Forme multilineari alternanti e prodotto esterno

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Per ogni intero k, $2 \leq k \leq n$, indichiamo con $A^k(V)$ lo spazio vettoriale delle funzioni, $F : V^k \to C$, k-lineari ed alternanti; cioè le funzioni lineari in ciascuna delle k variabili e che si annullano non appena due tra gli argomenti coincidono (cf. §.4.1 del libro). Per $k = 1$, possiamo considerare $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$ (ogni applicazione lineare $\delta : V \to C$ può essere considerata alternante, non essendoci la possibilità di 'argomenti ripetuti'). Nella definizione di determinante si utilizzano gli elementi dello spazio $A^n(V)$ ($n = \dim V$), che ha dimensione 1, o meglio, le sue basi, che sono le forme n-lineari alternanti non identicamente nulle e che forniscono un "test" per valutare se n vettori di V sono linearmente indipendenti (cf. Proposizione 4.1.6 del libro). In queste pagine, vogliamo mostrare qualche ulteriore proprietà degli spazi $A^k(V)$ e di come si possa associare ad un applicazione lineare $\phi : V \to W$ delle applicazioni lineari $A^k(\phi) : A^k(W) \to A^k(V)$, al variare di k, e come queste contengano informazioni sull'applicazione ϕ da cui sono determinate.

Cominciamo con l'introdurre alcune notazioni sui multiindici che saranno indispensabili nel seguito.

Definizione. Siano n e k due interi non-negativi. Indichiamo con $\mathscr{I}_k^n$ l'insieme di tutte le funzioni $I : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ che siano strettamente crescenti [ovvero $x < y \Rightarrow I(x) < I(y)$].

È chiaro che $\#\mathscr{I}_k^n = \binom{n}{k}$ ovvero che vi sono tante funzioni crescenti da $\{1, \dots, k\}$ su $\{1, \dots, n\}$, quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con k elementi. In particolare, $\mathscr{I}_k^n = \varnothing$ se $k > n$. Ad esempio, $\mathscr{I}_2^3$ è costituito dalle tre funzioni I, J e K, definite da $I(1) = 1$, $I(2) = 2$; $J(1) = 1$, $J(2) = 3$; $K(1) = 2$, $K(2) = 3$.

Ciò detto, vogliamo dimostrare la seguente.

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. Lo spazio vettoriale $A^k(V)$ ha dimensione $\binom{n}{k}$ e k vettori $w_1, \dots, w_k$ di V sono linearmente dipendenti se, e solo se, $D(w_1, \dots, w_k) = 0$ per ogni D in una base di $A^k(V)$.*

dim. Sia D un elemento di $A^k(V)$ e sia fissata una base $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ di V. Dati dei vettori $w_1, \dots, w_k$ in V, si ha $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, k$. Quindi per la multilinearità di D, si ha

$$D(w_1, \dots, w_k) = D\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} v_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^n a_{i_k k} v_{i_k}\right) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} D(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}).$$

Ricordando che D è alternante, $D(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 0$ se qualcuno degli indici $i_1, \dots, i_k$ si ripete e, a meno di cambiare il segno di $D(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$, possiamo sempre riportarci al caso in cui la sequenza $i_1, \dots, i_k$ è strettamente crescente e definisce quindi un elemento di $\mathscr{I}_k^n$. Possiamo perciò scrivere:

$$D(w_1, \dots, w_k) = \sum_{I \in \mathscr{I}_k^n} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\mathrm{sgn}\sigma) a_{I(\sigma(1)),1} \cdots a_{I(\sigma(k)),k} \right) D(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)}),$$

da cui si vede che D è completamente determinata dai valori, $D(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)})$, al variare di I in $\mathscr{I}_k^n$. Quindi, $A^k(V)$ ha dimensione $\binom{n}{k}$ ed una sua base è costituita dalle funzioni $D_J : V^k \to C$, definite dalle condizioni $D_J(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)}) = \delta_{IJ}$, al variare di I e J in $\mathscr{I}_k^n$. In particolare, da quanto detto si vede come ad ogni base di V si possa associare una base di $A^k(V)$.

Abbiamo già visto che su una k-upla di vettori linearmente dipendenti si annulla ogni funzione k-lineare alternante (cf. Proposizione 4.1.4 del libro). Viceversa, dati k vettori linearmente indipendenti, $w_1, \dots, w_k$, possiamo completarli ad una base $\mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_n \}$ di V e quindi esiste una funzione $G \in A^k(V)$ tale che $G(w_1, \dots, w_k) = 1$ (ad esempio una delle funzioni della base di $A^k(V)$ associata alla base $\mathcal{W}$ di V). Quindi non è possibile che tutte le funzioni di una qualunque base di $A^k(V)$ si annullino in $w_1, \dots, w_k$ e ciò dimostra l'ultima parte dell'enunciato. **CVD** □

Possiamo quindi enunciare quanto visto nel corso della dimostrazione, ovvero

Corollario. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ una sua base. La applicazioni alternanti $D_J : V^k \to C$, definite dalle condizioni $D_J(v_{I(1)}, \dots, v_{I(k)}) = \delta_{IJ}$, al variare di I e J in $\mathscr{I}_k^n$ formano una base $\mathscr{D} = \{ D_J \mid J \in \mathscr{I}_k^n \}$ di $A^k(V)$.*

Fissata una base, per associare a un vettore le sue coordinate o per scrivere la matrice di un'applicazione lineare occorre aver fissato un buon ordinamento con cui prendere gli elementi della base. Una possibilità per fissare un buon ordine nell' insieme $\mathscr{I}_k^n$ consiste nel prendere l'*ordine lessicografico*, ovvero si pone $I < J$ in $\mathscr{I}_k^n$ se esiste un indice $i_0 \in \{1, \dots, k\}$, tale che $I(i) = J(i)$ per ogni $i < i_0$ ed $I(i_0) < J(i_0)$.

Esercizio. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e siano $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_4 \}$ e $\mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_4 \}$ due basi, legate dalla matrice di cambiamento di base $A = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino le basi di $A^2(V)$, $\mathscr{D} = \left\{ D_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_2^4 \right\}$, associata a $\mathcal{V}$ e $\mathscr{G} = \left\{ G_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_2^4 \right\}$, associata a $\mathcal{W}$ e si scriva la matrice di cambiamento di base $\alpha_{\mathscr{D},\mathscr{G}}(\mathrm{id})$. Stessi calcoli per gli spazi $A^3(V)$ e $A^4(V)$. □

Esercizio. Mettere in ordine lessicografico gli elementi di $\mathscr{I}_2^3$, $\mathscr{I}_2^4$, $\mathscr{I}_2^5$ e $\mathscr{I}_3^5$. □

Ad ogni spazio vettoriale, V, su C, si può quindi associare la collezione di spazi vettoriali $A^k(V)$, formati dalle applicazioni multilineari e alternanti su V, a valori in C. Alle applicazioni lineari tra spazi vettoriali, restano associate applicazioni lineari tra gli spazi di funzioni alternanti.

Definizione. Siano V e W due spazi vettoriali su C di dimensioni n ed m, rispettivamente, e sia $\phi : V \to W$ un'applicazione lineare. Per ogni valore di k, è definita l'applicazione lineare, $A^k(\phi) : A^k(W) \to A^k(V)$, che associa alla forma alternante $G \in A^k(W)$ la forma alternante $G^\phi \in A^k(V)$, definita da

$$G^\phi(u_1, \dots, u_k) = G(\phi(u_1), \dots, \phi(u_k)), \qquad \text{qualunque sia } (u_1, \dots, u_k) \in V^k.$$

Osserviamo in particolare che, se $k > \mathrm{rk}\,\phi$, comunque si scelgano $(u_1, \dots, u_k) \in V^k$, i vettori $\phi(u_1), \dots, \phi(u_k)$ sono linearmente dipendenti, e quindi $G^\phi(u_1, \dots, u_k) = 0$ per ogni G in $A^k(W)$. Dunque, $A^k(\phi)$ può essere diversa dalla funzione identicamente nulla solo quando $k \le \mathrm{rk}\,\phi$. Se $\mathrm{rk}\,\phi = r$, esistono r vettori, $u_1, \dots, u_r$, tali che i vettori $\phi(u_1), \dots, \phi(u_r)$ siano linearmente indipendenti. Per quanto visto nella Proposizione precedente, esiste una forma k-lineare alternante $G_0 \in A^r(W)$, tale che $G_0(\phi(u_1), \dots, \phi(u_r)) \neq 0$ e quindi $G_0^\phi \neq 0$ e di conseguenza l'applicazione $A^r(\phi) \neq 0$.

Vediamo la cosa dal punto di vista delle matrici. Fissate una base $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ di V ed una base $\mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_m \}$ di W, possiamo associare a $\phi : V \to W$ la matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$. Per ogni valore di k, possiamo associare alle basi date, una base $\mathscr{D} = \{ D_I \mid I \in \mathscr{I}_k^n \}$ di $A^k(V)$ ed una base $\mathscr{G} = \{ G_H \mid H \in \mathscr{I}_k^m \}$ di $A^k(W)$, ove le forme alternanti sono definite dalle condizioni $D_I(v_{J(1)}, \dots, v_{J(k)}) = \delta_{IJ}$, al variare di I e J in $\mathscr{I}_k^n$ (risp. $G_H(w_{K(1)}, \dots, w_{K(k)}) = \delta_{HK}$, al variare di H e K in $\mathscr{I}_k^m$). Vogliamo cercare di descrivere le relazioni che intercorrono tra le entrate della matrice A e quelle della matrice $\alpha_{\mathscr{G},\mathscr{D}}(A^k(\phi))$. Sia quindi dato $G_H \in \mathscr{G}$ e $J \in \mathscr{I}_k^n$ ed andiamo a calcolare la forma $A^k(\phi)(G_H) = G_H^\phi$ su $(v_{J(1)}, \dots, v_{J(k)}) \in V^K$.

$$\begin{aligned}
G_H^\phi(v_{J(1)}, \dots, v_{J(k)}) &= G_H(\phi(v_{J(1)}), \dots, \phi(v_{J(k)})) = \\
&= G_H\left(\sum_{i_1=1}^m a_{i_1,J(1)} w_{i_1}, \dots, \sum_{i_k=1}^m a_{i_k,J(k)} w_{i_k} \right) = \\
&= \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le m} a_{i_1,J(1)} \cdots a_{i_k,J(k)} G_H(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) = \\
&= \sum_{K \in \mathscr{I}_k^m} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\mathrm{sgn}\sigma) a_{K(\sigma(1)),J(1)} \cdots a_{K(\sigma(k)),J(k)} \right) G_H(w_{K(1)}, \dots, w_{K(k)}) = \\
&= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\mathrm{sgn}\sigma) a_{H(\sigma(1)),J(1)} \cdots a_{H(\sigma(k)),J(k)}
\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza discende dal fatto che $G_H(w_{K(1)}, \dots, w_{K(k)}) = \delta_{H,K}$, mentre le uguaglianze precedenti sono conseguenze del fatto che G_H è multilineare ed alternante. Quindi, posto

$$b_{J,H} = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\mathrm{sgn}\sigma) a_{H(\sigma(1)),J(1)} \cdots a_{H(\sigma(k)),J(k)}$$

al variare di J in $\mathscr{I}_k^n$, possiamo scrivere $A^k(\phi)(G_H) = \sum_{J \in \mathscr{I}_k^n} b_{J,H} D_J$. In particolare, si può osservare che $b_{J,H}$ è il determinante della sottomatrice quadrata, di ordine k, che si ottiene da A prendendo gli elementi posti all'intersezione tra le righe $H(1), \dots, H(k)$ e le colonne $J(1), \dots, J(k)$ (ovvero il *minore* estratto da A tramite la scelta delle righe e colonne indicate).

Esercizio. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo (e quindi $V = W$), e si consideri la stessa base $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ in partenza ed in arrivo. Si verifichi che l'applicazione lineare $A^n(\phi) : A^n(V) \to A^n(V)$ altro non è che la moltiplicazione per $\det \phi$. □

Esercizio. Siano V e W spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ e siano fissate le rispettive basi $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_4 \}$ e $\mathcal{W} = \{ w_1, \dots, w_3 \}$. Sia $\phi : V \to W$ l'applicazione lineare di matrice $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Fissate le basi , $\mathscr{D} = \left\{ D_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_2^4 \right\}$ di $A^2(V)$, associata a $\mathcal{V}$, e $\mathscr{G} = \left\{ G_I \,\middle|\, I \in \mathscr{I}_2^3 \right\}$ di $A^2(W)$, associata a $\mathcal{W}$, si scriva la matrice $\alpha_{\mathscr{G},\mathscr{D}}(A^2(\phi))$. Stessi calcoli per $A^3(\phi)$. Infine, se un'applicazione $\phi : V \to W$ ha rango r, si mostri che il rango di $A^k(\phi)$ è uguale a $\binom{r}{k}$. □

Alla collezione di spazi $A^k(V)$, per $k = 1, \dots, n$, si aggiunge di solito lo spazio $A^0(V) = C$ e l'applicazione $A^0(\phi)$ è uguale all'identità per ogni omomorfismo ϕ.

Per quanto visto, data una base $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ di V, resta determinata una base $d_1, \dots, d_n$ di $A^1(V)$ (la *base duale*) definita ponendo $d_i(v_j) = \delta_{i,j}$, per ogni i, j in $\{1, \dots, n\}$. Vogliamo studiare lo spazio vettoriale $A(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(V)$ e il seguito di questi fogli è dedicato a mostrare la seguente

Proposizione. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su C. Esiste un prodotto (non-commutativo) $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \wedge \mu$, tra gli elementi di $A(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} A^k(V)$ che lo rende un'algebra graduata su C, ove gli elementi di grado k di $A(V)$ sono gli elementi di $A^k(V)$, per ogni $k = 0, \dots, n$. In particolare, $A(V)$ è generata come algebra dagli elementi di grado 1. Ovvero, indicata con $d_1, \dots, d_n$ una base di $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$, ogni elemento, ω di $A^k(V)$ si scrive nella forma*

$$\omega = \sum_{I \in \mathscr{I}_k^n} a_I d_{I(1)} \wedge \cdots \wedge d_{I(k)},$$

al variare dei coefficienti a_I in C.

Dire che si ha un'algebra graduata, significa dire che il prodotto di un elemento di $A^h(V)$ per un elemento di $A^k(V)$ dà un elemento di $A^{h+k}(V)$ (ove si prenda $A^t(V) = \langle 0 \rangle$ per $t > n$). Il prodotto per elementi di $A^0(V) = C$ coincide con il prodotto per scalari in ciascuno degli spazi vettoriali $A^k(V)$, andiamo a definire il prodotto per elementi di grado positivo.

Per procedere abbiamo bisogno di introdurre qualche ulteriore notazione sui multiindici.

Definizione. Siano h, k, n interi positivi.

(a) Date due funzioni $I : \{1, \dots, h\} \to \{1, \dots, n\}$ e $J : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, n\}$ (non necessariamente crescenti) si definisce la funzione

$$I \vee J : \{1, \dots, h+k\} \to \{1, \dots, n\}, \qquad \text{ponendo } I \vee J(x) = \begin{cases} I(x) & \text{se } 1 \le x \le h \\ J(x-h) & \text{se } h+1 \le x \le h+k \end{cases}$$

(b) Se $I \in \mathscr{I}_h^n$, $J \in \mathscr{I}_k^n$ e $\mathrm{im}\, I \cap \mathrm{im}\, J = \varnothing$ (e quindi $n \ge h+k$), esiste un'unica permutazione, $\sigma \in \Sigma_{h+k}$, tale che $(I \vee J) \circ \sigma \in \mathscr{I}_{h+k}^n$. In tal caso, scriveremo $\mathrm{sgn}(I \vee J)$ per indicare $\mathrm{sgn}\sigma$

Si osservi che, se $n = h+k$, allora $I \vee J \in \Sigma_n$ e la definizione di $\mathrm{sgn}(I \vee J)$ coincide con l'usuale definizione di segnatura. Lasciamo al lettore il compito di verificare che, nelle ipotesi di (b), si ha

$$\mathrm{sgn}(I \vee J) = (-1)^{hk} \mathrm{sgn}(J \vee I). \tag{$*$}$$

Inoltre, date $I \in \mathscr{I}_h^{h+k}$, $J \in \mathscr{I}_k^{h+k}$, $I' \in \mathscr{I}_{h+k}^{h+k+l}$, $K \in \mathscr{I}_l^{h+k+l}$, con $\mathrm{im}\, I' \cap \mathrm{im}\, K = \varnothing$ ed $\mathrm{im}\, I \cap \mathrm{im}\, J = \varnothing$ si ha

$$\mathrm{sgn}((I' \circ I) \vee (I' \circ J) \vee K) = \mathrm{sgn}(I \vee J)\mathrm{sgn}(I' \vee K).$$

Definizione. Data $I \in \mathscr{I}_h^{h+k}$ esiste un'unica funzione $cI \in \mathscr{I}_k^{h+k}$, tale che $I \vee cI \in \Sigma_{h+k}$. La corrispondenza $c : \mathscr{I}_h^{h+k} \to \mathscr{I}_k^{h+k}$ è biunivoca e si ha $ccI = I$[†].

Date $I_0 \in \mathscr{I}_h^{h+k}$ ed $I_1 \in \mathscr{I}_{h+k}^{h+k+l}$, il lettore è invitato a verificare che si ha $(I_1 \circ I_0) \vee (I_1 \circ cI_0) \vee cI_1 \in \Sigma_{h+k+l}$, e

$$\mathrm{sgn}((I_1 \circ I_0) \vee (I_1 \circ cI_0) \vee cI_1) = \mathrm{sgn}(I_0 \vee cI_0)\mathrm{sgn}(I_1 \vee cI_1). \tag{$**$}$$

Sullo spazio $A(V) = \bigoplus_{k=0}^n A^k(V)$ si definisce un prodotto (il *prodotto esterno*) di due forme alternanti, $F \in A^h(V)$ e $G \in A^k(V)$, come la funzione $F \wedge G \in A^{h+k}(V)$, definita da

$$\boxed{F \wedge G(w_1, \dots, w_{h+k}) = \sum_{I \in \mathscr{I}_h^{h+k}} \mathrm{sgn}(I \vee cI) F(w_{I(1)}, \dots, w_{I(h)}) G(w_{cI(1)}, \dots, w_{cI(k)})}$$

al variare di $(w_1, \dots, w_{h+k}) \in V^{h+k}$. D'ora in poi, per brevità, scriveremo w_I per indicare la h-upla $(w_{I(1)}, \dots, w_{I(h)})$, al variare di $I \in \mathscr{I}_h^{h+k}$ (e, più in generale, per *ogni* funzione $I : \{1, \dots, h\} \to \{1, \dots, h+k\}$); analogamente, scriveremo w_σ, con $\sigma \in \Sigma_{h+k}$, per indicare $(w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(h+k)})$. Dimostreremo che $F \wedge G \in A^{h+k}(V)$ e che il prodotto esterno gode delle seguenti proprietà

(†) Lasciamo al lettore il compito di verificare che $\mathrm{sgn}(I \vee cI) = (-1)^{\sum_{j=1}^{k} I(j)-j}$.

- $F \wedge G = (-1)^{hk} G \wedge F$ per ogni $F \in A^h(V)$, e $G \in A^k(V)$;
- $(F + F') \wedge G = F \wedge G + F' \wedge G$, per ogni $F, F' \in A^h(V)$ e $G \in A^k(V)$;
- $(aF) \wedge G = F \wedge (aG) = a(F \wedge G)$, per ogni $F \in A^h(V)$, $G \in A^k(V)$, $a \in C$;
- $(F \wedge G) \wedge H = F \wedge (G \wedge H)$, per ogni $F \in A^h(V)$, $G \in A^k(V)$, $H \in A^l(V)$.

Cominciamo col verificare che $F \wedge G \in A^{h+k}(V)$. Sia $w = (w_1, \dots, w_{h+k}) \in V^{h+k}$ e sia fissata una permutazione $\sigma \in \Sigma_{h+k}$. Allora

$$F \wedge G(w_\sigma) = \sum_{I \in \mathscr{I}_h^{h+k}} \mathrm{sgn}(I \vee cI) F(w_{\sigma \circ I}) G(w_{\sigma \circ cI}).$$

Detto I' l'unico elemento di $\mathscr{I}_h^{h+k}$ tale che $\mathrm{im} I' = \mathrm{im}(\sigma \circ I)$, allora $\mathrm{im} cI' = \mathrm{im}(\sigma \circ cI)$ e ci sono due permutazioni, α_1 ed α_2 che riordinano l'immagine di $\sigma \circ I$ e di $\sigma \circ cI$. Dunque $(\mathrm{sgn}\alpha_1)(\mathrm{sgn}\alpha_2)\mathrm{sgn}(I' \vee cI') = (\mathrm{sgn}\sigma)\mathrm{sgn}(I \vee cI)$ perché entrambe queste permutazioni riordinano $(\sigma \circ I) \vee (\sigma \circ cI)$; e inoltre, $F(w_{\sigma \circ I}) = (\mathrm{sgn}\alpha_1) F(w_{I'})$ e $G(w_{\sigma \circ cI}) = (\mathrm{sgn}\alpha_2) G(x_{cI'})$ perché F e G sono alternanti. Si conclude che

$$F \wedge G(w_\sigma) = \mathrm{sgn}\sigma \sum_{I' \in \mathscr{I}_{h+k}^h} \mathrm{sgn}(I' \vee cI') F(w_{I'}) G(w_{cI'}) = (\mathrm{sgn}\sigma) F \wedge G(w).$$

Passiamo ora a verificare le proprietà del prodotto esterno. Per quanto visto in $(*)$, $\mathrm{sgn}(cI \vee I) = (-1)^{hk} \mathrm{sgn}(I \vee cI)$, qualunque sia $I \in \mathscr{I}_h^{h+k}$. Quindi si ha

$$G \wedge F(w) = \sum_{J \in \mathscr{I}_k^{h+k}} \mathrm{sgn}(J \vee cJ) G(w_J) F(w_{cJ}) = \sum_{I \in \mathscr{I}_h^{h+k}} \mathrm{sgn}(cI \vee I) F(w_I) G(w_{cI}) = (-1)^{hk} F \wedge G(w).$$

La distributività del prodotto esterno rispetto alla somma e la sua compatibilità col prodotto per costanti è immediata. Resta da verificare la proprietà associativa.

Si ha (si ricordi $(**)$ per le segnature)

$$\begin{aligned}(F \wedge G) \wedge H(w) &= \sum_{I \in \mathscr{I}_{h+k}^{h+k+l}} \mathrm{sgn}(I \vee cI)(F \wedge G)(w_I) H(w_{cI}) = \\ &= \sum_{I \in \mathscr{I}_{h+k}^{h+k+l}} \sum_{J \in \mathscr{I}_h^{h+k}} \mathrm{sgn}(I \vee cI)\mathrm{sgn}(J \vee cJ) F(w_{I \circ J}) G(w_{I \circ cJ}) H(w_{cI}) = \\ &= \sum_{I \in \mathscr{I}_{h+k}^{h+k+l}} \sum_{J \in \mathscr{I}_h^{h+k}} \mathrm{sgn}((I \circ J) \vee (I \circ cJ) \vee cI) F(w_{I \circ J}) G(w_{I \circ cJ}) H(w_{cI}).\end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}F \wedge (G \wedge H)(w) &= \sum_{I' \in \mathscr{I}_h^{h+k+l}} \mathrm{sgn}(I' \vee cI') F(w_{I'})(G \wedge H)(w_{cI'}) = \\ &= \sum_{I' \in \mathscr{I}_h^{h+k+l}} \sum_{J' \in \mathscr{I}_k^{k+l}} \mathrm{sgn}(I' \vee cI')\mathrm{sgn}(J' \vee cJ') F(w_{I'}) G(w_{cI' \circ J'}) H(w_{cI' \circ cJ'}) = \\ &= \sum_{I' \in \mathscr{I}_h^{h+k+l}} \sum_{J' \in \mathscr{I}_k^{k+l}} \mathrm{sgn}(I' \vee (cI' \circ J') \vee (cI' \circ cJ')) F(w_{I'}) G(w_{cI' \circ J'}) H(w_{cI' \circ cJ'}).\end{aligned}$$

Il numero degli addendi nelle due somme è lo stesso e, fissata una coppia di (multi-)indici I, J come sopra, esiste un'unica coppia (I', J') tale che $I' = I \circ J$ e $I \circ cJ = cI' \circ J'$; in tal caso, necessariamente si ha $cI = cI' \circ cJ'$ e quindi le due somme coincidono.

Sono così dimostrate le proprietà del prodotto esterno e resta da dimostrare che l'algebra eseterna è generata dagli elementi di grado 1..

Sia data una base $\mathcal{V} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ di V e consideriamo la base $d_1, \dots, d_n$ di $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$ descritta sopra. Osserviamo che, in base alle definizioni date, $d_i \wedge d_j : V \times V \to C$ è l'applicazione bilineare alternante che manda la coppia (w_1, w_2) su $d_i(w_1)d_j(w_2) - d_i(w_2)d_j(w_1)$ e quindi si tratta di un'applicazione non nulla [vale 1 sulla coppia (v_i, v_j)]. Se consideriamo le coppie $d_i \wedge d_j$ per $1 \le i < j \le n$, è facile verificare che si tratta di una base di $A^2(V)$. Infatti, data un'applicazione bilineare alternante, $G : V \times V \to C$, e posto $g_{ij} = G(v_i, v_j)$, per $1 \le i < j \le n$, si ha che

$$G(v, w) = \sum_{1 \le i < j \le n} g_{ij} d_i \wedge d_j(v, w)$$

per ogni coppia $(v, w) \in V \times V$ e inoltre, i prodotti $d_i \wedge d_j$ per $1 \leq i < j \leq n$, sono linearmente indipendenti, perché

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} b_{ij} d_i \wedge d_j = 0 \qquad \text{implica} \qquad 0 = \sum_{1\leq i<j\leq n} b_{ij} d_i \wedge d_j(v_{i_0}, v_{j_0}) = b_{i_0 j_0}$$

qualunque siano $1 \leq i_0 < j_0 \leq n$.

Analogamente, se consideriamo le forme $d_I = d_{I(1)} \wedge \cdots \wedge d_{I(k)}$, al variare di $I \in \mathscr{I}_k^n$, si verifica che, presa una k-upla di vettori $w = (w_1, \ldots, w_k)$ in V^k, si ha

$$d_I(w) = \sum_{\sigma\in\Sigma_k} (\operatorname{sgn}\sigma) d_{I(1)}(w_{\sigma(1)}) \cdots d_{I(k)}(w_{\sigma(k)}).$$

Lasciamo quindi al lettore il compito di scrivere i dettagli della dimostrazione della seguente Proposizione che completa la descrizione della struttura di $A(V)$.

Proposizione. *Notazioni come sopra. Le forme $d_I = d_{I(1)} \wedge \cdots \wedge d_{I(k)}$, al variare di $I \in \mathscr{I}_k^n$, coincidono con la base $\mathscr{D} = \{ D_I \mid I \in \mathscr{I}_k^n \}$ di $A^k(V)$ descritta in precedenza.*

Esercizio. Sia $\phi : V \to V$ un endomorfismo e sia $\phi^* = A^1(\phi) : A^1(V) \to A^1(V)$. Fissata comunque, una base $\mathcal{V} = \{ v_1, \ldots, v_n \}$ di V e la corrispondente base $\mathcal{D} = \{ d_1, \ldots, d_n \}$ di $A^1(V)$, si mostri che

$$\phi^*(d_1) \wedge \cdots \wedge \phi^*(d_n) = (\det \phi) d_1 \wedge \cdots \wedge d_n.$$

$\square$

A conclusione di questa discussione, possiamo ricordare che le forme k-lineari alternanti su uno spazio V, di dimensione n, si ottengono tutte a partire dalle forme 1-lineari (e scrivere alternanti sarebbe superfluo, visto che c'è un unico argomento), ovvero dagli elementi di $A^1(V) = \operatorname{Hom}_C(V, C)$, facendo combinazioni lineari di prodotti esterni di elementi di $A^1(V)$ (k fattori in ogni addendo).

Lo spazio $\operatorname{Hom}_C(V, C)$ si indica a volte con il simbolo V^* ed è chiamato lo *spazio vettoriale duale* di V. Data un'applicazione lineare $\phi : V \to W$, l'applicazione indotta $A^1(\phi) : A^1(W) \to A^1(V)$, $d \mapsto d \circ \phi$, è anche detta l'applicazione lineare trasposta. Di questo ci occuperemo nelle prossime lezioni.