Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 Aprile 2017

Nome	Cognome	N. Matricola

A

ESERCIZIO 1. Sia $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Si determinino: polinomio caratteristico, polinomio minimo e autospazi di φ.
(2) Si determini una matrice di Jordan, J tale che A sia simile a J e si scriva la filtrazione degli autospazi generalizzati di A.
(3) Si determini la dimensione di $\mathbb{Q}[A]$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale (giustificare la risposta).
(4) Detto L_φ l'endomorfismo di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definito $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$. Determinare polinomio caratteristico, polinomio minimo e forma canonica di Jordan per L_φ.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino i punti

$$P = O + e_1; \qquad Q = O + e_1 + 2e_3; \qquad R = O + e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4.$$

(a) Si considerino le rette $r := O \vee P$ e $s := Q \vee R$. Determinare la posizione reciproca di r ed s e equazioni cartesiane per la sottovarietà lineare $r \vee s$ e la sua dimensione.
(b) Determinare le equazioni cartesiane del piano π passante per il punto medio M del segmento PQ e parallelo sia ad r che ad s.
(c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t_M passante per M e incidente sia r che s.
(d) Dimostrare che per ogni punto T nel piano π passa un'unica retta t_T incidente sia r che s.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(a) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della proiezione p sul piano $\tau : x + 4y + z = 3$ lungo la direzione $\langle e_2 \rangle$.
(b) Determinare un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che la matrice associata alla proiezione del punto precedente sia diagonale.
(c) Determinare tutte le affinità f di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tali che $pf = p$ indicandone la matrice in un sistema di riferimento a scelta fra $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$.

ESERCIZIO 4. Si considerino ϕ e ψ due endomorfismi di V spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Supponiamo inoltre che ϕ sia diagonalizzabile.
(i) Dimostrare che se $\phi\psi = \psi\phi$ allora esiste una base di V tale che sia ϕ che ψ siano matrici a blocchi di Jordan (ovvero esse sono simultaneamente Jordanizzabili).
(ii) Se ϕ e ψ sono simultaneamente Jordanizzabili è vero che essi commutano fra loro cioè $\phi\psi = \psi\phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 Aprile 2017

Nome	Cognome	N. Matricola

B

ESERCIZIO 1. Sia $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) Si determinino: polinomio caratteristico, polinomio minimo e autospazi di φ.
(2) Si determini una matrice di Jordan, J tale che A sia simile a J e si scriva la filtrazione degli autospazi generalizzati di A.
(3) Si determini la dimensione di $\mathbb{Q}[A]$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale (giustificare la risposta).
(4) Detto L_φ l'endomorfismo di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definito $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$. Determinare polinomio caratteristico, polinomio minimo e forma canonica di Jordan per L_φ.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ con riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino i punti

$$P = O + e_2; \qquad Q = O + e_2 + 2e_3; \qquad R = O + e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4.$$

(a) Si considerino le rette $r := O \vee P$ e $s := Q \vee R$. Determinare la posizione reciproca di r ed s e equazioni cartesiane per la sottovarietà lineare $r \vee s$ e la sua dimensione.
(b) Determinare le equazioni cartesiane del piano π passante per il punto medio M del segmento PQ e parallelo sia ad r che ad s.
(c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t_M passante per M e incidente sia r che s.
(d) Dimostrare che per ogni punto T nel piano π passa un'unica retta t_T incidente sia r che s.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(a) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della proiezione p sul piano $\tau : 4x + y + z = 3$ lungo la direzione $\langle e_2 \rangle$.
(b) Determinare un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che la matrice associata alla proiezione del punto precedente sia diagonale.
(c) Determinare tutte le affinità f di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tali che $pf = p$ indicandone la matrice in un sistema di riferimento a scelta fra $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$.

ESERCIZIO 4. Si considerino ϕ e ψ due endomorfismi di V spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Supponiamo inoltre che ϕ sia diagonalizzabile.
(i) Dimostrare che se $\phi\psi = \psi\phi$ allora esiste una base di V tale che sia ϕ che ψ siano matrici a blocchi di Jordan (ovvero esse sono simultaneamente Jordanizzabili).
(ii) Se ϕ e ψ sono simultaneamente Jordanizzabili è vero che essi commutano fra loro cioè $\phi\psi = \psi\phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 Aprile 2017

Nome	Cognome	N. Matricola

C

ESERCIZIO 1. Sia $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Si determinino: polinomio caratteristico, polinomio minimo e autospazi di φ.
(2) Si determini una matrice di Jordan, J tale che A sia simile a J e si scriva la filtrazione degli autospazi generalizzati di A.
(3) Si determini la dimensione di $\mathbb{Q}[A]$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale (giustificare la risposta).
(4) Detto L_φ l'endomorfismo di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definito $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$. Determinare polinomio caratteristico, polinomio minimo e forma canonica di Jordan per L_φ.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino i punti

$$P = O + e_3; \qquad Q = O + 2e_1 + e_3; \qquad R = O + 2e_1 + e_2 + e_3 - e_4.$$

(a) Si considerino le rette $r := O \vee P$ e $s := Q \vee R$. Determinare la posizione reciproca di r ed s e equazioni cartesiane per la sottovarietà lineare $r \vee s$ e la sua dimensione.
(b) Determinare le equazioni cartesiane del piano π passante per il punto medio M del segmento PQ e parallelo sia ad r che ad s.
(c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t_M passante per M e incidente sia r che s.
(d) Dimostrare che per ogni punto T nel piano π passa un'unica retta t_T incidente sia r che s.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(a) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della proiezione p sul piano $\tau : x + 4y + z = 2$ lungo la direzione $\langle e_1 \rangle$.
(b) Determinare un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che la matrice associata alla proiezione del punto precedente sia diagonale.
(c) Determinare tutte le affinità f di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tali che $pf = p$ indicandone la matrice in un sistema di riferimento a scelta fra $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$.

ESERCIZIO 4. Si considerino ϕ e ψ due endomorfismi di V spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Supponiamo inoltre che ϕ sia diagonalizzabile.
(i) Dimostrare che se $\phi\psi = \psi\phi$ allora esiste una base di V tale che sia ϕ che ψ siano matrici a blocchi di Jordan (ovvero esse sono simultaneamente Jordanizzabili).
(ii) Se ϕ e ψ sono simultaneamente Jordanizzabili è vero che essi commutano fra loro cioè $\phi\psi = \psi\phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4

Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 Aprile 2017

Nome	Cognome	N. Matricola

D

ESERCIZIO 1. Sia $\varphi : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice A rispetto alla base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(1) Si determinino: polinomio caratteristico, polinomio minimo e autospazi di φ.
(2) Si determini una matrice di Jordan, J tale che A sia simile a J e si scriva la filtrazione degli autospazi generalizzati di A.
(3) Si determini la dimensione di $\mathbb{Q}[A]$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale (giustificare la risposta).
(4) Detto L_φ l'endomorfismo di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^5, \mathbb{Q}^5)$ definito $L_\varphi(f) = \varphi \circ f$. Determinare polinomio caratteristico, polinomio minimo e forma canonica di Jordan per L_φ.

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino i punti

$$P = O + e_1; \qquad Q = O + e_1 + 2e_2; \qquad R = O + e_1 + 2e_2 + e_3 - e_4.$$

(a) Si considerino le rette $r := O \vee P$ e $s := Q \vee R$. Determinare la posizione reciproca di r ed s e equazioni cartesiane per la sottovarietà lineare $r \vee s$ e la sua dimensione.
(b) Determinare le equazioni cartesiane del piano π passante per il punto medio M del segmento PQ e parallelo sia ad r che ad s.
(c) Determinare le equazioni cartesiane di una retta t_M passante per M e incidente sia r che s.
(d) Dimostrare che per ogni punto T nel piano π passa un'unica retta t_T incidente sia r che s.

ESERCIZIO 3. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$.
(a) Determinare la matrice nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$ della proiezione p sul piano $\tau : x + y + 4z = 3$ lungo la direzione $\langle e_1 \rangle$.
(b) Determinare un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$ in $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tale che la matrice associata alla proiezione del punto precedente sia diagonale.
(c) Determinare tutte le affinità f di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ tali che $pf = p$ indicandone la matrice in un sistema di riferimento a scelta fra $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}'$.

ESERCIZIO 4. Si considerino ϕ e ψ due endomorfismi di V spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Supponiamo inoltre che ϕ sia diagonalizzabile.
(i) Dimostrare che se $\phi\psi = \psi\phi$ allora esiste una base di V tale che sia ϕ che ψ siano matrici a blocchi di Jordan (ovvero esse sono simultaneamente Jordanizzabili).
(ii) Se ϕ e ψ sono simultaneamente Jordanizzabili è vero che essi commutano fra loro cioè $\phi\psi = \psi\phi$?

NON SCRIVERE NELLO SPAZIO SOTTOSTANTE

1	2	3	4