm{im}\,\phi^{k+1} = \mathrm{im}\,\phi^{k+2} = \cdots \qquad \text{e} \qquad \ker\phi^k = \ker\phi^{k+1} = \ker\phi^{k+2} = \cdots.$$

Si deduca da ciò che $\mathrm{im}\,\phi^k \cap \ker\phi^k = \langle 0 \rangle$ e quindi che $V = \ker\phi^k \oplus \mathrm{im}\,\phi^k$.

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X-1)(X-2)X^3$, e le matrici

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A - \mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

hanno tutte e tre rango 4, per cui gli autospazi sono

$$W_0 = \ker\phi = \langle v_3 - 2v_5 \rangle\,, \quad W_1 = \ker(\phi - \mathrm{id}) = \langle v_2 - v_3 + v_4 \rangle\,, \qquad W_2 = \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle 2v_1 + v_2 \rangle\,.$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi ϕ non è diagonalizzabile, perché il sottospazio di V generato dagli autovettori, $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ ha solamente dimensione 3.

(b) $\dim \mathrm{im}\,\phi = \mathrm{rk}\,\phi = 4$ e un'equazione cartesiana per $\mathrm{im}\,\phi$ nella base data è $x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$, da cui si deduce che $\ker\phi \cap \mathrm{im}\,\phi = \langle v_3 - 2v_5 \rangle$, per cui non è vero che $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\,\phi$. Inoltre,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque A^2 ha rango 3 e $\ker\phi^2 = \langle v_1 + v_5, v_3 - 2v_5 \rangle$ (infatti $\phi(v_1 + v_5) = v_3 - 2v_5$). Per dare delle equazioni cartesiane di $\mathrm{im}\,\phi^2$, basta prendere il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$.

Osserviamo che $\phi^2(v_5) = v_3 - 2v_5$, per cui $\langle v_3 - 2v_5 \rangle \subseteq \ker\phi^2 \cap \mathrm{im}\,\phi^2$, e quindi non può essere $V = \ker\phi^2 \oplus \mathrm{im}\,\phi^2$. Infine, si ha

$$\langle v_5, v_1 + v_5, v_3 - 2v_5 \rangle = \ker\phi^3 \qquad \text{e} \qquad \langle v_2 - v_3 + v_4,\, 2v_1 + v_2 \rangle = W_1 \oplus W_2 = \mathrm{im}\,\phi^3.$$

Quindi delle equazioni cartesiane per $\mathrm{im}\,\phi^3$ costituiscono il sistema $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Inoltre, $W_1 \oplus W_2 \subseteq \mathrm{im}\,\phi^n$ per ogni intero positivo n, e quindi si ha che $W_1 \oplus W_2 = \mathrm{im}\,\phi^n$ per ogni $n \geq 3$ e le equazioni sono quelle scritte. Da ciò si ottiene che $\mathrm{im}\,\phi^3 \cap \ker\phi^3 = \langle 0 \rangle$ e quindi $V = \ker\phi^3 \oplus \mathrm{im}\,\phi^3$. Infine, da quanto visto discende anche che $\ker\phi^k = \ker\phi^3$ per ogni $k \geq 3$ e quindi $V = \ker\phi^k \oplus \mathrm{im}\,\phi^k$ per ogni $k \geq 3$.

(c) Per ogni endomorfismo e ogni intero positivo k si hanno le inclusioni

$$\mathrm{im}\,\phi^{k+1} \subseteq \mathrm{im}\,\phi^k \qquad \text{e} \qquad \ker\phi^k \subseteq \ker\phi^{k+1}.$$

Supponiamo quindi che $\mathrm{im}\,\phi^k \cap \ker\phi = \langle 0 \rangle$ per un fissato intero k e dimostriamo che valgono le inclusioni opposte. Sia $x \in \ker\phi^{k+1}$ e consideriamo il vettore $v = \phi^k(x)$, che appartiene a $\mathrm{im}\,\phi^k \cap \ker\phi$ ed è quindi uguale a 0, per cui $x \in \ker\phi^k$. Dalla formula delle dimensioni si deduce che

$$\dim \mathrm{im}\,\phi^k = \dim V - \dim\ker\phi^k = \dim V - \dim\ker\phi^{k+1} = \dim \mathrm{im}\,\phi^{k+1},$$

e quindi anche le immagini sono uguali. Essendo $\mathrm{im}\,\phi^{k+1} = \mathrm{im}\,\phi^k$, si ha anche $\mathrm{im}\,\phi^{k+1} \cap \ker\phi = \langle 0 \rangle$ da cui si deduce analogamente che $\mathrm{im}\,\phi^{k+1} = \mathrm{im}\,\phi^{k+2}$ e $\ker\phi^{k+1} = \ker\phi^{k+2}$; e così via per gli interi successivi.

Infine, se $x \in \ker\phi^k \cap \mathrm{im}\,\phi^k$, si ha che $x = \phi^k(v)$, per un opportuno vettore v e $0 = \phi^k(x) = \phi^{2k}(v)$, per cui $v \in \ker\phi^{2k} = \ker\phi^k$, per quanto visto sopra; per cui $x = \phi^k(v) = 0$, ovvero $\ker\phi^k \cap \mathrm{im}\,\phi^k = \langle 0 \rangle$. Per la formula delle dimensioni, si conclude che $V = \ker\phi^k \oplus \mathrm{im}\,\phi^k$. $\square$

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 13 febbraio 2017

ESERCIZIO 1. *Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X) = 4X^3 + (8-4i)X^2 - (17+8i)X - 34$ dopo aver verificato che $X+2$ divide $P(X)$.*

(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del poligono T, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando l'insieme $\lambda^*(T^{in}) \smallsetminus T^{in}$, ove T^{in} è l'insieme dei punti interni a T. Ci sono punti della circonferenza unitaria in $\lambda^*(T^{in}) \smallsetminus T^{in}$?

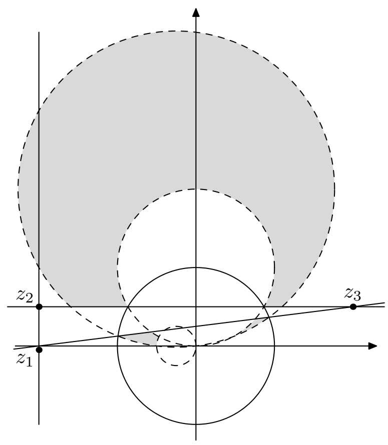
Svolgimento. (a) $P(X) = (X+2)(4X^2 - 4iX - 17) = 4(X+2)(X+2-\frac{i}{2})(X-2-\frac{i}{2})$. Le radici di $P(X)$ sono quindi $z_1 = -2$, $z_2 = -2+\frac{i}{2}$, $z_3 = 2+\frac{i}{2}$. Le rette cercate sono

$$z_1 \vee z_2 : z + \bar{z} + 4 = 0, \qquad z_2 \vee z_3 : iz - i\bar{z} + 1 = 0, \qquad z_1 \vee z_3 : (1+8i)z + (1-8i)\bar{z} + 4 = 0.$$

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono quindi

$$\begin{aligned}
&\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} + \frac{z}{4} + \frac{\bar{z}}{4} = 0,\\
&\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} + iz - i\bar{z} = 0,\\
&\lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} + \frac{1+8i}{4}z + \frac{1-8i}{4}\bar{z} = 0,
\end{aligned}$$

ove i centri sono l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ nella corrispondente equazione e il raggio è il valore assoluto complesso di tale coefficiente. Nel disegno le circonferenze compaiono con linee tratteggiate. Infine, la regione $\lambda^*(T^{in}) \smallsetminus T^{in}$ è evidenziata in grigio nel disegno e non può contenere punti della circonferenza unitaria.



□

ESERCIZIO 2. *Dato lo spazio vettoriale complesso $V = \mathbb{C}^n$, indichiamo con $\mathcal{E}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ la sua base canonica, con $V_\mathbb{R}$ lo stesso $\mathbb{C}^n$, pensato come spazio vettoriale reale, e con $\mathcal{I}_n$ la base $\mathcal{I}_n = \{e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n\}$ di $V_\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$.*

(a) Sia $V = \mathbb{C}^4$. Si determini, se esiste, un'applicazione lineare complessa $\zeta : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ tale che

$$\langle e_1 + 3ie_3, ie_1 - 2ie_2 - 3e_3 + 4ie_4 \rangle \subseteq \ker\zeta \qquad \text{e} \qquad \zeta(e_2) = 2+4i = \zeta(2ie_3).$$

Se ne scriva la matrice nelle basi canoniche di $\mathbb{C}^4$ e $\mathbb{C}$.

(b) Sia $\eta : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione $v \mapsto \Re(\zeta(v))$. Si verifichi che si tratta di un'applicazione lineare reale e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{I}_4,\{1\}}(\eta)$.

(c) Dato l'omomorfismo reale $\eta_0 : V_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definito da $\eta_0\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_4 \end{pmatrix} = \Re(z_1 - z_2 + z_3 - z_4) - \Im(z_1 - z_2 + z_3 - z_4)$, esiste un'applicazione lineare complessa $\zeta_0 : V \to \mathbb{C}$ tale che $\eta_0(v) = \Re\zeta_0(v)$ per ogni $v \in V$? Una tale ζ_0 è unica?

(d) Sia ora $V = \mathbb{C}^n$ e si consideri l'omomorfismo $\Theta : Hom_\mathbb{C}(V, \mathbb{C}) \to Hom_\mathbb{R}(V_\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che manda ζ in $\Re\zeta$. Si determinino nucleo e immagine di Θ. Si risponda alle stesse domande con lo spazio $Hom_\mathbb{R}(V_\mathbb{R}, \mathbb{C})$ in luogo di $Hom_\mathbb{C}(V, \mathbb{C})$.

Svolgimento. (a) Sia $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_4^*\}$ la base duale di $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, allora $\zeta = a_1 e_1^* + \dots + a_4 e_4^*$ ove i numeri complessi $a_1, \dots, a_4$ devono soddisfare alle condizioni

$$\begin{cases} a_1 + 3ia_3 = 0 \\ a_2 - 2a_4 = 0 \\ a_2 - 2ia_3 = 0 \\ a_2 = 2 + 4i \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema lineare si ottiene $\zeta = (1+2i)(-3e_1^* + 2e_2^* - ie_3^* + e_4^*)$, di matrice

$$\alpha_{\mathcal{E}_4, \mathcal{E}_1}(\zeta) = (1+2i)\begin{pmatrix} -3 & 2 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare su V è naturalmente $\mathbb{R}$-lineare e l'applicazione $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$-lineare; quindi η è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare in quanto composizione di applicazioni $\mathbb{R}$-lineari. La matrice possiamo calcolarla usando la definizione stessa di matrice associata ad un'applicazione lineare e si ha

$$\alpha_{\mathcal{I}_4, \{1\}}(\eta) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 & 1 & 6 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Sia $\zeta_0 : V \to \mathbb{C}$ un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare; per ogni vettore $v \in V$, si ha $\zeta_0(v) = \Re\zeta_0(v) + i\Im\zeta_0(v)$. Poiché ζ_0 è $\mathbb{C}$-lineare, si ha

$$\Re\zeta_0(iv) + i\Im\zeta_0(iv) = \zeta_0(iv) = i\zeta_0(v) = i(\Re\zeta_0(v) + i\Im\zeta_0(v)) = -\Im\zeta_0(v) + i\Re\zeta_0(v),$$

e quindi $\Im\zeta_0(v) = -\Re\zeta_0(iv)$.

Dunque, un'applicazione $\zeta_0 : V \to \mathbb{C}$ tale che $\eta_0(v) = \Re\zeta_0(v)$ è definita ponendo $\zeta_0(v) = \eta_0(v) - i\eta_0(iv)$ per ogni $v \in V$; ed è $\mathbb{C}$-lineare perché è $\mathbb{R}$-lineare e

$$\zeta_0(iv) = \eta_0(iv) + i\eta_0(v) = i(\eta_0(v) - i\eta_0(iv)) = i\zeta_0(v).$$

Una tale applicazione è unica perché, se ne esistesse un'altra, ζ_1, si avrebbe, per ogni $v \in V$, $\Re(\zeta_0(v) - \zeta_1(v)) = 0$; e, essendo applicazioni $\mathbb{C}$-lineari, si avrebbe analogamente $\Im(\zeta_0(v) - \zeta_1(v)) = -\Re(\zeta_0(iv) - \zeta_1(iv)) = 0$; dunque $\zeta_0(v) - \zeta_1(v) = 0$ per ogni $v \in V$.

(d) Le considerazioni fatte nel punto precedente si applicano anche al caso generale e perciò $\Theta : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare iniettiva. Poiché i due spazi hanno entrambi dimensione $2n$ su $\mathbb{R}$, si conclude che si tratta di un isomorfismo e quindi $\ker\Theta = \langle 0 \rangle$ e $\operatorname{im}\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$. Lo spazio $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{C})$ ha dimensione $4n$ e contiene $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$; dunque l'analoga applicazione è suriettiva e ha un nucleo di dimensione $2n$, formato dagli omomorfismi $\mathbb{R}$-lineari che hanno valori immaginari.

Possiamo descrivere l'applicazione in termini di matrici. Siano fissate le basi $\mathcal{I}_n$, $\mathcal{I}_1$ e $\{1\}$ di $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}$ rispettivamente. Dato un omomorfismo $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ si ha

$$\alpha_{\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_1}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right)$$

ove $a, b, c, d \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$. Inoltre, la matrice di $\Re\phi$ è $\alpha_{\mathcal{I}_n, \{1\}}(\Re\phi) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \end{array}\right)$, e ciò dice chiaramente che l'applicazione $\phi \mapsto \Re\phi$ è suriettiva e quale sia il suo nucleo.

Possiamo concludere osservando che, dalla relazione $\Im\zeta_0(v) = -\Re\zeta_0(iv)$, valida per le applicazioni $\zeta_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$, si ottiene che, per tali applicazioni si ha

$$\alpha_{\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_1}(\zeta_0) = \left(\begin{array}{c|c} a & -b \\ \hline b & a \end{array}\right),$$

che conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascun autospazio W_i; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Sia U l'autospazio relativo all'autovalore più grande di ϕ e sia W un sottospazio complementare di U contenente gli autovettori relativi agli altri autovalori. Si scrivano delle equazioni cartesiane per il sottospazio W e si determini la matrice $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\pi)$, ove $\pi : V \to V$ è la proiezione su U parallelamente a W. Si può scrivere la matrice B come combinazione lineare delle potenze della matrice A?

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X-4)^2(X+1)^2(X+2)$, e le matrici

$$A - 4\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -9 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A + \mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad A + 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

hanno rispettivamente rango 3, 3 e 4, per cui gli autospazi sono

$$W_1 = \ker(\phi - 4\mathrm{id}) = \langle v_4, v_2 + 6v_5 \rangle, \quad W_2 = \ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle v_2 + v_4 + v_5, v_1 - v_3 - v_4 \rangle,$$
$$W_3 = \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle 4v_1 - 3v_3 - 4v_4 \rangle.$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono, per cui ϕ è diagonalizzabile, ovvero $V = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

(b) L'autospazio relativo all'autovalore più grande è $U = \ker(\phi - 4\mathrm{id}) = \langle v_4, v_2 + 6v_5 \rangle$ e il complementare indicato è $W = \langle 4v_1 - 3v_3 - 4v_4, v_2 + v_4 + v_5, v_1 - v_3 - v_4 \rangle$ ed equazioni cartesiane per quest'ultimo sottospazio sono

$$\begin{cases} X_2 - X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_4 = 0 \end{cases}.$$

La matrice della proiezione si può calcolare nel modo consueto ed è uguale a

$$B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

L'endomorfismo $\frac{(\phi+\mathrm{id})(\phi+2id)}{30}$ si annulla su W e manda in sé i vettori di U (l'affermazione si verifica molto facilmente usando una base di autovettori); dunque $\pi = \frac{(\phi+\mathrm{id})(\phi+2id)}{30}$. Si conclude che

$$B = \tfrac{1}{30}(A + \mathbf{1})(A + 2\mathbf{1}) = \tfrac{1}{30}(A^2 + 3A + 2\mathbf{1}),$$

da cui si deduce che B è combinazione lineare delle potenze di A e che avremmo potuto calcolare in questo modo la matrice della proiezione. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 giugno 2017

ESERCIZIO 1. *Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X) = 4X^3+(2+16i)X^2-(27-5i)X-(3+15i)$ dopo aver verificato che $P(-i) = 0$.*

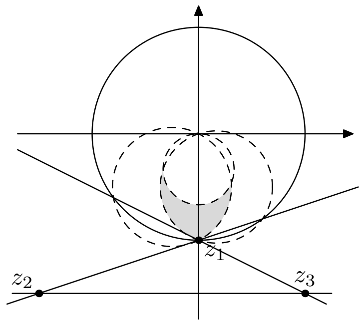
(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del poligono T, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando l'insieme $\lambda^*(T^{in})$, ove T^{in} è l'insieme dei punti interni a T. È vero che per ogni numero complesso z, diverso da zero, si ha $\lambda(z^n) = \lambda(z)^n$? Come si scrive l'analoga relazione per la riflessione sulla circonferenza C di centro z_0 e raggio $r > 0$?

Svolgimento. (a) $P(X) = (X+i)\big(4X^2 + (2+12i)X - (15-3i)\big) = (X+i)(2X-2+3i)(2X+3+3i)$. Le radici di $P(X)$ sono quindi $z_1 = -i$, $z_2 = -\frac{3+3i}{2}$, $z_3 = \frac{2-3i}{2}$. Le rette cercate sono

$$z_1 \vee z_2 : (1+3i)z + (1-3i)\bar{z} - 6 = 0, \qquad z_2 \vee z_3 : iz - i\bar{z} - 3 = 0, \qquad z_1 \vee z_3 : (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} + 4 = 0.$$

(*b*) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono quindi



$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : z\bar{z} - \frac{1+3i}{6}z - \frac{1-3i}{6}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_2 \vee z_3) : z\bar{z} - \frac{i}{3}z + \frac{i}{3}\bar{z} = 0,$$
$$\lambda^*(z_1 \vee z_3) : z\bar{z} + \frac{1-2i}{4}z + \frac{1+2i}{4}\bar{z} = 0,$$

ove i centri sono l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ nella corrispondente equazione e il raggio è il valore assoluto complesso di tale coefficiente. Nel disegno le circonferenze compaiono con linee tratteggiate. Infine, la regione $\lambda^*(T^{in})$ è evidenziata in grigio nel disegno.

Qualunque sia $z \neq 0$, si ha

$$\lambda(z^n) = \frac{1}{\bar{z}^n} = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^n = \lambda(z)^n.$$

Indicata con C la circonferenza di centro z_0 e raggio r, per ogni numero complesso $z \neq z_0$, il suo riflesso nella circonferenza C è $\lambda_C(z) = z_0 + \frac{r^2}{(\bar{z}-\bar{z}_0)}$. Posto $z = z_0 + t$, con $t \neq 0$, se ne deduce che

$$\frac{\lambda_C(z_0+t^n) - z_0}{r^2} = \frac{1}{\bar{t}^n} = \left[\frac{\lambda_C(z_0+t) - z_0}{r^2}\right]^n;$$

e questa è la relazione cercata. $\square$

ESERCIZIO 2. *Sia $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

in base canonica.

(a) *Si determinino dimensione e base per nucleo e immagine di ϕ e si scrivano due matrici invertibili P e Q in $M_5(\mathbb{R})$ tali che $PAQ = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, ove $r = rk\phi$.*

(b) *Si trovino, se esistono, $P' \in M_{5\times r}(\mathbb{R})$ e $Q' \in M_{r\times 5}(\mathbb{R})$ tali che $A = P'Q'$. Esiste una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^5$ tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, ove $r = rk\phi$? È vero che una tale base esiste se, e solo se, $\phi^2 - \phi = 0$?*

Svolgimento. (a) Con la tecnica di eliminazione di Gauss si ottiene

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = A \sim \begin{array}{r} V \\ -II \\ I+V \\ III+2II \\ IV-V-II \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \\ III+2II \\ IV+2III+4II \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\mathrm{rk}\,\phi = 3$ e una base di $\mathrm{im}\,\phi$ è data da

$$w_1 = \phi(e_1) = -e_1 + e_4 + e_5, \qquad w_2 = \phi(e_2) = -2e_1 - e_2 + 2e_3 - e_4, \qquad w_3 = \phi(\tfrac{1}{6}e_3) = e_1 - 2e_3.$$

Inoltre, una base di $\ker\phi$ è data da $v_4 = e_1+e_2+\frac{1}{6}e_3+e_4$ e $v_5 = e_4+e_5$. Possiamo completare questi ultimi due vettori a una base, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$, di V prendendo $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$ e $v_3 = \frac{1}{6}e_3$. Analogamente, possiamo completare la base dell'immagine a una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ di V, prendendo $w_4 = e_2$ e $w_5 = e_1$. Con tali scelte, si ha $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. Due matrici P e Q cercate, sono quindi determinate ponendo

$$P^{-1} = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

per cui

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice a scalini che abbiamo ottenuto con l'eliminazione di Gauss è in forma ridotta, con l'eccezione di uno dei pivot. Possiamo quindi scrivere

$$P' = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

e osservare che si ha $P'Q' = A$. Il lettore più attento può osservare che P' contiene le prime tre colonne di P^{-1}, mentre Q' contiene le prime tre righe di Q^{-1}.

Se esistesse una base $\mathcal{V}$ di $\mathbb{R}^5$ tale che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{1}_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, vorrebbe dire che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi^2) = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)^2 = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, come si ricava da un calcolo diretto; dunque $\phi^2 = \phi$ come richiesto. D'altra parte, se $\phi^2 = \phi$, allora ϕ è la proiezione su $\mathrm{im}\,\phi$ parallelamente a $\ker\phi$, per cui esiste una base del tipo cercato e per determinarla, basta prendere una base di $\mathrm{im}\,\phi$ e unirla ad una base di $\ker\phi$. Per l'applicazione data, si ha

$$\phi(\phi(\tfrac{1}{6}e_3)) = \phi(e_1 - 2e_3) = -13e_1 + 24e_2 + e_4 + e_5 \neq \phi(\tfrac{1}{6}e_3),$$

e quindi una tale base non può esistere. $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

nella base data.

(a) Si calcolino il polinomio caratteristico di ϕ, gli autovalori e una base per ciascun autospazio; si dica inoltre se ϕ è diagonalizzabile.

(b) Sia U uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una sua base. Sia $\nu : U \to U$ l'applicazione lineare definita ponendo $\nu(u_1) = 0$ e $\nu(u_i) = u_{i-1}$ per $2 \le i \le n$. Si determini $\ker(\nu^k)$ per ogni $k \ge 1$. Si consideri l'endomorfismo

$$\psi = a_0 \mathrm{id}_U + a_1\nu + a_2\nu^2 + \cdots + a_{n-1}\nu^{n-1}$$

e si calcoli $\det\psi$. È vero o falso che gli endomorfismi di U che commutano con ν sono tutti e soli quelli che si scrivono come ψ per un'opportuna scelta di $a_0, \dots, a_{n-1}$ in $\mathbb{Q}$?

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_5 - A) = (X-1)(X+2)^2(X-3)^2$, e le matrici

$$A - \mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad A + 2\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad A - 3\mathbf{1}_5 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

hanno rispettivamente rango 4, 3 e 3, per cui gli autospazi sono

$$\ker(\phi - \mathrm{id}) = \langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 \rangle, \quad \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle v_1 - v_4, 2v_2 + 7v_5 \rangle,$$
$$\ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle 2v_1 + 3v_4, v_2 + v_5 \rangle.$$

I generatori dei rispettivi autospazi sono delle basi e quindi molteplicità algebrica e geometrica coincidono, per cui ϕ è diagonalizzabile.

(*b*) Per $k = 1$ si ha $\ker\nu = \langle u_1 \rangle$; per $k = 2$ si ha $\ker\nu^2 = \langle u_1, u_2 \rangle$; e, supponendo $\ker\nu^k = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$; dall'osservazione che $\nu(u_{k+1}) = u_k \in \ker\nu^k$, ma $\nu(u_j) = u_{j-1} \notin \ker\nu^k$ per $k+1 < j \le n$, si conclude che $\ker\nu^{k+1} = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle$ per ogni $k \le n-1$ e $\ker\nu^k = V$ per $k \ge n$.

Dalle definizioni si ricava che $\psi(u_i) = a_0u_i + a_1u_{i-1} + \cdots + a_{i-1}u_1$ per $i = 1, \dots, n$. Dunque, fissata una forma n-lineare alternante non nulla D, si ha

$$\det\psi = \frac{D(\psi(u_1), \dots, \psi(u_n))}{D(u_1, \dots, u_n)} = \frac{D(a_0u_1, a_0u_2 + a_1u_1, \dots, a_0u_n + \cdots + a_{n-1}u_1)}{D(u_1, \dots, u_n)} = a_0^n.$$

Sia ora $\psi : V \to V$ un endomorfismo per cui $\psi \circ \nu = \nu \circ \psi$. Si ha $\psi(u_n) = b_{n-1}u_1 + \cdots + b_0u_n$ per opportuni scalari $b_0, \dots, b_{n-1}$ (la scelta degli indici non è casuale). Necessariamente, ne consegue che

$$\psi(u_{n-1}) = \psi(\nu(u_n)) = \nu(\psi(u_n)) = \nu(b_{n-1}u_1 + \cdots + b_0u_n) = b_{n-2}u_1 + \cdots + b_0u_{n-1};$$

e si procede analogamente, fino a $\psi(u_1) = \nu^{n-1}(\psi(u_n)) = b_0u_1$. Dunque, per tutti i vettori della base $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_n\}$, si ha $\psi(u_i) = b_0u_i + b_1\nu(u_i) + b_2\nu^2(u_i) + \cdots + b_{n-1}\nu^{n-1}(u_i)$; ovvero le due applicazioni lineari coincidono e questo conclude la discussione. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)

prova scritta del 7 luglio 2017

ESERCIZIO 1. *Si determinino le radici in $\mathbb{C}$ del polinomio $P(X) = X^3 + 2X + 4i$ dopo aver verificato che $P(2i) = 0$.*

(a) Si disegni nel piano di Gauss il poligono convesso T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che contengono i lati del poligono T, in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

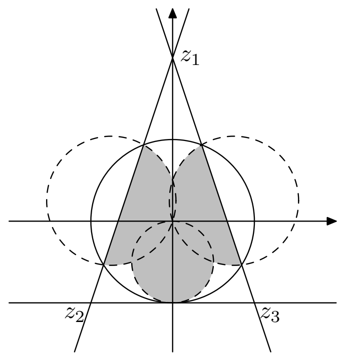
(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo le rette del punto precedente e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando l'insieme $T^{in} \cap \lambda^*(T^{out})$, ove T^{in} e T^{out} indicano rispettivamente l'insieme dei punti interni e dei punti esterni a T.

Svolgimento. (a) $P(X) = (X - 2i)\big(X^2 + 2iX - 2\big) = (X + i)(X + i + 1)(X + i - 1)$. Le radici di $P(X)$ sono quindi $z_1 = 2i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = 1 - i$. Le rette cercate sono

$$z_1 \vee z_2 : (3+i)z + (3-i)\bar{z} + 4 = 0, \qquad z_1 \vee z_3 : (3-i)z + (3+i)\bar{z} - 4 = 0, \qquad z_2 \vee z_3 : iz - i\bar{z} - 2 = 0.$$

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria ($z \mapsto 1/\bar{z}$). Le circonferenze riflesse sono quindi

$$\begin{aligned}
\lambda^*(z_1 \vee z_2) &: z\bar{z} + \frac{3+i}{4}z + \frac{3-i}{4}\bar{z} = 0,\\
\lambda^*(z_1 \vee z_3) &: z\bar{z} - \frac{3-i}{4}z - \frac{3+i}{4}\bar{z} = 0,\\
\lambda^*(z_2 \vee z_3) &: z\bar{z} - \frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z} = 0,
\end{aligned}$$



ove i centri sono l'opposto del coefficiente di $\bar{z}$ nella corrispondente equazione e il raggio è il valore assoluto complesso di tale coefficiente.

Nel disegno le circonferenze che riflettono i lati compaiono con linee tratteggiate. La regione T^{out} è unione dei tre semipiani delimitati dai lati del triangolo T, per cui il suo riflesso è l'unione dei punti interni alle tre circonferenze. Dunque, $T^{in} \cap \lambda^*(T^{out})$ è la regione evidenziata in grigio nel disegno. □

ESERCIZIO 2. *Siano U, V, W, T spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$, $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_4\}$, delle rispettive basi.*

(a) Siano date le applicazioni lineari $\alpha : U \to V$ e $\beta : W \to T$, definite rispettivamente da

$$\begin{aligned}
\alpha(u_1 + u_2 - u_3) &= 2v_1 - v_2 + v_3 - v_4,\\
\alpha(u_2 + u_3) &= v_1 + v_2 - v_3 - 2v_4,\\
\alpha(u_1 + u_2) &= v_1 - v_4;
\end{aligned}
\qquad e \qquad
\beta\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_3+x_5 \\ x_2+x_3 \\ -x_1-x_3+x_4 \\ 3x_2+x_3+x_4-x_5 \end{pmatrix},$$

ove le coordinate sono riferite alle basi fissate. Si determinino nucleo e immagine delle due applicazioni lineari e se ne scrivano le matrici nelle basi date.

(b) Sia data $f : U \to T$ di matrice $F = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{T}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Si dica se esiste un'applicazione lineare $\phi : V \to W$ tale che $f = \beta\phi\alpha$ (applicazione composta). In caso affermativo si scrivano le matrici nelle basi date di tutte le applicazioni lineari soddisfacenti a tale condizione.

(c) Sia $\Phi : Hom_{\mathbb{Q}}(V, W) \to Hom_{\mathbb{Q}}(U, T)$ l'applicazione lineare che manda $\phi : V \to W$ nell'applicazione composta $\beta\phi\alpha$. Si determinino le dimensioni di nucleo e immagine di Φ. Si scriva esplicitamente l'applicazione trasposta Φ^* tra gli spazi duali e se ne determinino nucleo e immagine.

Svolgimento. (a) Si ha

$$\begin{aligned}\alpha(u_3) &= \alpha(u_1+u_2) - \alpha(u_1+u_2-u_3) = -v_1+v_2-v_3,\\ \alpha(u_2) &= \alpha(u_2+u_3) - \alpha(u_3) = 2v_1 - 2v_4,\\ \alpha(u_1) &= \alpha(u_1+u_2) - \alpha(u_2) = -v_1+v_4.\end{aligned}$$

Le matrici cercate sono quindi

$$A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{T}}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix};$$

e si ha $\ker\alpha = \langle 2u_1+u_2\rangle$, $\operatorname{im}\alpha = \langle v_1-v_4, v_1-v_2+v_3\rangle$; e $\ker\beta = \langle w_2-w_3-w_4+w_5\rangle$, $\operatorname{im}\beta = T$.

(*b*) Affinché possa esistere una tale ϕ deve aversi $\ker f \supseteq \ker\alpha = \langle 2u_1+u_2\rangle$; e questa condizione è soddisfatta. Inoltre, deve aversi $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im}\beta = T$; e questo non aggiunge ulteriori condizioni. Dunque una tale ϕ esiste e non è unica. Infatti, posto $V = V' \oplus \operatorname{im}\alpha$ (ad esempio, $V' = \langle v_1, v_2\rangle$), deve aversi

$$\begin{aligned}\phi(-v_1+v_4) &= \phi(\alpha(u_1)) \in \beta^{-1}(f(u_1)) = (-w_1-w_4) + \ker\beta,\\ \phi(-v_1+v_2-v_3) &= \phi(\alpha(u_3) \in \beta^{-1}(f(u_3)) = (w_1+w_2+w_3+w_4+w_5) + \ker\beta,\end{aligned}$$

mentre i valori di ϕ su una base di V' possono essere posti in modo completamente arbitrario. Le matrici cercate possiamo quindi scriverle nella forma

$$\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -a_1+b_1 & a_1\\ a_2 & b_2 & c-a_2+b_2 & d+a_2\\ a_3 & b_3 & -c-a_3+b_3 & -d+a_3\\ a_4 & b_4 & -c-a_4+b_4 & -d+a_4\\ a_5 & b_5 & c-a_5+b_5 & d+a_5\end{pmatrix},$$

al variare dei 12 parametri $a_1, \dots, b_5, c, d$ nel campo $\mathbb{Q}$. Naturalmente, si poteva arrivare allo stesso risultato ponendo come incognite le entrate della matrice $X = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$, soggette alla condizione $BXA = F$, che dà luogo a un sistema lineare di 12 equazioni in 20 incognite (di rango 8).

(*c*) Per quanto visto nel punto precedente, $\dim\ker\Phi = 12$ e quindi $\dim\operatorname{im}\Phi = 20 - 12 = 8$ (per la formula delle dimensioni). Più in generale, scelti dei complementari in modo che

$$U = U' \oplus \ker\alpha \qquad V = \operatorname{im}\alpha \oplus V' \qquad W = W' \oplus \ker\beta \qquad T = \operatorname{im}\beta \oplus T',$$

si ha $\operatorname{im}\Phi \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(U', \operatorname{im}\beta)$ e $\ker\Phi \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V', W) \oplus \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(\operatorname{im}\alpha, \ker\beta)$. La dimensione dell'immagine è quindi uguale al prodotto $(\operatorname{rk}\alpha)(\operatorname{rk}\beta)$ e quella del nucleo si può calcolare direttamente o dedurre dalla formula delle dimensioni.

Per quanto riguarda l'applicazione trasposta, è necessario ricordare che, dati due spazi vettoriali X e Y, di dimensione finita, il duale di $\operatorname{Hom}(X,Y)$ è lo spazio $\operatorname{Hom}(Y,X)$ e il pairing di dualità è dato da $\phi \circ \psi = \operatorname{tr}(\phi\psi) = \operatorname{tr}(\psi\phi)$, per ogni $\phi \in \operatorname{Hom}(X,Y)$ e $\psi \in \operatorname{Hom}(Y,X)$ (perché?).

Allora, si verifica immediatamente che $\Phi^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(T,U) \to \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(W,V)$ l'applicazione lineare che manda $\psi : T \to U$ nell'applicazione composta $\alpha\psi\beta$; infatti, per ogni $\phi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(V,W)$ e $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Q}}(T,U)$, si ha

$$\psi \circ \Phi(\phi) = \operatorname{tr}(\psi\beta\phi\alpha) = \operatorname{tr}(\alpha\psi\beta\phi) = \Phi^*(\psi) \circ \phi.$$

Le dimensioni di nucleo e immagine di Φ^* (4 e 8, rispettivamente) si ottengono dalle osservazioni precedenti, oppure utilizzando le condizioni di ortogonalità valide per ogni applicazione lineare, ovvero $\ker(\Phi^*) = (\operatorname{im}\Phi)^\perp$ e $\operatorname{im}(\Phi^*) = (\ker\Phi)^\perp$. $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per ϕ e, se esistono, due matrici P e D, ove P è invertibile e D è diagonale, tali che $PDP^{-1} = A$.*

(b) *Sia $S = \{\, Q(X) \in \mathbb{C}[X] \mid \det(Q(\phi)) \neq 0 \,\}$. Si verifichi che, dati $Q_1(X)$ e $Q_2(X)$ entrambi in S, il prodotto $Q_1(X)Q_2(X)$ appartiene ancora ad S. Siano ora $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ e $Q(X) \in S$ e si consideri l'endomorfismo $P(\phi)Q(\phi)^{-1} : V \to V$; si verifichi che $P_1(\phi)Q_1(\phi)^{-1} = P_2(\phi)Q_2(\phi)^{-1}$ quando $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ nel campo delle funzioni razionali $\mathbb{C}(X)$.*

(c) *È vero o falso che, presi comunque $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ e $Q(X) \in S$, esistono $P_0(X) \in \mathbb{C}[X]$ e $Q_0(X) \in S$ di grado minore o uguale a 1 tali che $P(\phi)Q(\phi)^{-1} = P_0(\phi)Q_0(\phi)^{-1}$? Supponendo che tutti i polinomi in questione abbiano grado minore o uguale a uno, è vero che $P_1(\phi)Q_1(\phi)^{-1} = P_2(\phi)Q_2(\phi)^{-1}$ se, e solo se, $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X-2)^3(X+1)^2$ e gli autospazi relativi sono

$$\ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle 2v_1 - 5v_3, v_2 + 2v_5, v_3 + 2v_4 - 2v_5 \rangle \qquad \text{e} \qquad \ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle v_1 - v_3, 2v_2 + v_5 \rangle .$$

Quindi ϕ è diagonalizzabile e le matrici cercate sono:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Per il teorema di Binet, $\det(Q_1(\phi)Q_2(\phi)) = \det(Q_1(\phi))\det(Q_2(\phi))$, perché il prodotto di polinomi calcolati in ϕ è uguale alla composizione dei corrispondenti endomorfismi. Inoltre, se $Q(X) \in S$, allora $Q(\phi)$ è un endomorfismo invertibile. Dunque, $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)} = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$ se, e solo se, $P_1(X)Q_2(X) = P_2(X)Q_1(X)$; e da ciò si ricava $P_1(\phi)Q_2(\phi) = P_2(\phi)Q_1(\phi)$. Per concludere, è sufficiente comporre i due membri dell'uguaglianza con $Q_1(X)^{-1}Q_2(X)^{-1}$ e ricordare che gli elementi di $\mathbb{C}[\phi]$ (e i loro inversi) commutano tra loro.

(*c*) Guardando alla forma diagonale (o ricordando la definizione di polinomio minimo), si ha che il polinomio $L(X) = (X-2)(X+1)$, calcolato in ϕ, induce l'endomorfismo nullo. Allora, preso un polinomio qualsiasi, $P(X)$, utilizzando la divisione euclidea si ha $P(X) = L(X)G(X) + R(X)$ con $R(X)$ di grado minore o uguale a 1 e, chiaramente, $P(\phi) = R(\phi)$. Ciò permette di rispondere affermativamente alla prima domanda.

Per quanto riguarda la seconda, la risposta è negativa. Ad esempio, $\frac{2}{X}$ e $X-1$, calcolati in ϕ, inducono lo stesso endomorfismo, perché $X(X-1) = 2 + L(X)$. Infatti, $P_1(\phi)Q_1(\phi)^{-1} = P_2(\phi)Q_2(\phi)^{-1}$ se, e solo se, $P_1(X)Q_2(X) - P_2(X)Q_1(X)$ è divisibile per $L(X)$. □

Esame di Geometria 1 – parte I (laurea in Matematica)
prova scritta del 4 settembre 2017

ESERCIZIO 1. *Sia $P(X) = 2X^3 + (6-3i)X^2 + (3-7i)X - (2+2i) \in \mathbb{C}[X]$ e si verifichi che $P(-2) = 0$.*

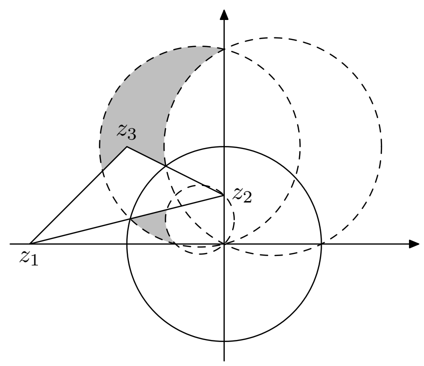
(a) Si determinino le radici, z_1, z_2, z_3, di $P(X)$ e si disegni nel piano complesso il triangolo T che ha come vertici tali radici. Si scrivano le equazioni delle rette che formano i lati del triangolo T in termini delle coordinate z e $\bar{z}$.

(b) Sia $\lambda : \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ la riflessione nella circonferenza unitaria. Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo i lati del triangolo T e si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando la regione $\lambda_*(T) \smallsetminus T$. È vero che il punto di intersezione tra le rette $z_1 \vee z_3$ e $z_2 \vee z_3$ e i punti di intersezione tra le circonferenze riflesse, $\lambda^*(z_1 \vee z_3)$ e $\lambda^*(z_2 \vee z_3)$, sono in una stessa retta reale?

Svolgimento. (a) Le tre radici di $P(X)$ sono $z_1 = -2$, $z_2 = \frac{i}{2}$, $z_3 = -1 + i$. Le rette cercate hano quindi equazioni

$$\begin{aligned} z_1 \vee z_2 :& (1+4i)z + (1-4i)\bar{z} + 4 = 0, \\ z_1 \vee z_3 :& (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 4 = 0, \\ z_2 \vee z_3 :& (1-2i)z + (1+2i)\bar{z} - 2 = 0. \end{aligned}$$

.



(b) Le circonferenze riflesse sono, rispettivamente,

$$\lambda^*(z_1 \vee z_2) : \left| z + \frac{1-4i}{4} \right| = \frac{\sqrt{17}}{4}, \quad \lambda^*(z_1 \vee z_3) : \left| z + \frac{1-i}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\lambda^*(z_2 \vee z_3) : \left| z - \frac{1+2i}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

La regione $\lambda_*(T) \smallsetminus T$ è la regione evidenziata in grigio nel disegno. I tre punti sono z_3, 0 e $\lambda(z_3)$ che sono allineati per la definizione stessa di riflessione nella circonferenza unitaria. □

ESERCIZIO 2. *Siano U, V, W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$, $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$ delle rispettive basi. Si considerino gli omomorfismi, $\alpha : U \to W$ e $\beta : V \to W$, determinati dalle condizioni*

$$\begin{aligned} \alpha(u_1 + u_3 - u_4) &= w_1 - 3w_4 = \alpha(u_1 - u_3 + u_4), \\ \alpha(u_1 - u_2 + u_4) &= w_2 - w_3 + w_5 = \alpha(u_2 - u_1 + u_4); \end{aligned} \quad \beta = (2w_1 - w_2 + w_3 - 6w_4 - w_5) \otimes (v_1^* + v_2^* + v_3^*),$$

ove $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ è la base duale della base $\mathcal{V}$ di V.

(a) Si determinino la dimensione e una base per nucleo e immagine di ciascuno dei due omomorfismi e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\alpha)$ e $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\beta)$.

(b) Si consideri lo spazio vettoriale $U \times V$ (prodotto cartesiano) con le consuete operazioni sui fattori. Si mostri che $\mathcal{B} = \{ (u_1, 0), \dots, (0, v_3) \}$ è una base di $U \times V$ e che l'applicazione $\Phi : U \times V \to W$, definita da $\Phi(u, v) = \alpha(u) - \beta(v)$, è un'applicazione lineare. Si scriva la matrice di Φ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{W}$. Si determini $\ker\Phi$, la sua dimensione e una base.

(c) Dette $p : \ker\Phi \to U$ e $q : \ker\Phi \to V$ le (restrizioni delle) proiezioni sui fattori del prodotto cartesiano, si determinino basi di $\operatorname{im} p$ e $\operatorname{im} q$. Sia T uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e siano date due applicazioni lineari $\phi : T \to U$ e $\psi : T \to V$. È vero che $(\phi(t), \psi(t)) \in \ker\Phi$ per ogni $t \in T$ se, e solo se, $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$?

(d) Che relazioni ci sono tra $(U \times V)^*$ e gli spazi U^* e V^*? Siano α^*, β^* e Φ^* le applicazioni trasposte di α, β e Φ, rispettivamente. Quali relazioni vi sono tra queste tre applicazioni lineari? Sotto quali ipotesi su α e β, si ha $\ker\Phi = \langle 0 \rangle$?

Svolgimento. (a) Dalle condizioni date, si ricava che $\alpha(u_1) = \alpha(u_2) = w_1 - 3w_4$ e $\alpha(u_3) = \alpha(u_4) = w_2 - w_3 + w_5$. Tenendo inoltre conto della definizione di β, si ricava,

$$\begin{aligned} \ker\alpha &= \langle u_1 - u_2, u_3 - u_4\rangle \quad &\text{e} \quad &\operatorname{im}\alpha = \langle w_1 - 3w_4, w_2 - w_3 + w_5\rangle\,; \\ \ker\beta = \langle v_1^* + v_2^* + v_3^*\rangle^{\perp} &= \langle v_1 - v_2, v_2 - v_3\rangle \quad &\text{e} \quad &\operatorname{im}\beta = \langle 2w_1 - w_2 + w_3 - 6w_4 - w_5\rangle\,. \end{aligned}$$

Le matrici cercate sono quindi $A = \alpha_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\beta) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -6 & -6 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(*b*) Data la coppia $(u, v) \in U \times V$, il vettore u si scrive, in modo unico, come $u = a_1u_1 + \cdots + a_4u_4$ e, analogamente, v si scrive, in modo unico, come $v = b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$. Dunque

$$(u, v) = a_1(u_1, 0) + a_2(u_2, 0) + a_3(u_3, 0) + a_4(u_4, 0) + b_1(0, v_1) + b_2(0, v_2) + b_3(0, v_3);$$

e perciò gli elementi di $\mathcal{B}$ generano lo spazio $U \times V$; e sono anche indipendenti, perché una combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$ che fosse uguale a $(0, 0)$, dovrebbe avere tutti i coefficienti nulli, essendo $\mathcal{U} = \{u_1, \dots, u_4\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ basi dei due fattori. La linearità di Φ si può verificare così

$$\begin{aligned} \Phi(c(u, v) + c'(u', v')) &= \Phi(cu + c'u', cv + c'v') = \alpha(cu + c'u') - \beta(cv + c'v') = \\ &= c(\alpha(u) - \beta(v)) + c'(\alpha(u') - \beta(v')) = c\Phi(u, v) + c'\Phi(u', v'). \end{aligned}$$

La matrice di Φ, scritta a blocchi, è $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{W}}(\Phi) = (A| - B)$, ove A e B sono le matrici del punto precedente. Da ciò si deduce immediatamente che $\operatorname{im}\Phi = \operatorname{im}\alpha + \operatorname{im}\beta = \operatorname{im}\alpha$, perché $\operatorname{im}\beta \subset \operatorname{im}\alpha$. Dunque,

$$\dim\ker\Phi = \dim(U \times V) - \dim\operatorname{im}\Phi = 7 - 2 = 5.$$

Una base di $\ker\Phi$ è data dai vettori

$$(u_1 - u_2, 0),\ (u_3 - u_4, 0),\ (0, v_1 - v_2),\ (0, v_2 - v_3),\ (2u_1 - u_3, v_1).$$

(*c*) La proiezione $q : \ker\Phi \to V$ è suriettiva, perché, per ogni vettore v_0 di V, si ha

$$\beta(v_0) \in \langle 2w_1 - w_2 + w_3 - 6w_4 - w_5\rangle \subset \operatorname{im}\alpha$$

e quindi esiste un vettore $u_0 \in U$ tale che $\alpha(u_0) = \beta(v_0)$ e si ha $(u_0, v_0) \in \ker\Phi$, per cui $v_0 \in \operatorname{im} q$. Dunque $\mathcal{V}$ è una base di $\operatorname{im} q$. Se invece prendiamo un vettore u_0 di U che non appartenga a $\langle 2u_1 - u_3\rangle + \ker\alpha = \alpha^{-1}(\operatorname{im}\beta)$; non esiste nessun vettore di V che abbia la stessa immagine e quindi $\Phi(u_0, v) \neq 0$ per ogni $v \in V$ e perciò $u_0 \notin \operatorname{im} p$. In conclusione: $\operatorname{im} p = \alpha^{-1}(\operatorname{im}\beta)$ e una base di tale spazio è data dai vettori $2u_1 - u_3$, $u_1 - u_2$, $u_3 - u_4$.

La coppia $(\phi(t), \psi(t))$ appartiene a $\ker\Phi$ se, e solo se, $\Phi(\phi(t), \psi(t)) = \alpha(\phi(t)) - \beta(\psi(t)) = 0$; e quindi, se $(\phi(t), \psi(t)) \in \ker\Phi$ per ogni $t \in T$, deve aversi $\alpha(\phi(t)) = \beta(\psi(t))$ per ogni $t \in T$; ovvero $\alpha \circ \phi = \beta \circ \psi$. L'implicazione reciproca è immediata.

(*d*) Osserviamo dapprima che il duale di $U \times V$ è il prodotto cartesiano, $U^* \times V^*$, degli spazi duali e il pairing di dualità è dato da $(u^*, v^*) \circ (u, v) = (u^* \circ u) + (v^* \circ v)$ (lo studente dovrebbe verificare che è bilineare e non-degenere). Quindi siano $\alpha^* : W^* \to U^*$, $\beta^* : W^* \to V^*$ e $\Phi^* : W^* \to U^* \times W^*$ le applicazioni trasposte di α, β e Φ. Qualunque siano $u, \in U$, $v \in V$ e $w^* \in W^*$, si ha

$$\begin{aligned} \Phi^*(w^*) \circ (u, v) &= w^* \circ \Phi(u, v) = w^* \circ (\alpha(u) - \beta(v)) = w^* \circ \alpha(u) - w^* \circ \beta(v) = \\ &= \alpha^*(w^*) \circ u - \beta^*(w^*) \circ v = (\alpha^*(w^*), -\beta^*(w^*)) \circ (u, v) \end{aligned}$$

Dunque, $\Phi^* = (\alpha^*, -\beta^*)$, ove $(\alpha^*, -\beta^*) : W^* \to U^* \times V^*$ è l'applicazione $w^* \mapsto (\alpha^*(w^*), -\beta^*(w^*))$. Infine, $\ker\Phi = \langle 0\rangle$ se, e solo se, α e β sono entrambe iniettive e inoltre $\operatorname{im}\alpha \cap \operatorname{im}\beta = \langle 0\rangle$. $\square$

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base; si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per ϕ, si dica se ϕ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.*

(b) *Sia ora V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{F}_q$ e sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo diagonalizzabile, con autovalori $c_1, \dots, c_k$, di molteplicità $m_1, \dots, m_k$, rispettivamente. Se A è la matrice di ϕ in una base $\mathcal{V}$ di V, quante sono le matrici diagonali D e le matrici invertibili P tali che $D = P^{-1}AP$?*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+1)^2(X-2)(X-3)^2$, e quindi gli autovalori di ϕ sono -1, 2, 3. I corrispondenti autospazi sono

$$\ker(\phi + \mathrm{id}) = \langle v_1 - v_4, v_2 + v_5 \rangle, \quad \ker(\phi - 2\mathrm{id}) = \langle v_1 + v_3 \rangle, \quad \ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle v_1 + v_3 + v_4, 3v_2 + v_5 \rangle.$$

Dunque ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ e due matrici che soddisfano alla condizione richiesta sono

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice diagonale, D, deve avere sulla diagonale gli autovalori, $c_1, \dots, c_k$, ove ciascuno compare tante volte quant'è la sua molteplicità. Le possibili scelte distinte sono quindi

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} = \binom{n}{m_1}\binom{n - m_1}{m_2} \cdots \binom{n - m_1 - \cdots - m_{k-1}}{m_k}.$$

Per ogni scelta della matrice D, le colonne della matrice P sono delle basi ordinate dei rispettivi autospazi, poste nelle posizioni corrispondenti. Le possibili basi ordinate dell'autospazio relativo all'autovalore c_i, di molteplicità m_i, sono $(q^{m_i} - 1)(q^{m_i} - q) \cdots (q^{m_i} - q^{m_i - 1})$; per cui, per ogni scelta di D, le possibili matrici P sono

$$\prod_{i=1}^{k} (q^{m_i} - 1)(q^{m_i} - q) \cdots (q^{m_i} - q^{m_i - 1}).$$

Mettendo insieme le osservazioni fatte, il numero di coppie di matrici (D, P), tali che $D = P^{-1}AP$ è uguale a

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \prod_{j=0}^{m_i - 1} (q^{m_i} - q^j).$$

Ad esempio, per uno spazio di dimensione 5 e un endomorfismo con 3 autovalori distinti di molteplicità 1, 2, 2, rispettivamente, avremmo $30(q^2-1)^2(q^2-q)^2(q-1)$ coppie possibili. □

ESERCIZIO 1. *Sia $P(X) = 2X^3 + (3-3i)X^2 - 4iX + 4 + 4i \in \mathbb{C}[X]$. Si verifichi che $P(-2) = 0$ e si determinino le radici, z_1, z_2, z_3, di $P(X)$ in $\mathbb{C}$.*

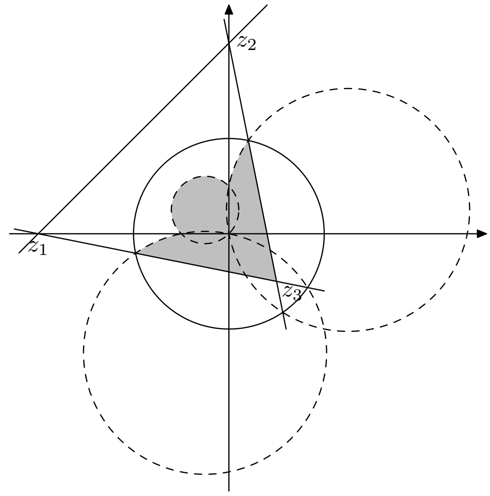
(a) Si disegni nel piano di Gauss il triangolo T di vertici le radici di $P(X)$ e si scrivano le equazioni delle rette che formano i lati di tale triangolo in termini delle coordinate z e $\bar{z}$. .

(b) Si determinino i centri e i raggi delle circonferenze che si ottengono riflettendo nella circonferenza unitaria le rette del punto precedente. Si disegnino tali circonferenze nel piano di Gauss, evidenziando l'insieme $T^{in} \cap \lambda^*(T^{out})$, ove T^{in} e T^{out} sono, rispettivamente, i punti interni ed esterni al triangolo T.

Svolgimento. Le radici di $P(X)$ sono $z_1 = -2$, $z_2 = 2i$, $z_3 = \frac{1-i}{2}$.

(a) I lati del triangolo T sono quindi le rette

$$
\begin{aligned}
z_1 \vee z_2 &: (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 4 = 0 \\
z_1 \vee z_3 &: (1-5i)z + (1+5i)\bar{z} + 4 = 0 \\
z_2 \vee z_3 &: (5-i)z + (5+i)\bar{z} - 4 = 0.
\end{aligned}
$$



(b) Le circonferenze che si ottengono riflettendo le tre rette nella circonferenza unitaria sono,

$$
\begin{aligned}
\lambda^*(z_1 \vee z_2) &: \left| z - \frac{i-1}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
\lambda^*(z_1 \vee z_3) &: \left| z + \frac{1+5i}{4} \right| = \frac{\sqrt{26}}{4} \\
\lambda^*(z_2 \vee z_3) &: \left| z - \frac{5+i}{4} \right| = \frac{\sqrt{26}}{4}.
\end{aligned}
$$

Le circonferenze riflesse appaiono tratteggiate nel disegno e la regione $T^{in} \cap \lambda^*(T^{out})$ è evidenziata in grigio. □

ESERCIZIO 2. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base. Si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ e W, ove*

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 2v_2 + v_4 + v_5, \\
u_2 &= 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + v_4 - v_5, \\
u_3 &= v_1 - 2v_2 + v_3 - v_5,
\end{aligned}
\qquad \text{e} \qquad
W = \left\{ \sum_{j=1}^{5} x_j v_j \;\middle|\; \begin{aligned} x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}.
$$

(a) Si determinino la dimensione e una base per ciascuno dei due sottospazi e si dica se $V = U \oplus W$. In caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma)$, ove $\sigma : V \to V$ è la simmetria di asse U e direzione W.

(b) Si determinino delle equazioni cartesiane per il sottoinsieme H di V che si ottiene traslando tutti i vettori di U per il vettore $u_0 = v_1 + 2v_2$. Quali sono le equazioni cartesiane del sottoinsieme $\sigma_*(H) = \{\, \sigma(v) \mid v \in H \,\}$? Si determini una base di $H^\perp \cap \sigma_*(H)^\perp \subset V^*$.

(c) Sia $\Phi : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$ definito ponendo $\Phi(\phi) = \phi - \phi \circ \sigma$. Si determinino le dimensioni di nucleo ed immagine di Φ. È vero che si tratta di una proiezione? Si determini l'immagine dell'endomorfismo $\psi = 3\mathrm{id}_V - 2\sigma$ tramite la simmetria $\Lambda : \mathrm{End}V \to \mathrm{End}V$, di asse $\ker\Phi$ e direzione $\mathrm{im}\Phi$. Si calcolino $\det\psi$, $\det\Lambda(\psi)$ e $\det\Lambda$.

Svolgimento. (a) $u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$ e quindi il sottospazio U ha dimensione 2 e una sua base è data, ad esempio, da u_1 e u_2. Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 2 ($III = I + II$), quindi il sottospazio W ha dimensione 3 e una sua base è data da $w_1 = v_1 + v_3 + 2v_4$, $w_2 = v_2$, $w_3 = v_3 + v_4 - v_5$. $U \cap W = \langle 0 \rangle$ e quindi (per la formula di Grassmann) $V = U \oplus W$. La matrice cercata è

$$S = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\sigma) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 6 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gli elementi di H sono le soluzioni di un sistema lineare che ha u_0 come soluzione particolare e U come soluzione del sistema omogeneo associato. Applicando σ agli elementi di H, si ha $\sigma(u_0) = -v_1 - 6v_2 - 2v_4 - 2v_5$, mentre $\sigma(u) = u$ per ogni $u \in U$. Possiamo quindi prendere come equazioni

$$H : \begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_2 - 2X_5 = 2 \\ X_3 - X_4 + X_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma_*(H) : \begin{cases} X_1 - X_3 = -1 \\ X_2 - 2X_5 = -2 \\ X_3 - X_4 + X_5 = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo infine che

$$H^\perp \cap \sigma_*(H)^\perp = \langle H \rangle^\perp \cap \langle \sigma_*(H) \rangle^\perp = (\langle u_0 \rangle + U)^\perp \cap (\langle \sigma(u_0) \rangle + U)^\perp = \langle u_0 \rangle^\perp \cap \langle \sigma(u_0) \rangle^\perp \cap U^\perp;$$

dunque una base di questo sottospazio è $\{\, 2v_1^* - v_2^* - 2v_3^* + 2v_5^*,\ v_3^* - v_4^* + v_5^* \,\}$.

(c) Si ha $\phi \in \ker\Phi \iff \phi = \phi \circ \sigma \iff W \subseteq \ker\phi$. Quindi $\ker\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V/W, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(U, V)$, ha dimensione 10. Per la formula delle dimensioni $\dim \operatorname{im}\Phi = \dim \operatorname{End} V - \dim\ker\Phi = 15$; e si può verificare che $\operatorname{im}\Phi \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W, V)$ (ad esempio prendendo la base $\mathcal{U} = \{\, u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 \,\}$ di V e utilizzando l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}} : \operatorname{End} V \to M_5(\mathbb{Q})$). Non si tratta di una proiezione, perché

$$\Phi(\Phi(\phi)) = \phi - \phi \circ \sigma - (\phi - \phi \circ \sigma) \circ \sigma = 2(\phi - \phi \circ \sigma) = 2\Phi(\phi).$$

Si tratta quindi del doppio della proiezione su $\operatorname{im}\Phi$ parallelamente a $\ker\Phi$, per cui $\Lambda = \mathrm{id}_{\operatorname{End} V} - \Phi$ e perciò $\Lambda(\psi) = \psi - \Phi(\psi) = \phi \circ \sigma = 3\sigma - 2\mathrm{id}_V$. Il determinante di ψ si calcola agevolmente usando la base $\mathcal{U}$; infatti

$$\det\psi = \frac{D(\psi(u_1), \psi(u_2), \psi(w_1), \psi(w_2), \psi(w_3))}{D(u_1, u_2, w_1, w_2, w_3)} = \frac{D(u_1, u_2, 5w_1, 5w_2, 5w_3)}{D(u_1, u_2, w_1, w_2, w_3)} = 5^3;$$

e analogamente (o ricordando il Teorema di Binet) $\det\Lambda(\psi) = -5^3$. Poiché Λ è una simmetria, è diagonalizzabile con autovalori ± 1, e si ha quindi $\det\Lambda = 1^{\dim\ker\Phi}(-1)^{\dim\operatorname{im}\Phi} = -1$. □

ESERCIZIO 3. *Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_5\}$ una sua base; si indichi con $\phi : V \to V$ l'endomorfismo di matrice*

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) *Si determinino il polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per ϕ, si dica se ϕ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determinino una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tali che $D = P^{-1}AP$.*

(b) *Sia $\Psi : \operatorname{End}_{\mathbb{Q}} V \to \operatorname{End}_{\mathbb{Q}} V$ definito da $\Psi(\xi) = \xi \circ \phi$. Si determinino il polinomio caratteristico, autovalori e autospazi per Ψ, si dica se Ψ è diagonalizzabile e, in caso affermativo, si determini una base di autovettori per Ψ.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = (X+2)^3(X-3)^2$, e quindi gli autovalori di ϕ sono -2 e 3. I corrispondenti autospazi sono

$$W_1 = \ker(\phi + 2\mathrm{id}) = \langle v_1 - 4v_4, 2v_2 + v_5, v_2 - v_3 + 2v_4 \rangle, \qquad W_2 = \ker(\phi - 3\mathrm{id}) = \langle v_1 + v_4, v_2 + 3v_5 \rangle.$$

Dunque ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$ e due matrici che soddisfano alla condizione richiesta sono

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Il polinomio caratteristico è $p_\Psi(X) = (X+2)^{15}(X-3)^{10}$, e quindi gli autovalori di ϕ sono -2 e 3. I corrispondenti autospazi sono

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W_1, V) \cong \ker(\Psi + 2\mathrm{id}), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W_2, V) \cong \ker(\Psi - 3\mathrm{id}).$$

Un modo elegante per giustificare le affermazioni può essere il seguente. Si prenda la base di autovettori per ϕ, $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_5\}$, per cui $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id}_V)$, e la base duale $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_5^*\}$. Allora una base di $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}} V$ è $\mathcal{B} = \left\{ \, w_i \otimes w_j^* \;\middle|\; i, j = 1, \dots, 5 \, \right\}$, e si ha

$$\Psi(w_i \otimes w_j^*) = (w_i \otimes w_j^*) \circ \phi = w_i \otimes (w_j^* \circ \phi) = w_i \otimes \phi^*(w_j^*) = \begin{cases} -2 w_i \otimes w_j^* & \text{se } j = 1, 2, 3 \\ 3 w_i \otimes w_j^* & \text{se } j = 4, 5 \end{cases}.$$

I vettori dati sono quindi una base di autovettori per Ψ e la somma delle molteplicità geometriche raggiunge la dimensione di $\mathrm{End} V$. Inoltre,

$$\ker(\Psi + 2\mathrm{id}) = \left\langle w_i \otimes w_j^* \,|\, j = 1, 2, 3 \right\rangle \cong V \otimes W_2^\perp \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V/W_2, V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(W_1, V),$$

perché $\langle w_1^*, w_2^*, w_3^* \rangle \cong W_2^\perp \cong (V/W_2)^*$. Analogamente si ragiona per l'altro autospazio. $\square$