Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 11 novembre 2004

ESERCIZIO 1.

(1) *Si verifichi per induzione che*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}.$$

(2) *Si verifichi per induzione che*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j j^2 = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 2\mathbb{N} \\ -\frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}.$$

(3) *Si scriva una formula chiusa per*

$$\sigma(n) = \sum_{j=1}^{n}\left\{n_1 + (-1)^j[(n_3+3)j + (n_5+5)j^2]\right\}$$

e la si calcoli per $n = n_2 + n_4 + 6$.

Svolgimento. (*1*) La formula è vera per $n = 1$; infatti, si tratta di un numero dispari e $-1 = -\frac{1+1}{2}$. Supponiamo che la formula sia vera per un intero n e dimostriamola per il successivo. Se n è pari, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j = \frac{n}{2} - (n+1) = -\frac{n+2}{2}.$$

Analogamente, se n è dispari,

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j = -\frac{n+1}{2} + (n+1) = \frac{n+1}{2},$$

che è quanto si doveva verificare.

(*2*) La formula è vera per $n = 1$; infatti, si tratta di un numero dispari e $-1 = -\frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo che la formula sia vera per un intero n e dimostriamola per il successivo. Se n è pari, per l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j^2 = \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)^2 = -\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Analogamente, se n è dispari,

$$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j j^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

che è quanto si doveva verificare.

(*3*) Usando le espressioni precedenti, si ricava immediatamente che

$$\sigma(n) = \begin{cases} nn_1 + (n_3+3)\frac{n}{2} + (n_5+5)\frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 2\mathbb{N} \\ nn_1 - (n_3+3)\frac{n+1}{2} - (n_5+5)\frac{n(n+1)}{2} & \text{se } n \in 1+2\mathbb{N} \end{cases}$$

e si lascia al lettore l'ultimo calcolo. □

ESERCIZIO 2. *Si ponga $a = n_1n_2n_3$ e $b = n_4n_5n_6 + 600$.*
(1) *Si determini $d = MCD(a, b)$.*
(2) *Si determinino $m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $d = ma + nb$ con $|m| < b$ ed $|n| < a$.*
(3) *Si determinino le soluzioni della congruenza $mX \equiv d \mod |n|$.*
(4) *Si determinino le soluzioni della congruenza $nX \equiv d \mod |m|$.*
(5) *Posto $s = a/d$ ed $r = b/d$, si determinino le soluzioni del sistema di congruenze* $\begin{cases} 7X \equiv 5 \mod s \\ 3X \equiv 4 \mod r \end{cases}$.

Svolgimento. (*1*) e (*2*) Sia $M = 510243$ il numero di matricola. Allora, $a = 510$ e $b = 843$, e $d = 3 = 81 \cdot 510 - 49 \cdot 843$.

(*3*) e (*4*) Osserviamo che $MCD(m, n) = 1$, perché $1 = m(a/d) + n(b/d)$, e quindi le due congruenze ammettono entrambe soluzione. Dalla combinazione $d = ma+nb$, si ricava che tutte le soluzioni della prima congruenza formano la classe $a + |n|\mathbb{Z} = 20 + 49\mathbb{Z}$. Analogamente le soluzioni della seconda congruenza sono gli elementi della classe $b + |m|\mathbb{Z} = 33 + 81\mathbb{Z}$.

(*5*) Siano $s = a/d = 170$ ed $r = b/d = 281$; si ha $MCD(7, s) = 1 = MCD(3, r)$ e quindi le due congruenze hanno soluzione. Si ha $1 = 7 \cdot 73 - 3 \cdot 170$ da cui si deduce che $7 \cdot 73 \equiv 1 \mod 170$ e quindi tutte le soluzioni della congruenza $7X \equiv 5 \mod 170$ sono gli interi $X \in 73 \cdot 5 + 170\mathbb{Z} = 25 + 170\mathbb{Z}$. Sia dunque $X = 25+170Y$ e sostituiamolo nella seconda congruenza; si ottiene così che $229Y \equiv 210 \mod 281$. Essendo $1 = 229 \cdot 27 - 22 \cdot 281$, si deduce che $229 \cdot 27 \equiv 1 \mod 281$ e quindi tutte le soluzioni di quest'ultima congruenza sono gli interi $Y \in 27 \cdot 210 + 281\mathbb{Z} = 50 + 281\mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi $X = 25 + 170(50 + 281k) = 8525 + 47770k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i numeri complessi*

$$a = n_2 - 5, \qquad b = (n_1 + 4) + i(n_5 + 4), \qquad c = n_6 - 5.$$

(1) *Si determini l'insieme $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c < 0 \right\}$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*
(2) *Sia $z_0 = ia - a$. Si determinino i numeri complessi, z, tali che $z^3 - z_0 = 0$. Si disegnino tali numeri nel piano di Gauss e si dica se qualcuno di questi appartiene a D.*
(3) *Si consideri la funzione $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + i}$ e si determinino, se esistono, due sottoinsiemi massimali U e V di $\mathbb{C}$, tali che $f : U \to V$ sia una biiezione. Si scriva l'espressione esplicita dell'applicazione inversa, $g : V \to U$.*
(4) *Si determini il sottoinsieme $f_*(D \cap U)$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*

Svolgimento. (*1*) Sia $z = x + iy$ con x, y numeri reali. Allora $az\bar{z} + bz + \bar{b}\bar{z} + c = a(x^2 + y^2) + 2[(n_1 + 4)x - (n_5 + 4)y] + c$. A seconda del segno di a, si tratta dei punti del piano di Gauss interni o esterni al disco di centro $\tau = -\frac{n_1+4}{a} + i\frac{n_5+4}{a}$ e raggio $R = \frac{(n_1+4)^2+(n_5+4)^2-ac}{a^2}$.

(*2*) Si tratta di determinare le radici terze di $z_0 = a(i-1)$. Indipendentemente dal segno, esiste $\sqrt[3]{a} \in \mathbb{R}$, ed $i-1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4})$. Applicando le formule di de Moivre, una radice terza di z_0 è $\sqrt[3]{a}\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, e le altre si ottengono da questa moltiplicando per le radici terze di 1, ovvero per $\zeta = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\bar{\zeta} = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le radici cercate sono quindi $\xi = \sqrt[3]{a}\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}(1 + i)$, $\xi\zeta$ e $\xi\bar{\zeta}$.

(*3*) f è definita per $z \neq -i$ e su $U = \mathbb{C} \setminus \{i\}$ è un'applicazione iniettiva; infatti, da $f(z_1) = f(z_2)$ si ricava che $z_1 = z_2$. Inoltre, qualunque sia il numero complesso $w \neq 1$, l'equazione $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + i} = w$ ha come (unica) soluzione $z = \dfrac{iw + 2 - i}{1 - w}$. Quindi $V = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e la funzione inversa manda w in $g(w) = \dfrac{iw + 2 - i}{1 - w}$.

(*4*) Gli elementi di $f_*(D \cap U)$, sono i punti $w \in V$, tali che $ag(w)\overline{g(w)} + bg(w) + \bar{b}\overline{g(w)} + c < 0$. I calcoli si semplificano se si scrive la circonferenza che delimita D come $|z - \tau| = R$ e si usa questa espressione per definire D. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)
prova di accertamento del 9 dicembre 2004

ESERCIZIO 1. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino, lo spazio vettoriale complesso $\mathbb{C}^4$ ed i sottospazi $D = \langle e_1 - ine_4, (2i-n)e_2 + e_3\rangle_{\mathbb{C}}$ ed $E = \langle e_1, e_2\rangle_{\mathbb{C}}$, ove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ è la base canonica dello spazio ed i indica l'unità immaginaria ($i^2 = -1$).*

(*a*) *Si verifichi che $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$ e che la proiezione, parallelamente a D, $\pi : \mathbb{C}^4 \to E$, induce un isomorfismo $\alpha : \mathbb{C}^4/D \to E$.*

(*b*) *Si consideri lo spazio vettoriale reale $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ e sia $\phi : L \to E$ l'applicazione composta $L \xrightarrow{j} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} E$, ove j è l'inclusione. Si verifichi che si tratta si un isomorfismo di spazi vettoriali reali e se ne scriva la matrice $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi)$ rispetto alle basi $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di L ed $\mathcal{F} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$ di E.*

(*c*) *L'isomorfismo ϕ determina su L una struttura di spazio vettoriale complesso, ove la moltiplicazione per i è l'applicazione $\iota(x) := \phi^{-1}(i\phi(x))$ per ogni $x \in L$. Si verifichi che $\iota : L \to L$ è un'applicazione lineare e si scriva la matrice $J = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\iota)$. È vero o falso che J^2 è una matrice scalare?*

Svolgimento. (a) Le coordinate dei generatori dei sottospazi E e D sono le colonne della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2i-n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -in \end{pmatrix}$$

che ha chiaramente rango 4. Dunque i quattro vettori sono una base di $\mathbb{C}^4$ (su $\mathbb{C}$) e perciò $\mathbb{C}^4 = D+E = D\oplus E$, in base alle relazioni di Grassmann.

La proiezione π è un'applicazione lineare che ha nucleo D ed immagine E; quindi, per il primo Teorema di Isomorfismo, induce un isomorfismo tra $\mathbb{C}^4/D = \mathbb{C}^4/\ker\pi$ e l'immagine $\operatorname{im}\pi = E$.

(*b*) Dato un vettore $x \in L$, la sua immagine $\phi(x)$ è quell'unico vettore $y \in E$ tale che $j(x) - y \in D$. In particolare, si ha

$$\phi(e_1) = e_1, \qquad \phi(e_2) = e_2, \qquad \phi(e_3) = ne_2 - 2ie_2, \qquad \phi(e_4) = -\frac{1}{n}ie_1;$$

e quindi la matrice è

$$P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{n} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha rango 4 ed è quindi la matrice di un isomorfismo. Questo fatto si poteva anche verificare osservando che $jL \cap D = \langle 0\rangle$ e quindi la restrizione di π ad L è iniettiva e ϕ è un isomorfismo.

(*c*) Le applicazioni coinvolte nella definizione di ι sono tutte $\mathbb{R}$–lineari e quindi lo stesso vale per l'applicazione composta che, per costruzione, ha matrice $J = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\iota) = \alpha_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\phi^{-1})\alpha_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(i)\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\phi) = P^{-1}IP$, ove

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -n & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{n}{2} & \frac{n^2+4}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{n}{2} & 0 \\ -n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine, essendo J la matrice della moltiplicazione per il numero complesso i, si ha $J^2 = -\mathbf{1}_4$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_4 \mod 4$. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3 e siano*

- *$\pi : \mathbb{R}[X] \to V$ la proiezione su V nella direzione del sottospazio $\langle X^n \mid n \geq 4\rangle$;*
- *$\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'applicazione $P(X) \mapsto (X+n)^2P'(X) - 2(X+n)P(X)$, ove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$;*

- $\phi : V \to V$ *la composizione* $V \xrightarrow{j} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\pi} V$, *ove* j *è l'inclusione* $V \subset \mathbb{R}[X]$.

(*a*) *Verificare che* ϕ *è un'applicazione lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base* $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.
(*b*) *Determinare le dimensioni di nucleo ed immagine di* ϕ *ed una base per ciascuno dei due sottospazi. È vero che* $V = \ker\phi \oplus \mathrm{im}\phi$?
(*c*) *Si dica se l'insieme* $\mathcal{B}_n = \{1, X+n, (X+n)^2, (X+n)^3\}$ *è una base di* V. *In caso affermativo si scriva la matrice* $B = \alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(\phi)$.
(*d*) *Dire se il sottoinsieme* $A = \{\, \beta \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \mid \phi \circ \beta = 0 \,\}$ *è un sottospazio di* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. *In caso affermativo, si consideri l'isomorfismo* $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n} : \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \to M_4(\mathbb{R})$ *e si determinino la dimensione ed una base del sottospazio* $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$.

Svolgimento. (a) La derivazione, così come la moltiplicazione per un fissato polinomio sono applicazioni lineari. La composizione e la somma di applicazioni lineari sono applicazioni lineari, per cui ϕ è un'applicazione lineare. La sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -2n & n^2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2n^2 & 0 \\ 0 & -1 & 2n & 3n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4n \end{pmatrix}.$$

(*b*) Il nucleo è il sottospazio $\ker\phi = \langle (X+n)^2 \rangle$, di dimensione 1. L'immagine ha dimensione 3 ed è il sottospazio $\langle X+n, n^2 - X^2, 4X^3 + 3nX^2 \rangle$. La somma non è diretta perché $(X+n)^2 = \phi(-X-n) \in \ker\phi$.

(*c*) Le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}_n$, rispetto alla base $\mathcal{B}$, sono le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ che ha chiaramente rango 4 e quindi si tratta di una base di V. La matrice di ϕ rispetto a questa base è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n^4 \\ -2 & 0 & 0 & 4n^3 \\ 0 & -1 & 0 & -6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 4n \end{pmatrix}.$$

(*d*) Il sottoinsieme A contiene l'omomorfismo nullo ed inoltre, poiché la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma, si conclude che A è un sottospazio. Un omomorfismo β appartiene ad A se, e solo se, $\mathrm{im}\beta \subseteq \ker\phi$ e quindi una matrice sta in $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ se le colonne sono multipli delle coordinate di $(X+n)^2$ e quindi una base di $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ sono le matrici

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

che ha perció dimensione 4. □

ESERCIZIO 3. *Sia* $n \in \{1,2,3,4\}$ *tale che* $n \equiv n_5 \mod 4$. *Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = n + t \\ tx_2 - nx_4 = (n+t)(t-1) \\ -x_1 + (2-t)x_2 + (t^2 + 2nt + n)x_3 + (t+1)x_4 = 2n + 2t \\ x_1 + tx_2 - nx_3 + (t+1)x_4 = 1 \end{cases}$$

(*a*) *Per quali valori di* t *il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di* t *ammette un'unica soluzione? Per quali valori di* t *il sistema ammette infinite soluzioni? In quest'ultimo caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*
(*b*) *Esplicitare, se esistono, le soluzioni del sistema appena studiato per il valore* $t = 1$. *Risolvere, sempre per* $t = 1$, *il sistema nel caso in cui i coefficienti siano in* $\mathbb{F}_2$.
(*c*) *Determinare l'inversa, se esiste, della matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & n \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & n+1 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (IV, I, IV+III, II e poi I,II, III-2II, IV-tII) si arriva al sistema

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 - nx_3 + (t+1)x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = n + t \\ t(t+2n)x_3 + 2tx_4 = 1 \\ (t+n)x_4 = t + n \end{cases}$$

Se $t = 0$ o $t = -2n$ il sistema non ammette soluzioni. Se $t = -n$ il sistema ammette infinite soluzioni e la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato è 1. Per tutti gli altri valori di t il sistema ammette un'unica soluzione.

(b) Per $t = 1$ a coefficienti reali il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - nx_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + x_4 = n + 1 \\ (1+2n)x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

e l'unica soluzione è $\frac{1}{2n+1}\begin{pmatrix} -n-(n+1)(2n+1) \\ n(2n+1) \\ -1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$.

Nel caso di $\mathbb{F}_2$:

-se n pari il sistema ammette come unica soluzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

-se n è dispari si hanno infinite soluzioni: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, $IV, I, III - I, \frac{1}{n+1}(I + II)$, seguita da $I, II - IV, -(III + IV), IV$ e da $I - 2II + III - (n+1)IV, II, III, IV$. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -(n+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1+2n}{n+1} & -\frac{n}{n+1} & -1 & 1 \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & 0 & 0 \\ \frac{n}{n+1} & -\frac{1}{n+1} & -1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 dicembre 2004

ESERCIZIO 1. *Siano* $n = n_1n_4n_4n_1$ *e* $m = n_1n_2n_1$.

(a) *Determinare le soluzioni della congruenza*

$$nX \equiv n_4 + 3 \mod m.$$

(b) *Si scelga un* $c \in \mathbb{Z}$ *tale che la congruenza* $nX \equiv c \mod m$ *ammetta soluzioni e si ponga* $m' = 8$ *se* m *è dispari e* $m' = 5$ *se* m *è pari. Determininare le soluzioni del sistema* $\begin{cases} nX \equiv c \mod m \\ 3X \equiv 1 \mod m' \end{cases}$

Svolgimento. (a) Risolviamo l'esercizio per il numero di matricola 510243. Siano quindi $n = 5225$ ed $m = 515$. Il $MCD(n, m) = 5 = 5225(-48) + 515 \cdot 487$ divide 5, per cui la congruenza è equivalente a $1045X \equiv 1 \mod 103$ ed ha come soluzioni gli interi del tipo $55 + 103y$ al variare di $y \in \mathbb{Z}$ ($55 \equiv -48 \mod 103$).

(b) Dobbiamo prendere $m' = 8$ e considerare il sistema di due congruenze

$$\begin{cases} 1045X \equiv 1 \mod 103 \\ 3X \equiv 1 \mod 8 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 15X \equiv 1 \mod 103 \\ 3X \equiv 1 \mod 8 \end{cases}.$$

Le due congruenze hanno soluzione e $MCD(103, 8) = 1$ per cui il sistema ha soluzione. Si tratta di trovare gli interi del tipo $x = 55 + 103y$, al variare di $y \in \mathbb{Z}$, che soddisfano anche alla seconda congruenza. Deve aversi $3(55 + 103y) \equiv 1 \mod 8$, ovvero $5y \equiv 4 \mod 8$, ed essendo $MCD(5, 8) = 1 = 8 \cdot 2 - 5 \cdot 3$, si conclude che $y = 4 + 8k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$; e quindi le soluzioni cercate sono gli interi $x = 55 + 103(4 + 8k) = 467 + 824k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

ESERCIZIO 2.

(a) *Si dimostri per induzione che* $n^2 = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)$, *per ogni intero* $n \geq 1$.

(b) *Si osservi che si ha*

$$1^3 = 1, \qquad 2^3 = 3 + 5, \qquad 3^3 = 7 + 9 + 11, \qquad 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19.$$

Si dica quale tra le seguenti formule generalizza le osservazioni precedenti$^{(*)}$:

$$a)\ n^3 = \sum_{j=2n+1}^{3n+1}(2j-1); \qquad b)\ n^3 = \sum_{j=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}(2j-1); \qquad c)\ n^3 = \sum_{j=\frac{n(n+1)}{2}}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}(2j+1).$$

Svolgimento. (a) La tesi è vera per $n = 1$. Inoltre, supponendola vera per un numero naturale, n, si ha

$$\sum_{j=1}^{n+1}(2j-1) = \left[\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\right] + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

(b) La formula corretta è $b)$ e si può verificare nel modo seguente. Per prima cosa osserviamo che gli addendi nella somma sono $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$, e si ha

$$\sum_{j=\frac{n(n-1)}{2}+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}(2j-1) = [n(n-1)+1] + [n(n-1)+3] + [n(n-1)+5] + \cdots + [n(n-1)+(2n-1)] =$$

$$= n^2(n-1) + \sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2(n-1) + n^2 = n^3;$$

$^{(*)}$ La dimostrazione della validità di tale formula non è richiesta, ma può costituire un punteggio supplementare.

che è quanto dovevamo dimostrare. Ricordiamo a margine che questa formula è attribuita a Nicomaco di Gerasa, vissuto tra il I ed il II secolo dopo Cristo. □

ESERCIZIO 3. *Sia* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *tale che* $n \equiv n_4 \mod 4$.

Si consideri la funzione complessa $f(z) = \frac{z}{z-n-2i}$.

(*a*) *Determinare il dominio* D *di* f *e l'insieme* $C = f_*(D)$. *Si scriva, se esiste, la funzione inversa* $g : C \to D$.

(*b*) *Si disegnino sul piano di Gauss l'insieme* $U = \{ z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < n \}$ *e l'insieme* $f_*(U)$.

Svolgimento. (a) La funzione è definita in $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq n + 2i \}$ e la sua immagine è l'insieme $C = f_*(D) = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \neq 1 \}$, che coincide con il dominio della funzione inversa $g(z) = \frac{(n+2i)z}{z-1}$.

(*b*) Un numero complesso z appartiene ad U se $\left|\frac{z}{z-n-2i}\right| < n$, ovvero se $(n^2 - 1)(x^2 + y^2) - 2n^3x - 4n^2y + n^2(n^4 + 4) < 0$. Se $n \neq 1$, ciò significa che z è un punto interno alla circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} \frac{n^3}{n^2-1} \\ \frac{2n^2}{n^2-1} \end{pmatrix}$ e raggio $R = \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n^2-1}$. Se, invece, $n = 1$, allora z è al di sopra della retta $r : 2x + 4y - 5 = 0$.

L'insieme $f_*(U) = \{ f(z) \mid z \in U \}$ è quindi fatto dai numeri complessi $w \in C$ tali che $|w| < n$ e quindi i punti interni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio n. □

ESERCIZIO 4. *Sia* $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ *tale che* $n \equiv n_6 \mod 4$.

(*a*) *Si dica se esiste un endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tale che*

$$\phi(e_1 - e_2) = e_1 - \tfrac{n}{2}e_4; \qquad \phi(e_1 - 2e_2) = -2e_2 + 2e_3; \qquad \phi(e_2 - e_3) = e_2 - e_3;$$
$$\phi(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) = \tfrac{2}{n}e_1 + \left(\tfrac{4}{n} - 1\right) e_2 + \left(1 - \tfrac{4}{n}\right) e_3 - e_4;$$

e, in caso affermativo, se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica.

(*b*) *Nell'ipotesi che* ϕ *esista, se ne determinino nucleo ed immagine, esibendo una base di ciascuno dei due sottospazi. Si determinino inoltre nucleo ed immagine dell'applicazione* $\phi^2 = \phi \circ \phi$.

(*c*) *Nell'ipotesi che* ϕ *esista, si determinino delle basi* $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ *di* $\mathbb{R}^4$ *tali che* $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, *ove* r *è il rango di* ϕ. *Esiste una base* $\mathcal{U}$ *tale che* $\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$?

Svolgimento. (a) I vettori $e_1 - e_2, e_1 - 2e_2, e_2 - e_3, e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ sono una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi esiste un unico endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che soddisfi alle condizioni date. In particolare, si ha

$$\begin{aligned}
&\phi(e_2) = \phi(e_1 - e_2) - \phi(e_1 - 2e_2) = e_1 + 2e_2 - 2e_3 - \tfrac{n}{2}e_4;\\
&\phi(e_1) = \phi(e_1 - e_2) + \phi(e_2) = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3 - ne_4;\\
&\phi(e_3) = \phi(e_2) - \phi(e_2 - e_3) = e_1 + e_2 - e_3 - \tfrac{n}{2}e_4;\\
&\phi(e_4) = \phi(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) - \phi(e_1 - e_2) + \phi(e_3) = \tfrac{2}{n}e_1 + \tfrac{4}{n}e_2 - \tfrac{4}{n}e_3 - e_4;
\end{aligned}$$

e quindi la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \frac{2}{n} \\ 2 & 2 & 1 & \frac{4}{n} \\ -2 & -2 & -1 & -\frac{4}{n} \\ -n & -\frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

(*b*) La matrice A ha rango 2 perché la terza colonna è la metà della prima e la quarta è uguale alla seconda moltiplicata per $\frac{2}{n}$. Dunque $\ker\phi = \langle e_1 - 2e_3, 2e_2 - ne_4\rangle$. L'immagine di ϕ è generata da due colonne indipendenti della matrice, ad esempio le prime 2, e si ha $\mathrm{im}\,\phi = \langle 2e_1 - ne_4, e_2 - e_3\rangle$. Osserviamo che $A^2 = A$, ovvero, $\phi^2 = \phi$ e quindi le due applicazioni hanno lo stesso nucleo e la stessa immagine. In particolare, ϕ è la proiezione sul sottospazio $\mathrm{im}\,\phi$, parallelamente al sottospazio $\ker\phi$.

(c) ϕ è una proiezione e quindi, prendendo una base di imϕ, $u_1 = 2e_1 - ne_4$, $u_2 = e_2 - e_3$, e completandola con una base di kerϕ, $u_3 = e_1 - 2e_3$ ed $u_4 = 2e_2 - ne_4$, si ottiene una base cercata. Infatti

$$\alpha_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

come si voleva. □

ESERCIZIO 5. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_1 + (n^2 - t^2)x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (n^2 - t^2 - t)x_3 + (t + 2n + 1)x_4 = t - 1 \\ -tx_2 - t^2x_3 + 2tx_4 = 0 \end{cases}$$

(a) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di t ammette un'unica soluzione? Per quali valori di t il sistema ammette infinite soluzioni? In quest'ultimo caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(b) *Esplicitare, se esistono, le soluzioni del sistema appena studiato per il valore $t = 5$.*

Svolgimento. (a) Se $t = 0$ il sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + n^2x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + n^2x_3 + (2n+1)x_4 = -1 \end{cases}$$

e pertanto ammette infinite soluzioni e dim$S_{A,0} = 2$. Possiamo d'ora in poi supporre $t \neq 0$. Il sistema diventa allora equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_1 + (n^2 - t^2)x_3 + nx_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + (n^2 - t^2 - t)x_3 + (t + 2n + 1)x_4 = t - 1 \\ -x_2 - tx_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Attraverso la riduzione di Gauss (II-I, $-t^{-1}$II, IV+II, III-2I, III+$(1+2t)$II) si arriva al sistema

$$\begin{cases} x_1 + tx_2 + n^2x_3 + (n-t)x_4 = t \\ x_2 + tx_3 - x_4 = 1 \\ (t^2 - n^2)x_3 + tx_4 = t \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Per $t = \pm n$ il sistema ammette infinite soluzioni e dim$S_{A,0} = 1$. Per $t \neq 0, n, -n$ il sistema ammette un'unica soluzione.

(b) Per qualsiasi $t \neq 0, n, -n$ il sistema ammette come unica soluzione $\begin{pmatrix} -n \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 6. *Sia $n = n_6 + 3$*

(a) *Determinare l'inversa, se esiste, della seguente matrice a coefficienti reali*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

(b) *La matrice B è invertibile in $\underline{\mathbb{F}}_3$?*

Svolgimento. (a) La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, n^{-1}III, IV+II, II+I, scambio III e IV, scambio II e III, III-nII, -III, III+IV, I-nII, I-IV. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & 1/n & -n \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & n-1 & -1/n & n \\ 0 & 0 & -1/n & 0 \end{pmatrix}$$

(b) La matrice B è invertibile in $\underline{\mathbb{F}}_3$ se e solo se n non è multiplo di 3. Infatti se $n = 3k$ la terza riga diventa nulla e il rango della matrice B è 3. Se invece n non è multiplo di 3 allora la matrice B ha rango 4. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 gennaio 2005

ESERCIZIO 1. *Siano $n = 4n_4n_44$ ed $m = 4n_24$.*
(a) Si determinino le soluzioni della congruenza

$$nX \equiv n_4 + 4 \mod m.$$

(b) Si scelga $c \in \mathbb{Z}$, non nullo, tale che la congruenza $nX \equiv c \mod m$ abbia soluzione e si ponga $m' = 5$. Si determinino le soluzioni del sistema $\begin{cases} nX \equiv c \mod m \\ 4X \equiv -1 \mod m' \end{cases}$.

Svolgimento. (a) Risolviamo l'esercizio per il numero di matricola 510243. Siano quindi $n = 4224$ ed $m = 414$. Il $MCD(n, m) = 6 = 4224 \cdot 5 - 414 \cdot 51$ divide 6 per cui la congruenza è equivalente a $704 \equiv 1 \mod 69$ ed ha come soluzioni gli interi del tipo $5 + 69y$ al variare di $y \in \mathbb{Z}$.

(b) Consideriamo quindi il sistema $\begin{cases} 704X \equiv 1 \mod 69 \\ 4X \equiv -1 \mod 5 \end{cases}$. Dobbiamo trovare gli interi del tipo $x = 5+69y$, al variare di $y \in \mathbb{Z}$, che soddisfino anche alla seconda congruenza. Deve aversi $4(5+69y) \equiv 4 \mod 5$, ovvero $y \equiv 4 \mod 5$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi del tipo $x = 5 + 69(4 + 5k) = 281 + 345k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2.
(a) Si dimostri per induzione sull'esponente $p \in \mathbb{N}$ la disuguaglianza di Bernoulli $x^p \geq 1 + p(x - 1)$, ove x è un qualsiasi numero reale positivo.
(b) Siano $K > k$ due numeri naturali. Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli per l'esponente $p + 1$, con $x = \frac{k}{K}$ ed $x = \frac{K}{k}$, si ottengano le disuguaglianze

$$(p + 1)k^p \leq \frac{K^{p+1} - k^{p+1}}{K - k} \leq (p + 1)K^p.$$

(c) (*) Si ponga $S = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Utilizzando le disuguaglianze del punto precedente, per $K = k + 1$ e k che varia tra 0 ed $n - 1$, si deduca che $(p + 1)(S - n^p) \leq n^{p+1} \leq (p + 1)S$ e quindi le disuguaglianze

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n},$$

qualunque sia il numero naturale n(†)

Svolgimento. (a) La disuguaglianza è chiaramente vera quando $p = 0$ oppure $p = 1$. Supposta vera per un esponente p, si ha

$$x^{p+1} = x \cdot x^p \geq [1 + (x - 1)] \cdot [1 + p(x - 1)] \geq 1 + (p + 1)(x - 1);$$

perché $x = 1 + (x - 1) > 0$ e $p(x - 1)^2 \geq 0$. E quindi, per induzione, la disuguaglianza è verificata per ogni numero naturale p.
(b) Applicando la disuguaglianza per $x = \frac{k}{K}$, si ottiene

$$\left(\frac{k}{K}\right)^{p+1} \geq 1+(p+1)\left(\frac{k}{K} - 1\right) \quad \text{e, moltiplicando per } K^{p+1} > 0, \text{ si ha} \quad k^{p+1} \geq K^{p+1} - (p+1)K^p(K - k)$$

(*) La dimostrazione di quest'ultimo punto fornisce un punteggio supplementare.
(†) Da cui si conclude che $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

e quindi, spostando opportunamente i termini della disuguaglianza e dividendo per $K-k>0$, si ottiene una delle disuguaglianze cercate, ovvero

$$(p+1)K^p \geq \frac{K^{p+1}-k^{p+1}}{K-k}.$$

Analogamente, applicando la disuguaglianza per $x=\frac{K}{k}$, si ottiene

$$\left(\frac{K}{k}\right)^{p+1} \geq 1+(p+1)\left(\frac{K}{k}-1\right) \quad \text{e, moltiplicando per } k^{p+1}>0, \text{ si ha} \quad K^{p+1} \geq k^{p+1}+(p+1)k^p(K-k)$$

e quindi, spostando opportunamente i termini della disuguaglianza e dividendo per $K-k>0$, si ottiene l'altra disuguaglianza cercata, ovvero

$$(p+1)k^p \leq \frac{K^{p+1}-k^{p+1}}{K-k}.$$

(c) Le disuguaglianze del punto precedente, per $K=k+1$ e k che varia tra 0 ed $n-1$, danno

$$\begin{array}{rcl} (p+1)0^p \leq & 1^{p+1}-0^{p+1} & \leq (p+1)1^p \\ (p+1)1^p \leq & 2^{p+1}-1^{p+1} & \leq (p+1)2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (p+1)(n-1)^p \leq & n^{p+1}-(n-1)^{p+1} & \leq (p+1)n^p \end{array}$$

Sommando i membri delle disuguaglianze si ottiene $(p+1)(S-n^p) \leq n^{p+1} \leq (p+1)S$; dividendo per $(p+1)n^{p+1}$, si ottiene $\frac{S}{n^{p+1}}-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}}$ e quindi $\frac{1}{p+1} \leq \frac{S}{n^{p+1}} \leq \frac{1}{p+1}+\frac{1}{n}$, che è quanto volevamo provare. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_3 \mod 4$. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sottoinsieme*

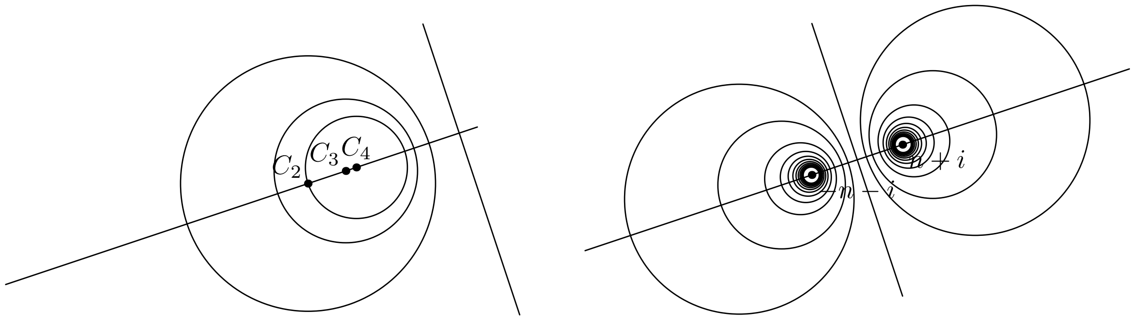
$$D_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left|\frac{z-n-i}{\bar{z}+n-i}\right| < \alpha \right\}.$$

Si dica per quali valori di α il sottoinsieme non è vuoto e si descriva in tal caso D_α. Si disegnino (se esistono) i sottoinsiemi D_α per $\alpha \in \{1,2,3,4\}$.

Svolgimento. Posto $z=x+iy$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $z \neq -n-i$, si trova che

$$D_\alpha : \begin{cases} x^2+y^2+2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}(nx+y)+n^2+1>0 & \text{se } \alpha>1 \\ nx+y>0 & \text{se } \alpha=1 \\ x^2+y^2+2\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}(nx+y)+n^2+1<0 & \text{se } 0<\alpha<1 \\ \emptyset & \text{se } \alpha \leq 0 \end{cases}.$$

Dunque, se $\alpha>1$, D_α è formato dai punti esterni al cerchio reale di centro $C_\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\binom{-n}{-1}$ e raggio $r_\alpha = \frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\sqrt{n^2+1}$. Se $\alpha=1$, D_1 è l'insieme dei punti al di sopra della retta di equazione $nx+y=0$. Per $0<\alpha<1$, D_α è formato dai punti interni al cerchio reale di centro $C_\alpha = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}\binom{-n}{-1}$ e raggio $r_\alpha = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\sqrt{n^2+1}$. Infine, per i valori di $\alpha \leq 0$ si ha che $D_\alpha = \emptyset$.



Qui sopra, a sinistra, sono rappresentati i cerchi e le rette che delimitano i quattro insiemi $D_1,\dots,D_4$. A destra si possono vedere degli ulteriori cerchi che delimitano gli insiemi della famiglia dei D_α. □

ESERCIZIO 4. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2\rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$, ove*

$$u_1 = e_1 + e_3, \quad u_2 = e_2 - e_4 \qquad w_1 = e_1 + e_2 + e_3 - e_4 - e_5, \quad w_2 = e_3 + e_4 + e_5, \quad w_3 = e_4 + e_5.$$

(a) Si verifichi che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ e si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, delle proiezioni, $\pi_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio U, parallelamente a W, e $\pi_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio W, parallelamente ad U.

(b) Sia $\phi : U \to W$ l'applicazione lineare definita da $\phi(u_1) = w_1 - w_2 + 2w_3$, $\phi(u_2) = w_2 + w_3$. Si verifichi che il sottospazio $U_\phi = \{\, u + \phi(u) \mid u \in U \,\} \subseteq \mathbb{R}^5$, è un complementare di W e che la restrizione di π_U ad U_ϕ induce un isomorfismo $\pi_{U|U_\phi} : U_\phi \to U$. Si mostri che $\phi = \pi_W \circ \pi_{U|U_\phi}^{-1}$.

Svolgimento. (a) Mettendo in colonna le coordinate dei generatori di U e W, si trova la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha rango 5 e quindi $\mathbb{R}^5 = U + W = U \oplus W$. Il sottospazio W ha equazioni cartesiane $\begin{cases} X_4 - X_5 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$. Dato un generico vettore $v = x_1e_1 + \cdots + x_5e_5$, la sua proiezione su U è il vettore $u = a_1u_1 + a_2u_2$ tale che $v - u \in W$. Dunque

$$\begin{pmatrix} x_1-a_1 \\ x_2-a_2 \\ x_3-a_1 \\ x_4+a_2 \\ x_5 \end{pmatrix} \in W \iff \begin{cases} (x_4 + a_2) - x_5 = 0 \\ (x_1 - a_1) - (x_2 - a_2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = x_1 - x_2 - x_4 + x_5 \\ a_2 = -x_4 + x_5 \end{cases}$$

e quindi

$$\pi_U \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1-x_2-x_4+x_5 \\ -x_4+x_5 \\ x_1-x_2-x_4+x_5 \\ x_4-x_5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{da cui si deduce} \quad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\pi_U + \pi_W = 1$, si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - \pi_U) = \mathbf{1} - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*b*) La matrice che ha come colonne le coordinate dei generatori $u_1 + \phi(u_1)$ ed $u_2 + \phi(u_2)$ di U_ϕ ed i generatori di W è ottenuta da B con operazioni elementari sulle colonne e quindi ha lo stesso rango. Dunque $\mathbb{R}^5 = U_\phi + W = U_\phi \oplus W$. Dato $u + \phi(u) \in U_\phi$, si ha che $\pi_U(u + \phi(u)) = u$, perché $\phi(u) \in W$, e questo è un isomorfismo (l'inversa è l'applicazione $\pi_{U|U_\phi}^{-1} : u \mapsto u + \phi(u)$). Si ha quindi

$$\pi_W \circ \pi_{U|U_\phi}^{-1}(u) = \pi_W(u + \phi(u)) = \phi(u), \qquad \text{per ogni } u \in U,$$

che è quanto dovevamo verificare. □

ESERCIZIO 5. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} (t + 1)x_1 + 2x_3 - nx_4 = t + 1 \\ tx_2 - x_3 + nx_4 - nx_5 = 0 \\ (1 + t)x_1 + 2x_3 - tx_4 - 2x_5 = t - 2 \\ (t + 1)x_1 + tx_2 + x_3 - (2t + n)x_5 = 1 - 2t \end{cases}$$

(*a*) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per tutti gli altri valori di t si determinino le soluzioni del sistema.*
(*b*) *Si risponda alle stesse domande del punto precedente nel caso in cui i coefficienti siano in $\mathbb{F}_2$.*

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (I, II, I-III, I+II-IV), ovvero moltiplicando a sinistra la matrice completa del sistema per la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 2 & -n & 0 & t+1 \\ 0 & t & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 3t \end{pmatrix}.$$

Se $t=0$ la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 1+3n \\ 0 \\ -3n/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2n^2-2n \\ 0 \\ 2n-n^2 \\ 2 \\ n \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $t=-1$ la matrice completa del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -n & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-n & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -3n/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $t=n$ la matrice completa del sistema è equivalente a

$$\begin{pmatrix} n+1 & 0 & 2 & -n & 0 & n+1 \\ 0 & n & -1 & n & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni sono} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} n \\ -n-1 \\ 0 \\ n+1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ n \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per ogni altro valore di t la matrice completa del sistema ha rango 4, così come la matrice incompleta e le soluzioni del sistema sono

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3n/2t \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -2t \\ t+1 \\ t^2+t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*b*) La matrice P è invertibile anche in $\mathbb{F}_2$ e quindi la matrice completa del sistema è riga–equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} t+1 & 0 & 0 & n & 0 & t+1 \\ 0 & t & 1 & n & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

che certamente non ha soluzione per $t \neq 0$. Per $t=0$, il sistema continua a non avere soluzione se n è pari; mentre vi sono infinite soluzioni se n è dispari perché la matrice completa e quella incompleta hanno entrambe rango 3 e, precisamente, le soluzioni sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. □

ESERCIZIO 6. *Sia* $n = n_6 + 4$.

(a) Determinare l'inversa, se esiste, della matrice a coefficienti reali

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -n & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 1 & 0 & -n-1 & 2 \end{pmatrix}$$

e scriverla come prodotto di matrici elementari.

(b) La matrice B è invertibile in $\mathbb{F}_3$?

Svolgimento. La matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n+\frac{2}{n} & 0 & -\frac{2}{n} & -\frac{2}{n}-n \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

(b) Se n è un multiplo di 3, la prima e la quarta colonna di B sono proporzionali in $\mathbb{F}_3$ e quindi la matrice non può essere invertibile. Se invece n non è divisibile per 3, allora n è invertibile in $\mathbb{F}_3$ e tutte le matrici elementari che compaiono nella fattorizzazione di B^{-1} han senso anche in $\mathbb{F}_3$. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 12 aprile 2005

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione di variabile complessa* $f(z) = \dfrac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}$.

(a) *Si determini il dominio D della funzione f, si trovi, se esiste, un sottoinsieme di D su cui f induce una biiezione e si scriva l'espressione della funzione inversa.*

(b) *Si determinino, se esistono, i punti uniti della funzione f.*

(c) *Si determini l'insieme dei punti di D per cui $|f(z)| > 2$ e lo si rappresenti nel piano di Gauss.*

(d) *Si determinino le funzioni $f^2 = f \circ f$ ed $f^3 = f \circ f \circ f$. È vero che, dati $n, m \in \mathbb{N}$, si ha $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \mod 6$?*

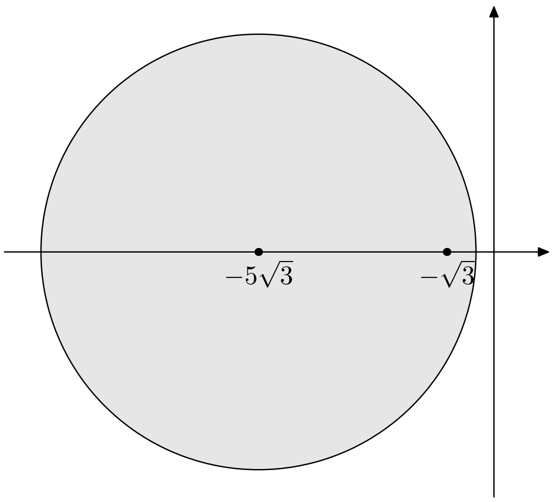
Svolgimento. (a) La funzione è definita per $z \neq -\sqrt{3}$, e la sua inversa è la funzione $g(z) = \dfrac{z\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-z}$, che è definita per $z \neq \sqrt{3}$. Dunque $D = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{3}\}$ ed f induce una biiezione sull'insieme $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

(b) $f(z) = z$ se, e solo se, $z^2 = -1$; quindi i punti uniti sono $\{\pm i\}$.

(c) Scriviamo, come di consueto, $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$\left|\frac{z\sqrt{3}-1}{z+\sqrt{3}}\right| > 2 \quad \iff \quad (x\sqrt{3}-1)^2 + 3y^2 > 4[(x+\sqrt{3})^2 + y^2] \quad \iff \quad (x+5\sqrt{3})^2 + y^2 < 64.$$

Dunque l'insieme è formato da tutti i punti interni alla circonferenza di centro $-5\sqrt{3}$ e raggio 8, escluso $-\sqrt{3}$ che non appartiene al dominio di f. Si veda il disegno qui sotto



(d) Si ha $f^2(z) = \dfrac{z-\sqrt{3}}{z\sqrt{3}+1}$ ed $f^3(z) = -\dfrac{1}{z}$. Dunque, $f^6(z) = z$ e 6 è il minimo esponente per cui questo accade. È quindi vero che $f^n(z) = f^m(z)$ per ogni z se, e solo se, $n \equiv m \mod 6$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^5$ e si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3\rangle$ e $W = \langle w_1, w_2, w_3\rangle$, ove*

$$\begin{aligned} u_1 &= 2e_1 - 3e_2 - 4e_3 + 2e_4 \\ u_2 &= e_1 - 2e_3 + e_5 \\ u_3 &= -3e_1 + 6e_2 + 6e_3 - 4e_4 + e_5 \end{aligned} \qquad e \qquad \begin{aligned} w_1 &= e_1 + 2e_2 - 4e_3 + e_4 - e_5 \\ w_2 &= -e_2 + 2e_3 \\ w_3 &= 3e_1 - 2e_2 + 4e_3 + 3e_4 \end{aligned}\ .$$

(a) Per ognuno dei sottospazi U e W, si determinino la dimensione, una base ed un sistema di equazioni cartesiane. Si verifichi che $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.
(b) Si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio U, parallelamente a W, e della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse U e parallela al sottospazio W.
(c) Si determinino le matrici, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi' : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, sul sottospazio W, parallelamente ad U, e della simmetria $\sigma' : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, di asse W e parallela al sottospazio U.
(d) Per ogni $x \in \mathbb{R}^5$, si calcolino $[\sigma' \circ \pi \circ \sigma' - \pi' \circ \sigma \circ \pi'](x)$ e $[\sigma \circ \pi' \circ \sigma - \pi \circ \sigma' \circ \pi](x)$.

Svolgimento. (a) Si ha $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$, e quindi i tre vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti. Il sottospazio U ha quindi dimensione 2 ed una sua base è $\{u_1, u_2\}$. I vettori w_1, w_2, w_3 sono invece linearmente indipendenti e sono quindi una base del sottospazio W, che ha perciò dimensione 3. Delle equazioni cartesiane per i due sottospazi sono

$$U : \begin{cases} 2X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_2 + 3X_4 = 0 \\ X_3 + 2X_4 + 2X_5 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 - X_4 = 0 \\ 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = a_1u_1 + a_2u_2$, ove i coefficienti a_1 ed a_2 sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} (x_1 - 2a_1 - a_2) - (x_4 - 2a_1) = 0 \\ 2(x_2 + 3a_1) + (x_3 + 4a_1 + 2a_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} a_1 = \frac{-2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4}{10} \\ a_2 = \frac{10x_1 - 10x_4}{10} \end{cases}.$$

Ricordiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^5$, si ha $x = \pi(x) + (1 - \pi)(x)$ e che $\sigma(x) = \pi(x) - (1 - \pi)(x) = 2\pi(x) - x$; ovvero $\sigma = 2\pi - 1$.

Le matrici cercate sono quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & 4 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = 2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) - \mathbf{1}_5 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & -1 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(c) Ricordando che $\pi' = 1 - \pi$ e $\sigma' = -\sigma$, le matrici sono

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi') = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ -6 & 4 & -3 & 6 & 0 \\ 12 & -8 & 6 & -12 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 6 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma') = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -6 & 0 \\ 6 & 1 & 3 & -6 & 0 \\ -12 & 8 & -1 & 12 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -10 & -5 \end{pmatrix}.$$

(d) Le applicazioni σ, π, σ', π' commutano tra loro, essendo tutte costruite a partire da π e dall'identità. Inoltre, $\sigma \circ \sigma = 1 = \sigma' \circ \sigma'$, $\pi \circ \pi = \pi$, $\pi' \circ \pi' = \pi'$, $\pi \circ \sigma' = -\pi$ e $\pi' \circ \sigma = -\pi'$. Si ha quindi

$$[\sigma' \circ \pi \circ \sigma' - \pi' \circ \sigma \circ \pi'](x) = [\sigma' \circ \sigma' \circ \pi - \pi' \circ \pi' \circ \sigma](x) = [\pi - \pi' \circ \sigma](x) = [\pi + \pi'](x) = x;$$

ed analogamente $[\sigma \circ \pi' \circ \sigma - \pi \circ \sigma' \circ \pi](x) = x$, per ogni $x \in \mathbb{R}^5$. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sistemi lineari omogenei*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + 2tX_3 + 2tX_4 - X_5 = 0 \\ (t+2)X_2 - tX_3 - X_4 + (t-2)X_5 = 0 \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + 2tX_3 - 3X_5 = 0 \\ (t-1)X_1 + (t+2)X_2 + tX_3 - X_4 + (t-3)X_5 = 0 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.
(a) Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si determini una base del sottospazio delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(c) Si determini il sottospazio generato da tutte le soluzioni dei sistemi Σ_t, $t \in \mathbb{R}$.
(d) Si risolva il sistema Σ_4 considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_3$.

Svolgimento. (a) e (b). Consideriamo la matrice del sistema

$$\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 2t & 2t & -1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & t-2 \\ t-1 & t+2 & 2t & 0 & -3 \\ t-1 & t+2 & t & -1 & t-3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 2t & 2t & -1 \\ 0 & t+2 & -t & -1 & t-2 \\ 0 & 0 & t & 1-2t & -t \\ 0 & 0 & 0 & -2t & 0 \end{pmatrix},$$

come si verifica sottraendo alla terza ed alla quarta riga la somma delle prime due. Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{1, 0, -2\}$ e lo spazio delle soluzioni è $\left\langle \begin{pmatrix} (1-2t)(2+t) \\ 2(t-1) \\ (t-1)(t+2) \\ 0 \\ (t-1)(t+2) \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = -2$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 0$, si ha la matrice di rango 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni è } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Tutte le soluzioni soddisfano all'equazione $X_4 = 0$ e sono quindi contenute nel corrispondente iperpiano. Le soluzioni del sistema per $t \in \{1, 0, -2\}$ generano l'iperpiano $X_4 = 0$, che è quindi il sottospazio cercato.
(d) Per $t = 4$, si ha la matrice di rango 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 8 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni (su } \mathbb{Q}\text{) è } \left\langle \begin{pmatrix} 42 \\ 6 \\ 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

come abbiamo già osservato in precedenza.

Sul corpo $\mathbb{F}_3$, la matrice precedente è uguale alla matrice di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e lo spazio delle soluzioni (su } \mathbb{F}_3\text{) è } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 luglio 2005

ESERCIZIO 1. *Si consideri l'insieme* $\mathscr{C} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 1 = 0 \,\}$.

(*a*) *Si verifichi che* $\mathscr{C}$ *è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.*

(*b*) *Data la funzione* $f(z) = \dfrac{z}{z-i}$ *e si determinino i sottoinsiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *dando delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.*

(*c*) *Si dica quale tra gli insiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi* $\mathscr{C}$, $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che $z\bar{z} - (2-i)z - (2+i)\bar{z} + 1 = (z-2-i)(\bar{z}-2+i) - 4 = \|z-(2+i)\|^2 - 4$. Dunque $\mathscr{C}$ è il cerchio di centro $2+i$ e raggio 2.

(*b*) e (*c*) Osserviamo che

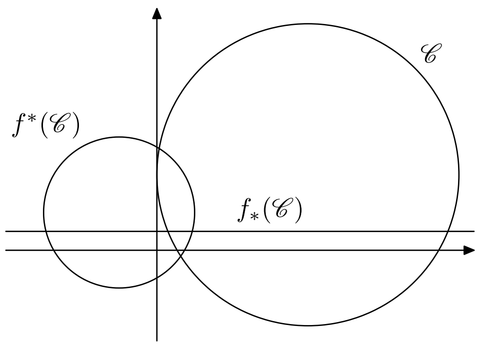
$$f^*(\mathscr{C}) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathscr{C} \,\} = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z)\overline{f(z)} - (2-i)f(z) - (2+i)\overline{f(z)} + 1 = 0 \,\right\} = $$
$$= \{\, z \in \mathbb{C} \mid 2z\bar{z} + (1+i)z + (1-i)\bar{z} + 1 = 0 \,\}\,.$$

Quindi $f^*(\mathscr{C})$ è il cerchio di centro $\frac{i-1}{2}$ e raggio 1.

La funzione inversa di f è $g(w) = \frac{iw}{w-1}$. Dunque

$$f_*(\mathscr{C}) = \{\, f(z) \mid z \in \mathscr{C} \,\} = \{\, w \in \mathbb{C} \mid g(w) \in \mathscr{C} \,\} =$$
$$= \left\{\, w \in \mathbb{C} \;\middle|\; g(w)\overline{g(w)} - (2-i)g(w) - (2+i)\overline{g(w)} + 1 = 0 \,\right\} = \{\, w \in \mathbb{C} \mid 2iw - 2i\bar{w} + 1 = 0 \,\}\,.$$

Quindi $f_*(\mathscr{C})$ è la retta $y = \frac{1}{4}$ del piano di Gauss.



I sottoinsiemi sono rappresentati nella figura qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i sottospazi* U *e* W *di* $\mathbb{R}^4$ *così definiti:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Per ognuno dei sottospazi* U *e* W, *si determinino la dimensione ed una base e si verifichi se* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della proiezione,* $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *sul sottospazio* U, *parallelamente a* W *e se ne calcolino nucleo ed immagine.*

(c) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della simmetria* $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, *di asse* W *e parallela al sottospazio* U. *È vero che, per ogni vettore* $v \in \mathbb{R}^4$ *si ha* $v + \sigma(v) = 2(v - \pi(v))$.

Svolgimento. (a) Detti, nell'ordine, u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U, si vede che $2u_1 - u_2 + 2u_3 = 0$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti. Dunque, $\dim U = 2$ ed una base è data dai vettori u_1 ed u_3.

Il sistema omogeneo che definisce W ha rango 2; infatti la terza equazione è uguale alla differenza tra la seconda ed il doppio della prima. Dunque $\dim W = 2$ ed una base del sottospazio è data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Infine osserviamo che i quattro vettori u_1, u_3, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = au_1 + bu_3$, ove i coefficienti a e b sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} (x_1 - 2a) - (x_2 - b) = 0 \\ 2(x_2 - b) + (x_3 + a - b) + (x_4 - b) = 0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad \begin{cases} a = \frac{4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4}{7} \\ b = \frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4}{7} \end{cases}.$$

La matrice cercata è quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

(c) Ricordiamo che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, si ha $v = \pi(v) + (1-\pi)(v)$ e che $\sigma(v) = -\pi(v) + (1-\pi)(v) = v - 2\pi(v)$; ovvero $\sigma = 1 - 2\pi$, e la matrice è

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -9 & 8 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & -10 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Infine, aggiungendo v ai due membri dell'uguaglianza $\sigma(v) = v - 2\pi(v)$ si ha la tesi. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_1 + (2t - t^2)X_2 + X_4 - 2tX_5 = 1 - t \\ (t-1)X_2 + tX_3 - tX_5 = -1 \\ (t-1)X_1 + (2t - t^2)X_2 + (2t-1)X_3 - X_4 + (2t+1)X_5 = t \\ (t-1)X_1 + (1 + t - t^2)X_2 - tX_3 - X_4 + 5tX_5 = 3t \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.
(a) Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(b) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(c) Per ogni numero primo p, si risolva il sistema Σ_p, considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b). Consideriamo la matrice del sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} t-1 & 2t-t^2 & 0 & 1 & -2t & 1-t \\ 0 & t-1 & t & 0 & -t & -1 \\ t-1 & 2t-t^2 & 2t-1 & -1 & 2t+1 & t \\ t-1 & 1+t-t^2 & -t & -1 & 5t & 3t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} t-1 & 2t-t^2 & 0 & 0 & t & t \\ 0 & t-1 & t & 0 & -t & -1 \\ 0 & 0 & 2t-1 & -1 & t+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3t & 1-2t \end{array}\right),$$

come si verifica moltiplicando a sinistra per la matrice

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{1, \frac{1}{2}\}$ e le soluzioni di Σ_t sono i punti della retta $\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1 \\ 1-2t \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-t \\ 3t(1-t) \\ 1-t \end{pmatrix} \right\rangle$. Per $t = \frac{1}{2}$, si ha un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 & 2 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni formano il piano } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, si ha di nuovo un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Sul corpo $\mathbb{F}_p$, la matrice del sistema Σ_p è uguale a

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$$

come si ottiene sottraendo alla III la I riga ed alla IV la differenza tra la I e la II.

Se $p \neq 2$, il sistema ha rango 4 e le soluzioni sono i punti della retta

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $p = 2$, il sistema ha rango 3 e le soluzioni sono i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 13 settembre 2005

ESERCIZIO 1.

(*a*) *Determinare il* $MCD(111, 2310)$ *e scriverlo come combinazione dei due numeri dati.*

(*b*) *Determinare le soluzioni della congruenza* $111X \equiv 138 \mod 2310$.

(*c*) *Determinare le soluzioni del sistema* $\begin{cases} 111X \equiv 138 \mod 2310 \\ 2X \equiv 4 \mod 13 \end{cases}$.

Svolgimento. (a) $MCD(111, 2310) = 3 = 333 \cdot 111 - 2310 \cdot 16$.

(*b*) Anche 138 è divisibile per 3, quindi la prima congruenza è equivalente a $37X \equiv 46 \mod 770$. Per quanto visto nel punto precedente, 333 è l'inverso di 37, modulo 770, e quindi le soluzioni della congruenza sono la classe laterale $x = 333 \cdot 46 + 770\mathbb{Z} = 688 + 770\mathbb{Z}$.

(*c*) Sia $x = 688 + 770k \equiv 12 + 3k \mod 13$ e sostituiamolo ad X nella seconda congruenza. Si ottiene così $6k \equiv 6 \mod 13$ e quindi $k \in 1 + 13\mathbb{Z}$, da cui si conclude che le soluzioni del sistema sono gli elementi della classe laterale $1458 + 10010\mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'insieme* $\mathscr{C} = \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (2 - 3i)z - (2 + 3i)\bar{z} + 4 = 0 \}$.

(*a*) *Si verifichi che* $\mathscr{C}$ *è un cerchio del piano di Gauss e se ne determinino centro e raggio.*

(*b*) *Data la funzione* $f(z) = \dfrac{z - i}{z - 2}$ *e si determinino i sottoinsiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *scrivendo delle equazioni soddisfatte dai loro elementi.*

(*c*) *Si dica quale tra gli insiemi* $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$ *è una retta oppure un cerchio e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi* $\mathscr{C}$, $f^*(\mathscr{C})$ *e* $f_*(\mathscr{C})$.

Svolgimento. (a) Osserviamo che $z-(2+3i)z-(2-3i)\bar{z}+4 = (z-2-3i)(\bar{z}-2+3i)-9 = \|z-(2+3i)\|^2-9$. Dunque $\mathscr{C}$ è il cerchio di centro $2 + 3i$ e raggio 3.

(*b*) e (*c*) Osserviamo che

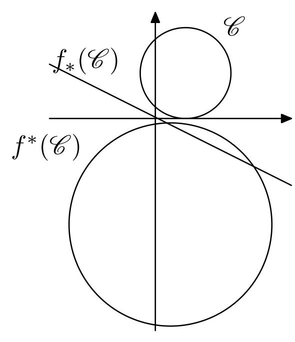
$$f^*(\mathscr{C}) = \{ z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathscr{C} \} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; f(z)\overline{f(z)} - (2 - 3i)f(z) - (2 + 3i)\overline{f(z)} + 4 = 0 \right\} =$$
$$= \{ z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} - (1 + 7i)z - (1 - 7i)\bar{z} + 5 = 0 \}.$$

Quindi $f^*(\mathscr{C})$ è il cerchio di centro $1 - 7i$ e raggio $3\sqrt{5}$.

La funzione inversa di f è $g(w) = \frac{2w-i}{w-1}$. Dunque

$$f_*(\mathscr{C}) = \{ f(z) \mid z \in \mathscr{C} \} = \{ w \in \mathbb{C} \mid g(w) \in \mathscr{C} \} =$$
$$= \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; g(w)\overline{g(w)} - (2 - 3i)g(w) - (2 + 3i)\overline{g(w)} + 4 = 0 \right\} =$$
$$= \{ w \in \mathbb{C} \mid (3 - 6i)w + (3 + 6i)\bar{w} - 1 = 0 \}.$$

Quindi $f_*(\mathscr{C})$ è la retta $6x + 12y = 1$ del piano di Gauss.



I sottoinsiemi sono rappresentati nella figura a fianco. □

ESERCIZIO 3. *Si considerino i sottospazi* U *e* W *di* $\mathbb{R}^4$ *così definiti:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad e \quad W : \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Per ognuno dei sottospazi U e W, si determinino la dimensione ed una base e si verifichi se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
(b) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della proiezione, $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, sul sottospazio U, parallelamente a W e se ne calcolino nucleo ed immagine.*
(c) *Si determini la matrice, rispetto alla base canonica, della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, di asse W e parallela al sottospazio U. È vero che, per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^4$ si ha $v - \sigma(v) = 2\pi(v)$.*

Svolgimento. (a) Detti, nell'ordine, u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U, si vede che $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$. I tre vettori sono linearmente dipendenti ed una base di U è data dai vettori u_1 ed u_2; quindi $\dim U = 2$.

Il sistema omogeneo che definisce W ha rango 2; infatti la prima equazione è uguale alla differenza tra la seconda ed il doppio della terza. Dunque $\dim W = 2$ ed una base del sottospazio è data dai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Infine osserviamo che i quattro vettori u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, la sua proiezione su U, parallelamente a W è il vettore $\pi(x) = au_1 + bu_2$, ove i coefficienti a e b sono determinati in modo che $x - \pi(x) \in W$. Dunque, si ha

$$\begin{cases} 2(x_1 - a - 2b) - (x_3 - b) = 0 \\ (x_2 + a) + (x_3 - b) + (x_4 - b) = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} a = \frac{4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 3x_4}{7} \\ b = \frac{2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4}{7} \end{cases}.$$

La matrice cercata è quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e, per costruzione, il nucleo è W e l'immagine è U. (c) Ricordiamo che, per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, si ha $v = \pi(v) + (1 - \pi)(v)$ e che $\sigma(v) = -\pi(v) + (1 - \pi)(v) = v - 2\pi(v)$; ovvero $\sigma = 1 - 2\pi$, e la matrice è

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 9 & 2 & -6 & 2 \\ -8 & -1 & 10 & 6 \\ 4 & 4 & -5 & 4 \\ 4 & 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Infine, si ha $v - \sigma(v) = v - (v - 2\pi(v)) = 2\pi(v)$, come richiesto. □

ESERCIZIO 4. *Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-1)X_2 + (t+1)X_3 + tX_4 - tX_5 = t^2 + 2t - 1 \\ tX_1 + (t-1)X_2 + (1-t)X_3 + (1+t)X_4 = 2t - t^2 - 2 \\ tX_1 + 2X_3 - tX_5 = 4t \\ tX_1 + (1-t)X_3 + X_4 = 2t - t^2 - 1 \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.
(a) *Si determini il rango di Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(b) *Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_t, al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(c) *Per ogni numero primo p, si risolva il sistema Σ_p, considerando i coefficienti nel corpo $\mathbb{F}_p$.*

Svolgimento. (a) e (b). Consideriamo la matrice del sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & t-1 & t+1 & t & -t & t^2+t-1 \\ t & t-1 & 1-t & 1+t & 0 & 2t-t^2-2 \\ t & 0 & 2 & 0 & -t & 4t \\ t & 0 & 1-t & 1 & 0 & 2t-t^2-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} t & 0 & 1-t & 0 & 0 & 2t-t^2 \\ 0 & t-1 & 0 & t & 0 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 & 0 & -t & t^2+2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right),$$

come si verifica moltiplicando a sinistra per la matrice invertibile

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice è quindi uguale a 4 per $t \notin \{-1, 0, 1\}$ e le soluzioni di Σ_t sono i punti della retta $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per $t = -1$, si ha un sistema di rango 4

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e le soluzioni formano la retta} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 0$, si ha un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, si ha di nuovo un sistema di rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e le soluzioni formano il piano} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) Sul corpo $\mathbb{F}_p$, la matrice del sistema Σ_p è uguale a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia il primo p, il sistema ha rango 3, e le soluzioni. sono i punti del piano

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$