Isometrie nel piano e nello spazio euclideo

Le isometrie (trasformazioni rigide) di uno spazio euclideo, $\mathbb{E}$, sono tutte e sole le affinità $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, associate ad un'applicazione lineare, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, che rispetta il prodotto scalare; ovvero, per ogni punto P ed ogni vettore v, si ha $f(P + v) = f(P) + \phi(v)$, e inoltre $\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$, per ogni coppia di vettori v, w. Possiamo distinguerle in *isometrie dirette*, ovvero isometrie che conservano l'orientamento dello spazio ($\det \phi = 1$) ed *isometrie inverse* che invertono l'orientamento dello spazio ($\det \phi = -1$).

Consideriamo il riferimento ortonormale $\mathcal{R} = \{O, e_1, \ldots, e_n\}$ nello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$. Un'isometria $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, associata all'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ha una matrice del tipo

$$\alpha_{\mathcal{R},\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & R \end{pmatrix}, \quad \text{ove } t = f(O) - O \in \mathbb{R}^n \text{ ed } R = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) \in O_n, \text{ ovvero } {}^tRR = \mathbf{1}_n.$$

Vogliamo classificare (seguendo Eulero) le isometrie del piano.

(1) Sia $R \in SO_2$, ovvero $R = R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

  (a) R ha l'autovalore 1 se, e solo se, $R = \mathbf{1}_2$. In tal caso è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ (†), e quindi f è la *traslazione* di vettore t ($f(P) = P + t$ per ogni punto P del piano).

  (b) se $R = R_\vartheta$ non ha l'autovalore 1, ovvero $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, allora f ha un punto unito. Infatti, posto $X = O + x$; $f(X) = O + t + \phi(x) = X = O + x$ se, e solo se, $(\phi - 1)(x) = -t$, e quindi, essendo $\phi - 1$ invertibile, esiste un unico vettore, x, nella controimmagine di $-t$. Dunque f è una *rotazione* di centro $O + x$ ed angolo ϑ.

(2) Sia ora $R \in O_2$, con $\det R = -1$. Allora ϕ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, con autovalori 1 e -1, entrambi di molteplicità 1. Detti $\langle v \rangle$ e $\langle w \rangle$ i corrispondenti spazi di autovettori (tra loro ortogonali), scriviamo $f(O) - O = t = av + bw$.

  (a) Se $a = 0$ e $t = bw$, tutti i punti della retta $r = O + (b/2)w + \langle v \rangle$ sono uniti. Infatti, qualunque sia $s \in \mathbb{R}$, si ha $f(O+(b/2)w+sv) = O+t+\phi((b/2)w+sv) = O+bw-(b/2)w+sv = O+(b/2)w+sv$. Dunque f è la *riflessione* (o *simmetria ortogonale*) di asse r.

  (b) Se $t = av + bw$, con $a \neq 0$, allora f si ottiene applicando la simmetria descritta al punto precedente seguita dalla traslazione di vettore av (parallelo all'asse di simmetria). Quindi non vi sono punti uniti per f e si parla di *glisso-riflessione* (di asse r).

In conclusione, le possibili isometrie del piano euclideo sono: traslazioni, rotazioni, riflessioni e glisso-riflessioni

Passiamo ora alle isometrie dello spazio euclideo tridimensionale ed osserviamo che, in questo caso l'applicazione lineare associata, ϕ, ha sempre un autovalore reale.

(1) Sia $R \in SO_3$, e quindi ϕ abbia l'autovalore 1.

  (a) Se lo spazio di autovettori relativi ad 1 ha dimensione 3, ovvero $R = \mathbf{1}_3$, allora f è la *traslazione* di vettore t.

  (b) Se $R \neq \mathbf{1}_3$, allora esiste un sottospazio $\langle v_0 \rangle$ di dimensione 1 di autovettori relativi all'autovalore 1. Distinguiamo due possibilità.

  - Sia $t = f(O) - O \in \langle v_0 \rangle^\perp$. Allora esiste un vettore $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $(\phi - 1)(x_0) = -t$. Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, $\phi(x) \cdot v_0 = \phi(x) \cdot \phi(v_0) = x \cdot v_0$, ovvero $(\phi(x) - x) \cdot v_0 = 0$; quindi $\mathrm{im}(\phi - 1) \subseteq \langle v_0 \rangle^\perp$ ed i due sottospazi coincidono per motivi di dimensione. Quindi tutti i punti della retta $h = O + x_0 + \langle v_0 \rangle$ sono uniti per f e quindi f è una *rotazione* di asse h ed angolo ϑ, tale che $\mathrm{tr}\phi = 1 + 2\cos\vartheta$. Infatti, su qualsiasi piano ortogonale all'asse induce un'isometria diretta con un punto unito. In particolare, se l'angolo di rotazione è uguale a π, si parla anche di *riflessione* rispetto all'asse.

(†) Si ricordi che R è una matrice normale, ovvero commuta con la sua trasposta, e quindi è unitariamente diagonalizzabile su $\mathbb{C}$, e gli autovalori sono numeri complessi di modulo 1.

- Sia quindi $t = f(O) - O = n + cv_0$, con $n \in \langle v_0 \rangle^{\perp}$ e $c \neq 0$. Allora f si ottiene facendo seguire alla rotazione di asse $h = O + (\phi - 1)^{-1}(-n)$ (controimmagine del vettore) descritta sopra, la traslazione di vettore cv_0, parallelo all'asse di rotazione. Si tratta quindi di una *roto-traslazione* (detta anche *glisso-rotazione*) di asse h, priva di punti uniti.

(2) Sia ora $R \in O_3$, con $\det R = -1$, e quindi ϕ abbia l'autovalore -1. Sia $n_0 \neq 0$ un autovettore relativo all'autovalore -1 e consideriamo il sottospazio $\langle n_0 \rangle^{\perp}$.

(a) Se ϕ induce l'identità su $\langle n_0 \rangle^{\perp}$, possiamo distinguere due casi.

- Sia $f(O) - O = t = cn_0$. Allora tutti i punti del piano $\pi = O + (c/2)n_0 + \langle n_0 \rangle^{\perp}$ sono punti uniti per f ed f è una *riflessione* rispetto al piano π.
- Sia $f(O) - O = t = v_0 + cn_0$, con $0 \neq v_0 \in \langle n_0 \rangle^{\perp}$. Allora f si ottiene come composizione della riflessione descritta sopra seguita dalla traslazione parallela al vettore v_0 (parallelo al piano di riflessione). Dunque f è una *glisso-riflessione* e non ha punti uniti.

(b) Se ϕ induce una rotazione di angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ su $\langle n_0 \rangle^{\perp}$. Sia $f(O) - O = t = v_0 + cn_0$, con $0 \neq v_0 \in \langle n_0 \rangle^{\perp}$. Indichiamo con $\rho_\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse n_0 ed angolo ϑ e sia $f_1 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'affinità definita da $f_1(O + x) = O + v_0 + \rho_\vartheta(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^3$ (ovvero la rotazione di angolo ϑ ed asse la retta $(O + x_0) + \langle n_0 \rangle$, ove $x_0 \in \langle n_0 \rangle^{\perp}$ e $\rho_\vartheta(x_0) = -v_0$). Sia poi $f_2 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto al piano $\pi = O + (c/2)n_0 + \langle n_0 \rangle^{\perp}$. Allora, per ogni punto $X = O + v + sn_0$, con $v \in \langle n_0 \rangle^{\perp}$, si ha $f(X) = f_2(f_1(X))$. Infatti

$$\begin{aligned} f(X) = O + t + \phi(v + sn_0) = O + v_0 + cn_0 + \phi(v) - sn_0 = O + v_0 + cn_0 + \rho_\vartheta(v) - sn_0 = \\ = f_2(O + v_0 + \rho_\vartheta(v + sn_0)) = f_2(f_1(O + v + sn_0)) = f_2(f_1(X)). \end{aligned}$$

Quindi f si ottiene come composizione della rotazione di angolo ϑ attorno alla retta $(O + x_0) + \langle n_0 \rangle$ seguita dalla riflessione rispetto al piano $\pi = O + (c/2)n_0 + \langle n_0 \rangle^{\perp}$. Si tratta quindi di una *roto-riflessione*, che ha come unico punto unito il punto di intersezione tra l'asse di rotazione ed il piano di riflessione $(O + x_0 + (c/2)n_0)$. Nel caso in cui l'angolo di rotazione, ϑ, sia uguale a π, si parla anche di *simmetria centrale* o *riflessione* rispetto al punto unito.

In conclusione, le possibili isometrie dirette dello spazio euclideo sono: traslazioni, rotazioni e roto-traslazioni, mentre le isometrie inverse sono: riflessioni, glisso-riflessioni e roto-riflessioni.