per chi vuol capire la forma di Jordan e non c'è ancora riuscito

Il 12 aprile del 2000, Valentino Cristante propose questa serie di esercizi ai suoi studenti, sperando di rendere maggiormente comprensibile la determinazione della forma di Jordan di un endomorfismo (nilpotente) e presentandoli con il titolo riportato sopra. Mi permetto di riprodurli qui, lasciando a Cristante il merito della scelta degli argomenti ed assumendomi completamente la responsabilità di aver introdotto eventuali errori nella trascrizione.

Siano C un corpo, $n \geq 1$ un intero e

$$J(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(C)$$

la *matrice di Jordan nilpotente* di ordine n e rango $n-1$ [blocco di Jordan di ordine n].

Come sappiamo, ogni matrice (quadrata) nilpotente è simile ad una matrice di Jordan, cioè ad una matrice del tipo

$$J = J_{(r_1,\dots,r_s)} = \begin{pmatrix} J(r_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(r_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(r_s) \end{pmatrix}.$$

Più precisamente, se si richiede che sia $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_s$, allora ogni classe di simiglianza di matrici nilpotenti contiene un'unica matrice di tipo J. Dunque, ad ogni matrice nilpotente, $A \in M_n(C)$ (risp. endomorfismo nilpotente ϕ di C^n) restano associati un intero s, $1 \leq s \leq n$, ed una successione non crescente r_i, $i = 1, \dots, s$, di interi ≥ 1, tali che $r_1 + \dots + r_s = n$; tale successione, che determina la classe di simiglianza di A (risp. la matrice di Jordan di ϕ), sarà detta la *successione di Jordan* di A (risp. di ϕ).

Questo esercizio spiega come, data una matrice nilpotente $A \in M_n(C)$, si possa procedere per calcolare esplicitamente la sua successione di Jordan, e quindi determinare J. Questo procedimento è importante perché è costruttivo e, come sappiamo, la conoscenza di J è il primo passo per trovare una matrice $P \in \mathrm{GL}_n C$, tale che $P^{-1}AP$ sia una matrice di Jordan.

Esercizio 1. Nel piano cartesiano si considerino i punti $P_i = (i, y_i)$, ove $i \geq 0$, $y_i = \mathrm{rk}(A^i)$ e si indichi con $\mathcal{P}$ la curva poligonale di lati $l_i = (P_i, P_{i+1})$; $\mathcal{P}$ sarà detto il poligono dei ranghi di A. Evidentemente, $y_0 = n$, l'ordine della matrice A, e y_1 ne è il rango.

(i) Si mostri che $y_0 - y_1 = s$ è il numero di blocchi di Jordan di J; che $y_1 - y_2$ è il numero di blocchi di Jordan di ordine > 1 di J, e, più in generale, che $y_i - y_{i+1}$ è il numero di blocchi di Jordan di ordine $> i$ di J. Si concluda mostrando che il numero di blocchi di Jordan di ordine i è

$$m_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}, \qquad \text{per } i = 1, \dots, n;$$

poi si mostri che

$$y_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} (n-i-j) m_{n-j}, \qquad \text{per } i = 0, \dots, n-1.$$

Più in particolare, si mostri che, se r è il grado del polinomio minimo, allora y_{r-1} coincide con il numero di blocchi di ordine r.

(ii) Si indichi con $\mathcal{P}'$ il poligono di vertici $P'_i = (i, z_i)$, ove $z_i = \mathrm{null}(A^i)$, e lati $l'_i = (P_i, P_{i+1})$; $\mathcal{P}'$ sarà detto il *poligono delle nullità* di A; si usi $\mathcal{P}'$ per determinare la successione di Jordan di A.

(iii) Si mostri che due matrici quadrate nilpotenti sono simili se, e solo se, hanno gli stessi poligoni dei ranghi oppure se, e solo se, hanno gli stessi poligoni delle nullità.

(iv) Sia $Y = -p_i X + q_i$ l'equazione della retta che contiene il lato l_i di $\mathcal{P}$; si mostri che $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è una successione non crescente, definitivamente nulla, di interi ≥ 0. Cosa si può dire di A quando due lati consecutivi, l_i, l_{i+1}, appartengono ad una stessa retta? Cosa si può dire di $\mathcal{P}$ quando tutti i blocchi di Jordan hanno lo stesso ordine? Si spieghi come, dall'esame di $\mathcal{P}$, si possano determinare i dati seguenti: a) il grado del polinomio minimo di A; b) la cardinalità dell'insieme degli ordini dei blocchi di Jordan; c) la molteplicità con la quale compaiono blocchi di un certo ordine; d) l'assenza di blocchi di un certo ordine.

(v) Si disegnino tutti i possibili poligoni dei ranghi per le matrici nilpotenti di ordine ≤ 4; si osservi poi che 4 è il minimo intero, n, per cui esistono 2 matrici di ordine n, non simili, con lo stesso polinomio minimo. □

Esercizio 2. Si consideri la matrice $J = J_{(5,4,4,3,3,3,1,1)}$ e la si interpreti come la matrice di un endomorfismo $\phi : C^{24} \to C^{24}$, rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_{24}\}$.

(i) Si disegni il poligono dei ranghi, $\mathcal{P}$, di J e si controlli l'esattezza di $\mathcal{P}$ ritrovando la successione dei blocchi con le formule dell'esercizio precedente.

(ii) Si mostri che

$$\ker\phi = \{e_1, e_6, e_{10}, e_{14}, e_{17}, e_{20}, e_{23}, e_{24}\}$$
$$\ker\phi^2 = \{e_1, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{20}, e_{21}, e_{23}, e_{24}\}$$

e si calcolino i nuclei delle potenze successive di ϕ.

(iii) Si determini una successione di sottospazi H_i, ove $i = 0, \dots, 5$, di C^{24} con le seguenti proprietà: $H_0 = \langle 0 \rangle$, $H_i \oplus \ker\phi^{i-1} = \ker\phi^i$ e $\phi(H_i) \subseteq H_{i-1}$ per $i = 1, \dots, 5$. Si mostri poi che $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_5 = C^{24}$.

(iv) Sia ψ un endomorfismo di C^{24} la cui successione di Jordan è $(5, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1)$; si mostri che, preso comunque un vettore $v \in \ker\phi^5 \smallsetminus \ker\phi^4$, i vettori

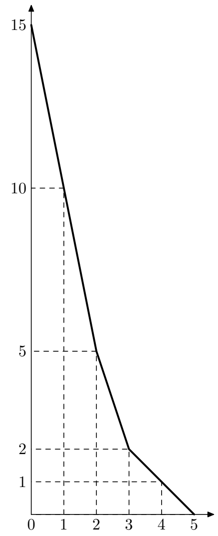
$$v_1 = \psi^4(v), \quad v_2 = \psi^3(v), \quad v_3 = \psi^2(v), \quad v_4 = \psi(v), \quad v_5 = v,$$

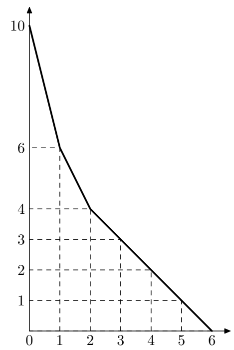
sono i primi 5 elementi di una base di Jordan per ψ.

(v) Si mostri che, presi due vettori, $w, z \in \ker\phi^4 \smallsetminus \ker\phi^3$, tali che $\ker\phi^4 = \langle w, z \rangle \oplus \langle \psi(v) \rangle \oplus \ker\phi^3$, i vettori

$$v_1 = \psi^4(v), \quad v_2 = \psi^3(v), \quad v_3 = \psi^2(v), \quad v_4 = \psi(v), \quad v_5 = v,$$
$$v_6 = \psi^3(w), \quad v_7 = \psi^2(w), \quad v_8 = \psi(w), \quad v_9 = w,$$
$$v_{10} = \psi^3(z), \quad v_{11} = \psi^2(z), \quad v_{12} = \psi(z), \quad v_{13} = z,$$

sono i primi 13 elementi di una base di Jordan per ψ. Si proceda analogamente fino a trovare una base di Jordan per ψ. □





Esercizio 3. Determinare la matrice di Jordan degli endomorfismi nilpotenti i cui poligoni dei ranghi sono rappresentati qui a fianco. □

Esercizio 4. Come si presenta il poligono dei ranghi di un endomorfismo nilpotente, la cui matrice di Jordan è composta dall'unico blocco $J(n)$? Determinare la forma di Jordan delle matrici nilpotenti di ordine 24 il cui poligono dei ranghi è contenuto in un'unica retta. □

Esercizio 5. Siano $P_i = (i, y_i)$, per $i \geq 0$, i vertici del poligono dei ranghi di una matrice nilpotente, A, di ordine $n = y_0$. È vero che esiste una matrice nilpotente, B, di ordine y_1, che abbia come vertici del poligono dei ranghi i punti $Q_i = (i, y_{i+1})$, per $i \geq 0$? □