Una dimostrazione del teorema di Hamilton-Cayley

Nell'ambito del corso presento una dimostrazione del *Teorema di Hamilton-Cayley* diversa da quella riportata nel libro (Bertapelle–Candilera) e mi servo di questo risultato per arrivare tramite il lemma C.2.3 del libro stesso alla decomposizione in somma diretta di sottospazi di autovettori generalizzati di uno spazio vettoriale con un fissato endomorfismo. Per dare un riferimento preciso allo studente, riporto qui la dimostrazione del teorema fatta a lezione.

Ricordo che, dato un endomorfismo, $\phi : V \to V$ di uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C, si chiama *polinomio caratteristico* di ϕ, il polinomio monico di grado n, $p_\phi(X) = \det(X\mathbf{1}_n - A)$, ove $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$ è la matrice di ϕ in una base $\mathcal{V}$ dello spazio V. Indichiamo poi con $J_\phi = \{ P(X) \in C[X] \mid P(\phi) = 0 \}$ l'ideale dei polinomi che, calcolati in ϕ producono l'endomorfismo nullo. Naturalmente, se $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, $J_\phi = J_A = \{ P(X) \in C[X] \mid P(A) = \mathbf{0} \}$. Si chiama *polinomio minimo* di ϕ, il generatore monico, $\lambda_\phi(X)$, dell'ideale J_ϕ, ovvero il polinomio monico, di grado minimo che si annulla, calcolato in ϕ.

Teorema. [Hamilton-Cayley] *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C e $\phi : V \to V$ un endomorfismo. Allora $p_\phi(\phi) = 0$. Ovvero il polinomio minimo di ϕ divide il polinomio caratteristico ed, inoltre, i due polinomi hanno gli stessi zeri.*

dim. Sia fissata una base $\mathcal{V}$ di V e sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$. È sufficiente dimostrare che $p_\phi(A) = 0$ in $M_n(C)$. Sia $p_\phi(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + X^n$ e consideriamo le matrici

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = a_0\mathbf{1}_n + a_1X\mathbf{1}_n + \cdots + X^n\mathbf{1}_n \qquad \text{e} \qquad p_\phi(A) = a_0\mathbf{1}_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + A^n.$$

Osserviamo che, per ogni intero $k \geq 1$, $X^k\mathbf{1}_n - A^k = (X\mathbf{1}_n - A)B_k(X)$, ove $B_k(X) = X^{k-1}\mathbf{1}_n + X^{k-2}A + \cdots + XA^{k-2} + A^{k-1}$ è una matrice ad elementi in $C[X]$. Quindi, si ha

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n - p_\phi(A) = (X\mathbf{1}_n - A)B(X),$$

ove $B(X)$ è un'opportuna matrice ad elementi in $C[X]$. D'altro canto, ricordando la regola di Laplace, si ha

$$p_\phi(X)\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} \det(X\mathbf{1}_n - A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det(X\mathbf{1}_n - A) \end{pmatrix} = (X\mathbf{1}_n - A)M(X)$$

ove $M(X)$ è la matrice dei complementi algebrici di $X\mathbf{1}_n - A$ e quindi una matrice ad elementi in $C[X]$. Dalle due relazioni si ricava $p_\phi(A) = (X\mathbf{1}_n - A)D(X)$, ove $D(X) = M(X) - B(X)$ è una matrice ad elementi in $C[X]$. $p_\phi(A)$ è una matrice ad elementi in C e quindi l'uguaglianza è possibile se, e solo se, $D(X) = 0$[†]. In conclusione, $D(X) = 0$ e quindi $p_\phi(A) = 0$.

Infine, sia c un autovalore per ϕ e $v \neq 0$ un autovettore ad esso relativo. Se $\lambda_\phi(X) = b_0 + b_1X + \cdots + X^m$ indica il polinomio minimo di ϕ, allora $\lambda_\phi(\phi)$ è l'endomorfismo nullo e si ha

$$0 = \lambda_\phi(\phi)(v) = b_0v + b_1\phi(v) + b_2\phi^2(v) + \cdots + \phi^m(v) = (b_0 + b_1c + b_2c^2 + \cdots + c^m)v = \lambda_\phi(c)v.$$

Essendo v un vettore non nullo, si conclude che $\lambda_\phi(c) = 0$ e quindi tutti gli autovalori sono radici del polinomio minimo di ϕ. □

(†) Infatti, se fosse $D(X) = D_0 + XD_1 + \cdots + X^rD_r$ con $D_j \in M_n(C)$ e $D_r \neq 0$, il prodotto con $X\mathbf{1}_n - A$ sarebbe uguale a $X^{r+1}D_r$ + (termini di grado $\leq r$), e non potrebbe essere una matrice ad elementi in C.