Esame di Geometria 1 – parte II (laurea in Matematica)

prova scritta del 7 Luglio 2017

ESERCIZIO 1. *Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione 6 su un campo C che soddisfi alle seguenti condizioni:* $\operatorname{tr}(\phi) = 1$ *e* $\dim \ker(\phi^3) = 5$.

(a) Si determini il polinomio caratteristico di un tale ϕ. Si determinino le possibili forme canoniche di Jordan (a meno di similitudine) per un tale ϕ indicandone il polinomio minimo.

(b) Si indichi la tabella delle dimensioni delle filtrazioni degli autospazi generalizzati per le forme di Jordan trovate al punto precedente.

(c) È vero che ogni tale ϕ soddisfa la condizione $\ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi) = V$? In caso negativo determinare quali fra i precedenti soddisfano alla condizione $\ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi) = V$.

Svolgimento. (a) Essendo $\dim \ker(\phi^3) = 5$ si ha che 0 è autovalore per ϕ di molteplicità algebrica superiore o uguale a 5 quindi il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(x) = x^5(x-\alpha)$ con $\alpha \in C$. Si deduce che $\operatorname{tr}(\phi) = \alpha = 1$ quindi $p_\phi(x) = x^5(x-1)$. Le possibili forme di Jordan di un endomorfismo con $p_\phi(x) = x^5(x-1)$ contengono tutte un unico blocco di Jordan $J_{1,1}$ di ordine 1 e autovalore 1.. Per quanto riguarda l'autovalore 0 si hanno queste possibilità:

(1) 5 blocchi $J_{1,0}$ e 1 blocco $J_{1,1}$ quindi il polinomio minimo è $\lambda_\phi(x) = x(x-1)$;
(2) 1 blocco $J_{2,0}$, 3 blocchi $J_{1,0}$ e 1 blocco $J_{1,1}$ con polinomio minimo $\lambda_\phi(x) = x^2(x-1)$;
(3) 2 blocco $J_{2,0}$, 1 blocco $J_{1,0}$ e 1 blocco $J_{1,1}$ con polinomio minimo $\lambda_\phi(x) = x^2(x-1)$;
(4) 1 blocco $J_{3,0}$, 2 blocchi $J_{1,0}$ e 1 blocco $J_{1,1}$ con polinomio minimo $\lambda_\phi(x) = x^3(x-1)$;
(5) 1 blocco $J_{3,0}$, 1 blocco $J_{2,0}$ e 1 blocco $J_{1,1}$ con polinomio minimo $\lambda_\phi(x) = x^3(x-1)$.

(b) La tabella delle dimensioni delle filtrazioni degli autospazi generalizzati per le forme di Jordan $J_1, \dots, J_5$ elencate precedentemente sono:

$\dim \ker \phi$	$\dim \ker \phi^2$	$\dim \ker \phi^3$	$\dim \ker(\phi - 1)$
5	5	5	1
4	5	5	1
3	5	5	1
3	4	5	1
2	4	5	1

(c) Sia $\mathscr{V} := \{v_1, \dots, v_6\}$ una base di V tale che la matrice $\alpha_{\mathscr{V},\mathscr{V}}(\phi)$ sia di Jordan ordinata come nell'elenco precedente. Per la forma di Jordan J_1 si ha $\ker(\phi) = \langle v_1, \dots, v_5\rangle$ e $\operatorname{im}(\phi) = \langle v_6\rangle$ quindi è vero che $\ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi) = V$. Mentre tutte le altre forme di Jordan contengono come primo blocco un blocco di Jordan nilpotente di ordine maggiore o uguale a 2 quindi $\phi(v_2) = v_1$ e $\phi(v_1) = 0_V$ quindi $v_1 \in \ker(\phi) \cap \operatorname{im}(\phi)$ perciò nucleo e immagine non sono in somma diretta. □

ESERCIZIO 2. *Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ Si consideri la rigidità f la cui matrice rispetto a $\mathscr{R}$ è:*
$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 14/15 & -1/3 & 2/15 \\ 0 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 2/15 & 2/3 & 11/15 \end{pmatrix}.$$

(a) Si classifichi la rigidità f e si scriva f come composizione $f = \sigma\tau = \tau\sigma$ con σ riflessione e τ una traslazione o una rotazione. Si determini l'equazione cartesiana del piano π asse di σ e la matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma)$.

(b) Si determinino le sottovarietà lineari unite per f.

(c) Si determini un sistema di riferimento euclideo $\mathscr{R}'$ tale che il piano π (asse di σ) abbia equazione $X = \sqrt{30}$ (con X, Y, Z le incognite nel s.d.r. $\mathscr{R}'$).

Svolgimento. (a) La rigidità ha $\det(f) = -1$ quindi f è una rigidità inversa inoltre il sistema lineare dei punti uniti non ha soluzione quindi f è una glissoriflessione. L'autospazio di autovalore -1 per l'applicazione lineare soggiacente ha $V_{-1} = \langle e_1 + 5e_2 - 2e_3\rangle$ da cui $V_1 = V_{-1}^\perp$. Il vettore $v = 30e_1 = v_1 + v_2$ con

$v_1 = e_1 + 5e_2 - 2e_3 \in V_{-1}$ e $v_2 = 29e_1 - 5e_2 + 2e_3 \in V_1$. Quindi $f = t_{v_2}\sigma$ con $\tau = t_{v_2}$ traslazione di vettore v_2 e σ riflessione di asse $\pi : x + 5y - 2z = 15$ e $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 14/15 & -1/3 & 2/15 \\ 5 & -1/3 & -2/3 & 2/3 \\ -2 & 2/15 & 2/3 & 11/15 \end{pmatrix}$.

(b) Le sottovarietà lineari unite per f sono:
Punti uniti: nessuno;
Piani uniti: π e i piani $\pi_k : 2y + 5z = k$ con $k \in \mathbb{R}$;
Rette unite: rette $r_k = \pi \cap \pi_k$ contenute in π e parallele al vettore v_2.

(c) Sia $\mathscr{R}' := \{O'; u_1, u_2, u_3\}$ un sistema di riferimento euclideo tale che il piano π abbia equazione cartesiana $X = \sqrt{30}$. Allora $\pi = P + V_1$ si deve avere $V_1 = \langle u_2, u_3\rangle$ quindi per u_1 vi sono due scelte possibili: $u_1 = \pm\frac{v_1}{\|v_1\|}$ dovendo essere un versore ortogonale a V_1 (notiamo che $\|v_1\| = \sqrt{30}$). Inoltre se l'equazione di π in $\mathscr{R}'$ è $X = \sqrt{30}$ il piano π contiene il punto $P = O' + \sqrt{30}u_1$ quindi $O' = P - \sqrt{30}u_1$ cioè la nuova origine deve appartenere al piano π' ottenuto traslando π del vettore $-\sqrt{30}u_1$; $\pi' : x+5y-2z = -15$. Scelto $u_1 = \frac{v_1}{\sqrt{30}}$ e $P = O+15e_1 \in \pi$ si ottiene $O' = P - v_1 = O + 14e_1 - 5e_2 + 2e_3$. I vettore u_2, u_3 devono formare una base ortonormale di V_1 quindi il sistema di riferimento

$$\mathscr{R}' := \{O + 14e_1 - 5e_2 + 2e_3; \frac{e_1 + 5e_2 - 2e_3}{\sqrt{30}}, \frac{2e_1 + e_3}{\sqrt{5}}, \frac{e_1 - e_2 - 2e_3}{\sqrt{6}}\}$$

verifica la richiesta. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio affine $\mathbb{E}^5(\mathbb{R})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, \ldots, e_5\}$ si considerino le sottovarietà lineari*

$$\mathbb{L} : O + 3e_4 + \langle e_1 + e_2, e_2 - e_3\rangle \qquad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

(1) Si determinino: la posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$, $\dim(\mathbb{L}), \dim(\mathbb{M}), \dim(\mathbb{L}\cap\mathbb{M}), \dim(V_{\mathbb{L}}\cap V_{\mathbb{M}})$ e $\dim(\mathbb{L}\vee\mathbb{M})$.
(2) Determinare l'equazione cartesiana di un iperpiano τ contenente $\mathbb{M}$ e parallelo a $\mathbb{L}$. Un tale iperpiano è unico? Calcolare la distanza $d(\mathbb{L}, \mathbb{M})$.
(3) Determinare le equazioni cartesiane di tutte le sottovarietà lineari di dimensione 3 ortogonali a $\mathbb{L}$ ed incidenti $\mathbb{M}$.

Svolgimento. (1) Lo spazio direttore di $\mathbb{L}$ ha chiaramente dimensione 2 quindi $\dim(\mathbb{L}) = 2$, $\mathbb{M}$ è la soluzione di un sistema lineare di rango 2 in 5 incognite quindi $\dim(\mathbb{M}) = 3$. Le sottovarietà lineari sono disgiunte in quanto $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$ (si osservi che $\mathbb{L}$ è contenuta nell'iperpiano τ_1 di equazione $x_5 = 0$ mentre $\mathbb{M}$ è contenuta nell'iperpiano τ_2 di equazione $x_2 = 0$) quindi $\dim(\mathbb{L}\cap\mathbb{M}) = -1$; $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle e_1 - e_2 + 2e_3\rangle$ quindi $\dim(V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}) = 1$ mentre $\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = 1 + \dim(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) = 5$.

(2) Abbiamo già visto al punto precedente che l'iperpiano $\tau_2 : x_5 = 2$ contiene $\mathbb{M}$ ed è parallelo a $\mathbb{L}$. Un generico iperpiano contenente $\mathbb{M}$ appartiene al fascio proprio $\tau_{\alpha,\beta} : \alpha(x_1 + x_2 - x_4 - 1) + \beta(x_5 - 2) = 0$ con ${}^t(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2/\{(0, 0)\}$. Per imporre il parallelismo con $\mathbb{L}$ è necessario e sufficiente richiedere che $e_1+e_2 \in V_{\tau_{\alpha,\beta}}$ (visto che dal punto precedente sappiamo che $V_{\mathbb{L}}\cap V_{\mathbb{M}} = \langle e_1 - e_2 + 2e_3\rangle$) ovvero richiedere che $e_1 + e_2$ soddisfi l'equazione omogenea associata a $\tau_{\alpha,\beta}$ da cui si ottiene $2\alpha = 0$ perciò l'unico iperpiano contenente $\mathbb{M}$ e parallelo ad $\mathbb{L}$ è τ_2. Quindi la distanza $d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = d(L, \tau_2) = d(\tau_1, \tau_2) = 2$.

(3) Una sottovarietà lineare di dimensione 3 ortogonale a $\mathbb{L}$ deve avere come spazio direttore il sottospazio vettoriale $V_{\mathbb{L}}^{\perp} : x_1+x_2 = 0 = x_2-x_3$. Essendo $V_{\mathbb{L}}^{\perp}\cap V_{\mathbb{M}} = \langle e_1-e_2-e_3\rangle$ sia ha $\dim(V_{\mathbb{L}}^{\perp}+V_{\mathbb{M}}) = 3+3-1 = 5$ quindi qualunque sottovarietà lineare $\mathbb{P}_P : P + V_{\mathbb{L}}^{\perp}$ interseca $\mathbb{M} : M + V_{\mathbb{M}}$ (visto che $M - P \in V_{\mathbb{L}}^{\perp} + V_{\mathbb{M}} = \mathbb{R}^5$). Un talehy

□

ESERCIZIO 4.
(1) Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ siano σ_1 e σ_2 due riflessioni. Si determini una condizione necessaria e sufficiente sugli assi di σ_1 e σ_2 affinché la rigidità $\sigma_1 \circ \sigma_2$ sia una rotazione di angolo π.

(2) Siano τ_1 una glissoriflessione e σ_2 una riflessione. Si determini una condizione necessaria e sufficiente affinché la rigidità $\tau_1 \circ \sigma_2$ sia una rotazione di angolo π.

Svolgimento. (*1*) Siano π_1, π_2 i piani assi di riflessione di σ_1, σ_2 rispettivamente. Se π_1 e π_2 fossero paralleli la composizione $\sigma_1 \circ \sigma_2$ sarebbe l'identità nel caso $\pi_1 = \pi_2$ oppure una traslazione di vettore non nullo nel caso in cui i piani siano paralleli distinti. Quindi per ottenere una rotazione bisogna che i piani si intersechino in una retta $r := \pi_1 \cap \pi_2$. Sia $r = R + \langle u_1 \rangle$ con $\|u_1\| = 1$ e $\pi_1 = R + \langle u_1, u_2 \rangle$ con $u_1 \cdot u_2 = 0$ e $\|u_2\| = 1$. Si consideri il sistema di riferimento euclideo $\mathscr{R} := \{R; u_1, u_2, u_1 \times u_2\}$ si ha $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mentre $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ per un opportuno angolo θ (dalla condizione $r \subseteq \pi_2$ si ricavano le prime due colonne e dovendo essere la sottomatrice 2×2 in basso a destra una matrice ortogonale con determinante -1 si ricavano le ultime due colonne). Allora

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1)\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

che è una rotazione di angolo π se e solo se -1 è autovalore per l'applicazione lineare soggiacente il che succede se e solo se $\cos(\theta) = -1$. Da cui si ricava che $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ quindi $\pi_2 = R + \langle u_1, u_3 \rangle$.

In conclusione $\sigma_1 \circ \sigma_2$ è una rotazione di angolo π se e solo se i piani π_1, π_2 sono ortogonali fra loro.

(*2*) Essendo τ_1 una glissoriflessione essa si decompone come $\tau_1 = t_v \circ \sigma_1$ con σ_1 una riflessione di asse π_1 e t_v una traslazione di vettore $v \in V_{\pi_1}$ parallelo a π. L'applicazione lineare soggiacente a $\sigma_1 \circ \sigma_2$ coincide con l'applicazione lineare soggiacente a $\tau_1 \circ \sigma_2 = t_v \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$; quindi dal punto precedente si ricava che i piani π_1, π_2 assi di riflessione di σ_1 e σ_2 devono essere ortogonali fra loro. In questo caso $\sigma_1 \circ \sigma_2$ risulta una rotazione di angolo π e asse $r := \pi_1 \cap \pi_2$. Allora $\tau_1 \circ \sigma_2 = t_v \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$ risulta essere ancora una rotazione di angolo π se e solo se la traslazione t_v soddisfa alla codizione $v \in V_r^\perp$ (ricordiamo che $v \in V_{\pi_1}$). Riassumendo $\tau_1 \circ \sigma_2$ è una rotazione di angolo π se e solo se π_1 e π_2 sono ortogonali fra loro e il vettore $v \in V_r^\perp \cap V_{\pi_1}$. Perció, con le notazioni del punto precedente, se $r = R + \langle u_1 \rangle$, $\pi_1 = R + \langle u_1, u_2 \rangle$ e $\pi_2 = R + \langle u_1, u_3 \rangle$ si ottiene $v = au_2$ con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. $\square$