Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 21 Giugno 2017

ESERCIZIO 1. *Sia $\phi_t : \mathbb{Q}^5 \to \mathbb{Q}^5$ l'endomorfismo di matrice A_t rispetto alla base canonica ove $t \in \mathbb{Q}$:*

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & t & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & t & 0 \\ t-1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) *Si determinino: polinomio caratteristico, polinomio minimo di ϕ_t e la forma canonica J_t di Jordan per ogni $t \in \mathbb{Q}$.*

(b) *Si determini un valore $\bar{t}$ del parametro t per cui la matrice $A_{\bar{t}} - \mathbb{I}_5$ sia nilpotente. Per questo valore del parametro si determini una matrice invertibile, P, tale che $J_{\bar{t}} = P^{-1}A_{\bar{t}}P$.*

(c) *Posto $t = 0$ elencare tutte le possibili forme di Jordan $J \in M_5(\mathbb{Q})$ a meno di similitudini tali che: il polinomio caratteristico di J coincida con quello di A_0 e tali che $\dim \mathbb{Q}[J] = 3$.*

Svolgimento. (a) Il polinomio caratteristico è: $p_{A_t}(x) = (x-1)^3(x-t)^2$, per ogni $t \in \mathbb{Q}$ si ha $\dim\ker(A_t - \mathbb{I}_5) = 2$ e per $t \neq 1$ si ha $\dim\ker(A_t - t\mathbb{I}_5) = 1$. Per $t \neq 1$ il polinomio minimo è $\lambda_{A_t}(x) = (x-1)^2(x-t)^2$ mentre per $t = 1$ essendo $\dim\ker(A_1 - \mathbb{I}_5)^2 = 4$ si ricava $\lambda_{A_1}(x) = (x-1)^3$. Dai dati precedenti si ricava che per $t \neq 1$ la matrice A_t è simile ad una matrice di Jordan con 3 blocchi: un blocco $J_{1,1}$ un blocco $J_{2,1}$ e un blocco $J_{2,t}$ mentre per $t = 1$ la matrice A_1 è simile ad una matrice di Jordan con 2 blocchi: un blocco $J_{2,1}$ un blocco $J_{3,1}$.

(b) La matrice $A_{\bar{t}} - \mathbb{I}_5$ è nilpotente se e solo se la matrice $A_{\bar{t}}$ ha come unico autovalore 1 e questo succede solo per $t = 1$. Si verifica che $\ker(A_1 - \mathbb{I}_5) = \langle e_4, 2e_2 - e_3\rangle$; $\ker(A_1 - \mathbb{I}_5)^2 = \langle e_2, e_3, e_4, e_1 - 4e_5\rangle$; quindi $e_5 \in \ker(A_1 - \mathbb{I}_5)^3$ ma $e_5 \notin \ker(A_1 - \mathbb{I}_5)^2$ quindi posto $v_5 = e_5$ si ricava $v_4 = (A_1 - \mathbb{I}_5)v_5 = e_2$, $v_3 = (A_1 - \mathbb{I}_5)^2 v_5 = e_4$ allora v_2 deve completare $\{e_2, e_4, 2e_2 - e_3\}$ a base di $\ker(A_1 - \mathbb{I}_5)^2$ quindi possiamo scegliere $v_2 = e_1 - 4e_5$ da cui $v_1 = (A_1 - \mathbb{I}_5)^2 v_2 = -2e_2 + e_3 + 2e_4$. In tal modo otteniamo

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Posto $t = 0$ si ricava che il polinomio caratteristico è $p_{A_0}(x) = x^2(x-1)^3$. Essendo $\dim \mathbb{Q}[J]$ uguale al grado del polinomio minimo si ricava che il polinomio minimo deve avere grado 3 e gli stessi zeri del polinomio caratteristico per $H - C$ quindi i possibili polinomi minimi sono: $\lambda(x) = x^2(x-1)$ oppure $\lambda'(x) = x(x-1)^2$. Da cui si ricavano le forme di Jordan: per $\lambda(x)$ un blocco $J_{2,0}$ e tre blocchi $J_{1,1}$ mentre per $\lambda'(x)$ due blocchi $J_{1,0}$ un blocco $J_{2,1}$ e un blocco $J_{1,1}$. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si consideri la rigidità f la cui matrice rispetto a $\mathscr{R}$ è:* $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9/25 & -12/25 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 12/25 & -16/25 & 3/5 \end{pmatrix}$.

(a) *Si classifichi la rigidità f e si scriva f come composizione $f = \sigma\tau = \tau\sigma$ con σ riflessione e τ una traslazione o con una rotazione.*

(b) *Si considerino le rette $r : O + \langle -4e_1 + 3e_3\rangle$ ed $s : O + 5e_1 + \langle e_2\rangle$. Si determinino le equazioni cartesiane di $f(r)$ e si calcoli la distanza fra $f(r)$ ed s.*

(c) *Si determinino tutti i piani π contenenti la retta s e aventi distanza 3 dall'origine.*

Svolgimento. (a) La rigidità f è inversa in quanto $\det(f) = -1$ e la sottomatrice di ordine 3 dell'applicazione lineare soggiacente ϕ non è simmetrica quindi f è una rotoriflessione il cui unico punto unito è l'origine. In questo caso $f = \sigma\tau = \tau\sigma$ con σ riflessione di asse un piano π e τ rotazione con asse di rotazione h ortogonale al piano di riflessione π e $\pi \cap h = \{O\}$ (unico punto unito). L'autospazione di autovalore -1 per ϕ è $V_{-1} = \langle 2e_1 + 4e_2 + e_3\rangle$ quindi la riflessione σ richiesta è la riflessione di asse $\pi : O + \langle 2e_1 + 4e_2 + e_3\rangle$ la cui matrice associata rispetto al s.d.r $\mathscr{R}$ è:

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13/21 & -16/21 & -4/21 \\ 0 & -16/21 & -11/21 & -8/21 \\ 0 & -4/21 & -8/21 & 19/21 \end{pmatrix}.$$

Essendo $f = \sigma\tau$ si ricava (componendo a destra con σ) che $\tau = \sigma f$ quindi $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\tau) = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f)$.

(b) La retta $f(r) = O + \langle -\frac{96}{25}e_1 + \frac{16}{5}e_2 - \frac{3}{25}e_3\rangle$ le cui equazioni cartesiane sono $f(r) : \begin{cases} x - 32z = 0 \\ 3y + 80z = 0. \end{cases}$ Il piano contenente s e parallelo ad $f(r)$ ha equazione $\pi : 32x - z = 160$ da cui si ricava che la distanza fra $f(r)$ e s è $d = \frac{160}{\sqrt{1025}}$.

(c) La retta s ha equazioni cartesiane $s : \begin{cases} x = 5 \\ z = 0 \end{cases}$. Cerchiamo un piano $\pi_{\alpha,\beta} : \alpha(x-5) + \beta z = 0$ con $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ nel fascio proprio di piani di asse s tale che $d(\pi_{\alpha,\beta}, O) = 3$. Tramite la formula della distanza punto piano troviamo: $\frac{|5\alpha|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 3$ da cui si ricava $25\alpha^2 = 9\alpha^2 + 9\beta^2$ perciò $16\alpha^2 = 9\beta^2 \Rightarrow 4\alpha = \pm 3\beta$. I due piani richiesti sono: $\pi_1 : 3x + 4z = 15$ e $\pi_2 : 3x - 4y = 15$. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_5\}$ si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

(1) Si determini la posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, si calcolino $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ e le rispettive dimensioni.
(2) Si consideri il punto $P = O + e_1$. Determinare le equazioni cartesiane di una sottovarietà lineare $\mathbb{T}$ contenente P di dimensione $\dim(\mathbb{T}) = 3$ e tale che $\mathbb{T}$ intersechi sia $\mathbb{L}$ che $\mathbb{M}$.
(3) Si determini, scrivendone la matrice in un opportuno sistema di riferimento, un'affinità f di $\mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$ tale che $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f^2 = id$. È vero che ogni affinità che verifica le condizioni precedenti ha almeno un punto unito?

Svolgimento. (1) Le sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ di dimensione 3 si intersecano nella retta $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = O + 2e_1 - e_2 + 2e_3 + \langle e_4\rangle$ da cui si ricava: $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle e_4\rangle$ quindi $\dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M}) = 1$ e $\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = 5$ da cui $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = \mathbb{A}^5(\mathbb{Q})$.

(2) Detto L un punto di $\mathbb{L}$ e M un punto di $\mathbb{M}$ la sottovarietà lineare $\mathbb{T}$ richiesta è del tipo: $\mathbb{T} : P + \langle L - P, M - P, w\rangle$ con $w \in \mathbb{Q}^5$ e $\dim\langle L - P, M - P, w\rangle = 3$. Ad esempio $\mathbb{T} : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ va bene.

(3) Sia $O' = O + 2e_1 - e_2 + 2e_3 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e $v_1 = e_4 \in V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}$, $v_2 = e_1 - e_2 + e_3 \in V_{\mathbb{L}}$, $v_3 = e_5 \in V_{\mathbb{L}}$, $v_4 = 2e_1 - e_2 \in V_{\mathbb{M}}$, $v_5 = e_3 \in V_{\mathbb{M}}$. L'affinità f la cui matrice associata rispetto al s.d.r. $\mathscr{R}' := \{O'; v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ è:

$$\alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(f) = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

soddisfa $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f^2 = id$. Ogni affinità che soddisfi alle condizioni del problema ha almeno un punto unito perché essa è una simmetria; in particolare f induce un'affinità sulla retta $r := \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e vale ancora $f^2_{|r} = id_{|r}$ quindi la retta r contiene sempre un punto unito per f. □

ESERCIZIO 4. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si consideri una rotazione ρ di asse una retta h ed angolo $\theta \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Sia r una retta sghemba con h. Si dimostri che $\rho(r)$ e l'asse h sono sghembi. Si determini la posizione reciproca di r e $\rho(r)$.*

Svolgimento. Essendo per ipotesi r ed h sghembe la più piccola sottovarietà lineare contenente sia r che h è: $r \vee h = \mathbb{E}^3$ quindi $\rho(r) \vee h = \rho(r \vee h) = \rho(\mathbb{E}^3) = \mathbb{E}^3$ quindi $\rho(r)$ e h sono sghembe.

Se la retta r è ortogonale all'asse h si ha che r incide $\rho(r)$ (essendo $\theta \neq k\pi$) mentre se r non è ortogonale all'asse (sempre sotto l'ipotesi r e h sghembe) si ha che r e $\rho(r)$ sono sghembe. Per dimostrare questo fatto detti R e H i punti di minima distanza in r e h rispettivamente, basta prendere come sistema di riferimento $\mathscr{R} := \{H; u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1 := \frac{R-H}{\|R-H\|}$, u_3 un versore direttore di h e $u_2 := u_3 \times u_1$. In questo sistema di riferimento sia

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata alla rotazione ρ. L'asse h è $h : H + \langle u_3 \rangle$. La retta r ha vettore direttore $v_r = au_1 + bu_2 + cu_3$ ortogonale al vettore di minima distanza (quindi $a = v_r \cdot u_1 = 0$) e linearmente indipendente da u_3 (in quanto r e h non sono parallele quindi $b \neq 0$). Da cui si ricava, posto $d = \|R - H\|$, che $r : H + du_1 + \langle u_2 + \alpha u_3 \rangle$ e $\rho(r) : H + d\cos(\theta)u_1 + d\sin(\theta)u_2 + \langle -\sin(\theta)u_1 + \cos(\theta)u_2 + \alpha u_3 \rangle$. Ricordiamo che d è uguale alla distanza fra r e h che è non nulla per ipotesi in quanto r ed h sono sghembe. Osservando i sottospazi direttori si verifica che le retta $\rho(r)$ non è mai parallela a r in quanto $\theta \neq k\pi$ per ipotesi. Le rette $\rho(r)$ e r sono complanari se e solo se

$$0 = \det \begin{pmatrix} d(\cos(\theta) - 1) & 0 & -\sin(\theta) \\ d\sin(\theta) & 1 & \cos(\theta) \\ 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \alpha d(2\cos(\theta) - 2)$$

essendo $d = \|R - H\| \neq 0$ e $\cos(\theta) \neq 1$ si ricava che le rette sono complanari e quindi incidenti (dato che non possono essere parallele) se e solo se $\alpha = 0$ ovvero se e solo se r è ortogonale all'asse h, altrimenti r e $\rho(r)$ sono sghembe. $\square$