Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 4 novembre 2005

ESERCIZIO 1. *Si ponga* $a = n_1n_3n_5 + 900$ *e* $b = n_2n_4n_6 + 600^{(\dagger)}$.

(a) *Si determini* $d = MCD(a, b)$ *e gli interi* $m, n \in \mathbb{Z}$ *tali che* $d = ma + nb$ *con* $|m| < b$ *ed* $|n| < a$.

(b) *Si determinino le soluzioni delle congruenze* $mX \equiv d \mod |n|$ *ed* $nX \equiv d \mod |m|$.

(c) *Posto* $s = a/d$ *ed* $r = b/d$, *si determinino le soluzioni del sistema di congruenze* $\begin{cases} 7X \equiv 5 \mod s \\ 3X \equiv 4 \mod r \end{cases}$.

Svolgimento. (a) Sia $M = 540213$ il numero di matricola. Allora, $a = 501 + 900 = 1401$ e $b = 423 + 600 = 1023$, e $d = 3 = -46 \cdot 1401 + 63 \cdot 1023$.

(b) Osserviamo che $MCD(m, n) = 1$, perché $1 = m(a/d) + n(b/d)$, e quindi le due congruenze ammettono entrambe soluzione. Dalla combinazione $d = ma + nb$, si ricava che tutte le soluzioni della prima congruenza formano la classe $a + |n|\mathbb{Z} = 15 + 63\mathbb{Z}$. Analogamente le soluzioni della seconda congruenza sono gli elementi della classe $b + |m|\mathbb{Z} = 11 + 46\mathbb{Z}$.

(c) Siano $s = a/d = 467$ ed $r = b/d = 341$; si ha $MCD(7, s) = 1 = MCD(3, r)$ e quindi le due congruenze hanno soluzione. Si ha $1 = 3 \cdot 467 - 200 \cdot 7$ da cui si deduce che $7 \cdot (-200) \equiv 1 \mod 467$ e quindi tutte le soluzioni della congruenza $7X \equiv 5 \mod 467$ sono gli interi $X \in (-200 \cdot 5) + 467\mathbb{Z} = -66 + 467\mathbb{Z}$. Sia dunque $X = 401 + 467Y$ e sostituiamolo nella seconda congruenza; si ottiene così che $37Y \equiv 165 \mod 341$. Essendo $1 = 341 \cdot 14 - 129 \cdot 37$, si deduce che $37 \cdot 212 \equiv 1 \mod 341$ e quindi tutte le soluzioni di quest'ultima congruenza sono gli interi $Y \in 212 \cdot 165 + 341\mathbb{Z} = 198 + 341\mathbb{Z}$. Dunque le soluzioni del sistema sono gli interi $X = 401 + 467(198 + 341k) = 92867 + 159247k$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia* x *un numero reale diverso da* 1.

(a) *Posto* $\sigma_n = x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$, *si verifichi per induzione che* $\sigma_n = x\dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$, *per ogni* $n \geq 1$.

(b) *Posto* $S_n = 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n$, *si verifichi che* $S_{n+1} = xS_n + \sigma_n$, *per ogni* $n \geq 1$.

(c) *Da quanto visto nel punto precedente e dall'osservazione che* $S_{n+1} = S_n + (n + 1)x^{n+1}$, *si deduca una formula chiusa per* S_n *e la si verifichi per induzione.*

(d) *Si osservi che*

$$9 \cdot 1 + 2 = 11, \quad 9 \cdot 12 + 3 = 111, \quad 9 \cdot 123 + 4 = 1111, \quad 9 \cdot 1234 + 5 = 11111.$$

Si usi la formula chiusa di S_n, *per un opportuno valore di* x, *per generalizzare queste identità per ogni intero positivo* n. *Come si può modificare l'espressione ottenuta per ottenere un analogo risultato per una base* b *diversa da* 10?

Svolgimento. (a) Per $n = 1$ si ha $\sigma_1 = x + x^2 = x\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Supponiamo quindi vera l'uguaglianza per un numero naturale n e verifichiamola per $n + 1$. Si ha

$$\sigma_{n+1} = x + x^2 + \cdots + x^{n+2} = x\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} + x^{n+2} = x\frac{x^{n+2} - 1}{x - 1}.$$

(b) Con un calcolo diretto, si ha

$$xS_n + \sigma_n = x(1x + 2x^2 + \cdots + nx^n) + (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n + (n + 1)x^{n+1},$$

che è quanto volevamo.

(†) N.B. le cifre vanno giustapposte e non moltiplicate tra loro. Ad esempio, se il numero di matricola è 510342, allora $a = 504 + 900 = 1404$ e $b = 132 + 600 = 732$.

(c) Dalla relazione $S_n + (n+1)x^{n+1} = S_{n+1} = xS_n + \sigma_n$ si deduce

$$(x-1)S_n = (n+1)x^{n+1} - x\frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \qquad \text{ovvero} \qquad S_n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

Verifichiamo la formula per induzione. Per $n=1$ si ha $S_1 = x = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{(x-1)^2}$. Supponiamo quindi vera l'uguaglianza per un numero naturale n e verifichiamola per $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1x + 2x^2 + \cdots + nx^n + (n+1)x^{n+1} = \\ &= \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2} + (n+1)x^{n+1} = \\ &= \frac{(n+1)x^{n+3} - (n+2)x^{n+2} + x}{(x-1)^2}, \end{aligned}$$

che è quanto volevamo.

(d) I membri di sinistra dell'uguaglianza sono i termini iniziali della sequenza

$$T_n = 9 \cdot 10^n \left(\sum_{j=1}^{n} j10^{-j} \right) + (n+1).$$

Per quanto visto al punto precedente, possiamo scrivere,

$$T_n = 9 \cdot 10^n \frac{n(1/10)^{n+2} - (n+1)(1/10)^{n+1} + 1/10}{(1/10-1)^2} + (n+1) = \frac{10^{n+1}-1}{9}$$

che generalizza le uguaglianze date per un numero naturale n qualsiasi.

È ora chiaro che, per ottenere delle analoghe identità per una qualsiasi base, b, basta scrivere b al posto di 10 e $b-1$ al posto di 9, ovvero

$$(b-1)b^n \sum_{j=1}^{n} jb^{-j} + (n+1) = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}.$$

Le identità possono essere facilmente verificate per induzione su n. □

ESERCIZIO 3. *Siano $k, m, n \in \{1,2,3\}$ tali che $k \equiv n_4 \mod 3$, $m \equiv n_5 \mod 3$, $n \equiv n_6 \mod 3$, e si consideri la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{miz - k}{z - 1 - ni}$.*

(a) Si determinino dominio ed immagine di f e l'eventuale funzione inversa.

(b) Si determini il sottoinsieme $U = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| < k \,\}$ e lo si disegni nel piano di Gauss.

(c) Posto $a = m + in$ e $b = 2kn$, si consideri il sottoinsieme $R = \{\, z \in \mathbb{C} \mid az + \bar{a}\bar{z} + b = 0 \,\}$. Si determinino e si disegnino nel piano di Gauss i sottoinsiemi R ed $R \cap g^*(U)$, ove g è l'inversa di f.

(d) Si dica se $g_*(R)$ è un cerchio oppure una retta.

Svolgimento. (a) La funzione f è definita quando $z \neq 1 + ni$ e la sua inversa è la funzione $g(w) = \frac{(1+ni)w - k}{w - mi}$, come si verifica con un calcolo diretto. La funzione g è definita per $w \neq mi$, e quindi, il dominio e l'immagine di f sono rispettivamente $D = \mathbb{C} \setminus \{1 + ni\}$ e $C = \mathbb{C} \setminus \{mi\}$.

(b) Posto $z = x + iy$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha che, per ogni $z \in D$,

$$\left| \frac{miz - k}{z - 1 - ni} \right| < k \iff (m^2 - k^2)(x^2 + y^2) + 2k^2 x + 2k(m + kn)y - k^2 n^2 < 0.$$

Dunque, se $m \neq \pm k$, ovvero se n_4 non è congruo ad n_5 modulo 3, l'insieme U è formato dai punti del piano di Gauss delimitati dalla circonferenza di centro $c = -\frac{k^2}{m^2-k^2} - i\frac{k(m+kn)}{m^2-k^2}$ e raggio $r = \frac{k\sqrt{(nm+k)^2+m^2}}{|m^2-k^2|}$. Precisamente, si tratta dei punti interni alla circonferenza se $m > k$ e dei punti esterni se $m < k$. Nel caso in cui $m = k$, si trova che U è l'insieme dei punti al di sopra della retta di equazione $2x + 2(n+1)y = n^2$.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si ricava che R è uguale all'insieme dei punti (x, y) del piano di Gauss tali che $y = \frac{m}{n}x + k$ e si tratta quindi della retta passante per i punti corrispondenti ai numeri complessi ki e $-\frac{kn}{m}$.

Osserviamo che, essendo f e g l'una l'inversa dell' altra, si ha

$$g^*(U) = \{\, z \in \mathbb{C} \mid g(z) \in U \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |f(g(z))| < k \,\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < k \,\}$$

e quindi $R \cap g * U$ è l'intersezione della retta R con i punti interni al cerchio di raggio k, centrato nell'origine, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = k^2 \\ y = \frac{m}{n}x + k \end{cases}$$

ovvero i punti interni al segmento di estremi $z_1 = ik$ e $z_2 = -\frac{2mnk}{n^2+m^2} + ik\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2}$.

(d) Ricordiamo che l'immagine diretta di una retta, r, tramite g è un cerchio, a meno che la retta non passi per il punto ove si annulla il denominatore di g, nel qual caso, l'immagine diretta è una retta. Nel nostro caso la retta R contiene il punto mi se, e solo se, $m = k$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 7 dicembre 2005

ESERCIZIO 1. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si considerino in $\mathbb{R}^4$ i vettori*

$$u_1 = ne_1 + e_3, \quad u_2 = \frac{1}{2n+1}e_2, \qquad w_1 = -e_2 + (2n+1)e_3, \quad w_2 = 2ne_1 + 2e_3 + \frac{1}{n}e_4;$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è, come di consueto, la base canonica.

(a) *Posto $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$ e si determinino delle equazioni cartesiane per U e W. Detta $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U, parallelamente a W, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$.*

(b) *Sia $\phi : W \to U$ l'applicazione lineare di matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi $\mathcal{W} = \{w_1, w_2\}$ e $\mathcal{U} = \{u_1, u_2\}$. Si consideri il sottospazio $W_\phi = \{\, w + \phi(w) \mid w \in W \,\}$ e si determinino $\dim W_\phi$ ed una sua base. Detta $\pi_\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su U parallela a W_ϕ, si calcolino $\pi_\phi(w_1)$ e $\pi_\phi(w_2)$.*

(c) *Sia $W' = \langle e_1 - 2e_3, ne_2 + e_4 \rangle$. Si verifichi che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W'$. Si dica se esiste una applicazione lineare $\psi : W \to U$ tale che $W' = \{\, w + \psi(w) \mid w \in W \,\}$ e, in caso affermativo, si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi)$.*

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto, si verifica che u_1, u_2, w_1, w_2 sono linearmente indipendenti e sono quindi una base di $\mathbb{R}^4$. Dunque $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. Delle equazioni cartesiane per i due sottospazi possono essere

$$U : \begin{cases} x_1 - nx_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_1 - 2n^2x_4 = 0 \\ (2n+1)x_2 + x_3 - 2nx_4 = 0 \end{cases}.$$

Dato un generico vettore, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, la sua proiezione su U è una combinazione lineare $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, tale che $x - \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in W$. Sostituendo le coordinate di questo vettore nelle equazioni del sottospazio W, si ricava

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{n} - 2nx_4, \qquad \alpha_2 = (2n+1)x_2 + x_3 - \frac{x_1}{n},$$

da cui si deduce che la matrice cercata è

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2n^2 \\ -\frac{1}{n(2n+1)} & 1 & \frac{1}{2n+1} & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & 0 & -2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Si ha $W_\phi = \langle w_1 + \phi(w_1), w_2 + \phi(w_2) \rangle$ ed i due vettori sono una base del sottospazio. Infatti, se fosse $\beta_1(w_1 + \phi(w_1)) + \beta_2(w_2 + \phi(w_2)) = 0$ si avrebbe $\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 = -\beta_1\phi(w_1) - \beta_2\phi(w_2) \in U \cap W = \langle 0 \rangle$. Da cui si conclude che $\beta_1 = \beta_2 = 0$, per l'indipendenza di w_1, w_2. Dunque $\dim W_\phi = 2$ ed $\mathbb{R}^4 = U \oplus W_\phi$. Da quanto visto nel punto precedente, dato un vettore $x \in \mathbb{R}^4$, esistono (e sono unici) due vettori $u \in U$ e $w \in W$ tali che $x = u + w$. Si ha quindi

$$x = (u - \phi(w)) + (w + \phi(w)), \qquad \text{con } u - \phi(w) \in U,\ w + \phi(w) \in W_\phi;$$

da cui si deduce che $\pi_\phi(x) = u - \phi(w) = \pi(x) - \phi(x - \pi(x))$. Dunque $\pi_\phi(w_1) = -\phi(w_1) = -2u_1 + u_2$, $\pi_\phi(w_2) = -\phi(w_2) = 3u_1 - 2u_2$.

(c) I vettori u_1, u_2, $e_1 - 2e_3$, $ne_2 + e_4$ sono linearmente indipendenti, come si verifica con un calcolo diretto, quindi sono una base di $\mathbb{R}^4 = U \oplus W'$. Un'applicazione lineare $\psi : W \to U$, soddisfacente alle condizioni date, esiste se, e solo se, esiste la matrice $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\psi)$, ovvero se esistono delle costanti $a_{11}, \dots, a_{22}$ tali che

$$w_1 - a_{11}u_1 - a_{21}u_2 \in W' \qquad w_2 - a_{12}u_1 - a_{22}u_2 \in W'.$$

Osservando che delle equazioni cartesiane per W' sono $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - nx_4 = 0 \end{cases}$, si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} (2n+1)a_{11} + 2n + 1 = 0 \\ -1 + \frac{a_{21}}{2n+1} = 0 \\ (2n+1)a_{12} + 4n + 2 = 0 \\ \frac{a_{22}}{2n+1} - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} a_{11} = -1 \\ a_{21} = 2n+1 \\ a_{12} = -2 \\ a_{22} = 2n+1 \end{cases}.$$

L'esistenza dell'applicazione ψ, poteva essere dedotta anche nel modo seguente. Detta $\pi' : \mathbb{R}^4 \to W$, la proiezione su W, parallelamente ad U, dalla condizione $U \cap W' = \langle 0 \rangle$, si deduce che $\pi'_{|W'} : W' \to W$ è un isomorfismo tra W' e W. L'omomorfismo $\psi : W \to U$ altri non è che $\pi \circ {\pi'_{|W'}}^{-1}$. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1, 2, 3\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 3$. Sia $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a 3 e siano*

- *$\pi : \mathbb{R}[X] \to V$ la proiezione su V nella direzione del sottospazio $\langle X^n \mid n \geq 4 \rangle$;*
- *$\psi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'applicazione $P(X) \mapsto (X-n)^3 P'(X) - 3(X-n)^2 P(X)$, ove $P'(X)$ è la derivata di $P(X)$;*
- *$\phi : V \to V$ la composizione $V \xrightarrow{j} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}[X] \xrightarrow{\pi} V$, ove j è l'inclusione $V \subset \mathbb{R}[X]$.*

(*a*) *Verificare che ϕ è un'applicazione lineare e scrivere la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$.*
(*b*) *Determinare una base per kerϕ, imϕ, ker$\phi \cap$ imϕ e ker$\phi +$ imϕ.*
(*c*) *Si consideri $\phi^2 = \phi \circ \phi$. È vero che $V = \ker\phi^2 \oplus \operatorname{im}\phi^2$ e che $\phi(\ker\phi^2) \subseteq \ker\phi^2$ ed $\phi(\operatorname{im}\phi^2) \subseteq \operatorname{im}\phi^2$? È vero che $\ker\phi^n = \ker\phi^2$ per ogni $n \geq 2$?*
(*d*) *Dire se il sottoinsieme $A = \{ \beta \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \mid \phi \circ \beta = 0 \}$ è un sottospazio di $\operatorname{End}_{\mathbb{R}} V$. In caso affermativo, si consideri l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}} : \operatorname{End}_{\mathbb{R}} V \to M_4(\mathbb{R})$ e si determinino la dimensione ed una base del sottospazio $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(A)$.*

Svolgimento. (a) La derivazione, così come la moltiplicazione per un fissato polinomio sono applicazioni lineari. La composizione e la somma di applicazioni lineari sono applicazioni lineari, per cui ϕ è un'applicazione lineare. La sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -3n^2 & -n^3 & 0 & 0 \\ 6n & 0 & -2n^3 & 0 \\ -3 & 3n & 3n^2 & -3n^3 \\ 0 & -2 & 0 & 6n^2 \end{pmatrix}.$$

(*b*) Il nucleo è il sottospazio $\ker\phi = \langle (X-n)^3 \rangle$, di dimensione 1. L'immagine ha dimensione 3 ed è il sottospazio $\langle 2n^3X - 3n^2X^2, 2X^3 - 3nX^2 + n^3, 6n^2X^3 - 3n^3X^2 \rangle$. Inoltre, $\phi(X-n) = -2(X-n)^3$ genera $\ker\phi$, e quindi $\ker\phi \subset \operatorname{im}\phi$, da cui si conclude che $\ker\phi \cap \operatorname{im}\phi = \ker\phi$ e $\ker\phi + \operatorname{im}\phi = \operatorname{im}\phi$.

(*c*) Si ha

$$\ker\phi^2 = \langle X - n, (X-n)^3 \rangle \qquad \operatorname{im}\phi^2 = \langle 4x^3 - 6nX^2 + 4n^2X - n^3, 20X^3 - 15nX^2 + 6n^2X - n^3 \rangle$$

e $\ker\phi^2 \cap \operatorname{im}\phi^2 = \langle 0 \rangle$; quindi $\mathbb{R}^4 = \ker\phi^2 \oplus \operatorname{im}\phi^2$. È ovvio che, se $P \in \ker\phi^2$, allora $\phi(P) \in \ker\phi \subset \ker\phi^2$. Se, invece, $P \in \operatorname{im}\phi^2$, allora $P = \phi^2(Q)$ per un polinomio $Q \in V$ e $\phi(P) = \phi^3(Q) = \phi^2(\phi(Q)) \in \operatorname{im}\phi^2$. Infine, che $\ker\phi^n = \ker\phi^2$, è certamente vero per $n = 2$; supponiamolo vero per un esponente n e dimostriamolo per l'esponente successivo. Se $\ker\phi^{n+1}$ contenesse propriamente $\ker\phi^2 = \ker\phi^n$, esisterebbe un polinomio P, con $0 \neq P \in \operatorname{im}\phi^n \cap \ker\phi$; ma $\operatorname{im}\phi^n \subseteq \operatorname{im}\phi^2$, $\ker\phi \subset \ker\phi^2$ e $\operatorname{im}\phi^n \cap \ker\phi \subseteq \operatorname{im}\phi^2 \cap \ker\phi^2 = \langle 0 \rangle$ e quindi un tale P non può esistere.

(*d*) Il sottoinsieme A contiene l'omomorfismo nullo ed inoltre, poiché la composizione di applicazioni lineari distribuisce rispetto alla somma, si conclude che A è un sottospazio. Un omomorfismo β appartiene ad A se, e solo se, $\operatorname{im}\beta \subseteq \ker\phi$ e quindi una matrice sta in $\alpha_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_n}(A)$ se le colonne sono multipli delle coordinate di $(X-n)^3$ e quindi una base di $\alpha_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(A)$ sono le matrici

$$\begin{pmatrix} -n^3 & 0 & 0 & 0 \\ 3n^2 & 0 & 0 & 0 \\ -3n & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -n^3 & 0 & 0 \\ 0 & 3n^2 & 0 & 0 \\ 0 & -3n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -3n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -n^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3n^2 \\ 0 & 0 & 0 & -3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha perció dimensione 4. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_4 \mod 4$. Si consideri il seguente sistema a coefficienti reali:*

$$\begin{cases} (1-2n-t)x_1 + x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \\ (t+2n-1)x_1 + (t-1)x_2 + (t-1)x_3 + (t-3)x_4 - (1+n)x_5 = -n^2 - n \\ tx_2 + (t-1)x_3 + (t-1)x_4 - nx_5 = -n^2 \\ (1-2n-t)x_1 + (t+1)x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \end{cases}$$

(a) *Per quali valori di t il sistema non ammette soluzioni? Per quali valori di t ammette un'unica soluzione? Per quali valori di t il sistema ammette infinite soluzioni? In ogni caso, determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

(b) *Si determinino le soluzioni del sistema, al variare di t in $\mathbb{R}$.*

(c) *Dire se esiste l'inversa della matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ n & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e, in caso affermativo, scriverla come prodotto di matrici elementari. Nel caso in cui B non sia invertibile determinare due matrici invertibili $P, Q \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ tali che $PBQ = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{1}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ove $r = rkB$.

Svolgimento. (a) Attraverso la riduzione di Gauss (I, I+II, III-I-II e IV-2I-II) si arriva al sistema

$$\begin{cases} (1-2n-t)x_1 + x_2 + (1-t)x_3 + 2x_4 + x_5 = n \\ tx_2 + (t-1)x_4 - nx_5 = -n^2 \\ (t-1)x_3 = 0 \\ (1-t)x_4 + nx_5 = n^2 \end{cases}$$

Il sistema ammette soluzioni per ogni valore di t e, in particolare, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$ è una soluzione, qualunque sia il valore di t. Il sistema ammette infinite soluzioni per ogni valore del parametro t e, precisamente, le soluzioni del sistema omogeneo associato formano un sottospazio di dimensione 1 per $t \notin \{1-2n, 0, 1\}$. Per gli altri valori di t il sistema omogeneo associato ammette un sottospazio di dimensione 2 di soluzioni.

(b) Abbiamo già visto nel punto precedente che il sistema ha la soluzione $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$, indipendentemente dal valore del parametro t. Per $t \notin \{1-2n, 0, 1\}$ la matrice incompleta ha rango 4 e le soluzioni del sistema omogeneo associato sono tutti i vettori del sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ t-1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 0$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2n-1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per $t = 1 - 2n$, la matrice incompleta ha rango 3 e le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*c*) Per $n \neq 1$, la matrice B ha rango 4 e quindi, con operazioni elementari sulle righe, si può trasformare nella matrice identica. Ad esempio, $I, I - II, I - III, IV - nI$, seguita da $I, II, III, \frac{1}{n-1}IV + II$ e da $I - II + IV, II, III + IV, IV$. Il prodotto delle matrici elementari corrispondenti è l'inversa cercata, ovvero

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{n-1} & 0 & 0 & \frac{1}{n-1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{n-2}{n-1} & -1 & -1 & \frac{1}{n-1} \\ -\frac{1}{n-1} & -1 & 0 & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}$$

Per $n = 1$ la matrice B ha rango 3 e pensiamola come la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ di un endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ nella base canonica. Le matrici P e Q saranno quindi le matrici di cambiamento di base che portano ϕ in forma canonica. Prendiamo la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, ove $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$, $v_4 = e_1 + e_3 + e_4$, e l'ultimo vettore è una base di $\ker\phi$. Prendiamo poi la base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_4\}$, ove $w_1 = \phi(e_1) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $w_2 = \phi(e_2) = e_1 + e_3 + e_4$, $w_3 = \phi(e_3) = -e_3$, $w_4 = e_4$. È chiaro che $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; quindi le matrici cercate sono $Q = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{W}}(1) = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{E}}(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 15 dicembre 2005

ESERCIZIO 1. *Sia n un numero intero positivo.*

(*a*) *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

(*b*) *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

(*c*) *Si calcoli*

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2[n/2]}$$

ove $[n/2]$ indica il più grande intero, minore o uguale ad $n/2$.

Svolgimento. (a) Per la formula del binomio $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ è uguale a $(1+1)^n = 2^n$.

(*b*) Per la formula del binomio $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ è uguale a $(-1+1)^n = 0$.

(*c*) Da quanto visto nei punti precedenti si deduce

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + (-1)^k \binom{n}{k} = 2^{n-1}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 2. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si consideri la funzione di variabile complessa*

$$f(z) = \frac{(n+1)z + i(n-1)}{z+i}.$$

(*a*) *Si determinino il dominio e l'immagine di f e si determini la sua funzione inversa.*

(*b*) *Si disegnino i sottoinsiemi H e $D = f_*(H)$, ove $H = \{\, z \in \mathbb{C} \mid i(z - \bar{z}) < 0 \,\}$.*

(*c*) *Si considerino le trasformazioni $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ed $ad - bc = 1$, e si mostri che per ogni tale g si ha $g_*(H) = H = g^*(H)$. Data $g(z) = z + 1$, sia h la trasformazione composta $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Si determini $h_*(D)$.*

Svolgimento. (a) f è definita per $z \neq -i$ ed ha come immagine $\mathbb{C} \smallsetminus \{n+1\}$. Su quest'ultimo insieme è definita la funzione inversa $f^{-1}(z) = i\dfrac{z-n+1}{n+1-z}$.

(*b*) Osserviamo che $i(z - \bar{z}) = -2Im(z)$ e quindi H è il semipiano formato dai numeri complessi con parte immaginaria positiva. Si ha

$$D = f_*(H) = f^{-1*}(H) = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; i(f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(z)}) < 0 \,\right\} = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; z\bar{z} - nz - n\bar{z} + n^2 - 1 < 0 \,\right\}.$$

Quindi D è il disco aperto (senza il bordo) di centro n e raggio 1 e si ha $f_*^{-1}(D) = f^*(D) = H$.

(*c*) Consideriamo la trasformazione $g(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ e la sua inversa $g^{-1}(z) = \dfrac{dz-b}{a-cz}$. Si ha

$$g^*(H) = \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; i(g(z) - \overline{g(z)}) < 0 \,\right\} = \{\, z \in \mathbb{C} \mid i(ad-bc)(z - \bar{z}) < 0 \,\} = H$$

e, analogamente, $g_*(H) = g^{-1*}(H) = H$. Da quanto visto si conclude che $h_*(D) = f_*(g_*(f_*^{-1}(D))) = f_*(g_*(H)) = f_*(H) = D$, qualunque sia g tra le trasformazioni del tipo descritto e quindi ciò vale in particolare per $g(z) = z + 1$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si considerino i sottospazi di $\mathbb{C}^4$,*

$$D = \langle ne_1 - ie_3 + (i - n)e_4, nie_1 - (n - i)e_2 + e_3\rangle \qquad \text{ed} \qquad E = \langle e_1, e_2\rangle\,,$$

ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica.

(a) Per ognuno dei sottospazi, D ed E, si determinino delle equazioni cartesiane e si verifichi se $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$. Si dica se la proiezione su E, parallela a D, induce un isomorfismo $\mathbb{C}^4/D \cong E$.

(b) Si indichi con $\bar{D}$ l'insieme dei vettori di $\mathbb{C}^4$ che si ottengono dai vettori di D applicando il coniugio a tutte le coordinate. Si verifichi se $\mathbb{C}^4 = D \oplus \bar{D}$. Si considerino la base $\{e_1, e_2\}$ su E e la base di $\bar{D}$ formata dai coniugati dei vettori di base di D e si scriva la matrice dell'applicazione composta $\bar{D} \xrightarrow{j} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\pi} E$, ove j è l'inclusione e π la proiezione parallela a D.

(c) Sia $L = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle_{\mathbb{R}}$ lo spazio vettoriale reale generato dalla base canonica e si verifichi che la restrizione ad L della proiezione $\pi : \mathbb{C}^4 \to E$ induce un isomorfismo, $\phi : L \to E$, di spazi vettoriali reali. Si scriva la matrice nella base data dell'endomorfismo, $\psi : L \to L$, definito da $\psi(x) = \phi^{-1}(i\phi(x))$, per ogni $x \in L$.

Svolgimento. (a) Due sistemi di equazioni cartesiane sono

$$D : \begin{cases} ix_1 + nx_3 = 0 \\ x_1 + ix_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad E : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

Le coordinate dei generatori di E e D sono le colonne della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ni & n \\ 0 & 1 & i-n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & i-n \end{pmatrix}$, che ha chiaramente rango 4; dunque $\mathbb{C}^4 = D \oplus E$. La proiezione su E, parallela a D, è un endomorfismo di $\mathbb{C}^4$ che ha D come nucleo ed E come immagine, quindi, per il Primo Teorema di Isomorfismo, $E \cong \mathbb{C}^4/D$.

(b) $\bar{D}$ è il sottospazio di $\mathbb{C}^4$ generato dai coniugati dei due vettori di base di D, ovvero

$$\bar{D} = \langle ne_1 + ie_3 - (i + n)e_4, -nie_1 - (n + i)e_2 + e_3\rangle$$

e si può verificare, in modo analogo a quanto fatto nel punto precedente, che $\mathbb{C}^4 = D \oplus \bar{D}$. Detti $\bar{d}_1$ e $\bar{d}_2$ i due vettori di base di $\bar{D}$, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ di $\pi \circ j$ è determinata dalle condizioni

$$\bar{d}_1 - ae_1 - ce_2 \in D \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a = 2n \\ c = 2ni \end{cases}$$

e

$$\bar{d}_2 - be_1 - de_2 \in D \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} b = -2ni \\ d = -2i \end{cases}$$

come si ricava dalle equazioni cartesiane di D.

(c) I sottospazi L ed E hanno entrambi dimensione 4 su $\mathbb{R}$ e quindi la proiezione π induce un isomorfismo se, e solo se, la sua restrizione ad L è iniettiva. Ora $\ker \pi_{|L} = L \cap \ker \pi = L \cap D = \langle 0\rangle$, perché, se $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$, si ha

$$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in D \iff \begin{cases} ix_1 + nx_3 = 0 \\ x_1 + ix_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

In particolare, si ha

$$\pi(e_1) = e_1, \quad \pi(e_2) = e_2, \quad \pi(e_3) = -nie_1 + (n - i)e_2, \quad \pi(e_4) = -ie_2;$$

quindi, indicata con $\mathcal{L} = \{e_1, \dots, e_4\}$ la base canonica di L e con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, ie_1, ie_2\}$ la base "naturale" di E come spazio vettoriale reale, si ha

$$P = \alpha_{\mathcal{L},\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La moltiplicazione per i, $m_i : E \to E$, nella base data di E, ha matrice

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(m_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice di ψ è uguale a $P^{-1}AP$, ovvero

$$\alpha_{\mathcal{L},\mathcal{L}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/n & 0 \\ 0 & 0 & 1/n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n & 0 \\ 0 & 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1/n & 0 & 0 & 0 \\ 1/n & -1 & -n & 0 \end{pmatrix}.$$

Fine della discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si considerino le matrici*

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 \\ t-1 & 0 & t+1 & -2t-2 & 2t+2 \\ t-1 & -t & 1+t & -t & 2 \end{pmatrix}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) Si determini il rango di A_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(b) Si determini l'insieme, R_t, delle matrici B_t, tali che $A_t B_t = \mathbf{1}_4$, al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(c) Per ogni numero primo p, si determini il nucleo di A_p, considerando le entrate della matrice come elementi di $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b) Rispondere alla seconda domanda significa risolvere quattro sistemi lineari che hanno le colonne di B_t come incognite e le colonne della matrice identica, $\mathbf{1}_4$, come termini noti. Operiamo quindi col metodo di riduzione di Gauss sulla matrice completa di questo sistema, ovvero

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t-1 & 0 & t+1 & -2t-2 & 2t+2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ t-1 & -t & 1+t & -t & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

che è riga-equivalente a

$$\begin{array}{c} \\ \\ III - I \\ IV - I + II \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cccc} t-1 & 0 & 1 & -2t & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & -t & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & -2 & 2t & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t+1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

e quindi possiamo già affermare che, per $t \notin \{-1, 0, 1\}$, la matrice A_t ha rango 4 e quindi l'insieme R_t non è vuoto.

Proseguendo con la tecnica di eliminazione si ottiene

$$
\begin{array}{l}
I+\frac{2t}{t+1}IV) \\
\frac{1}{t}(II-\frac{1}{t+1}IV) \\
\frac{1}{t}(III+\frac{2}{t+1}IV) \\
\frac{1}{t+1}IV
\end{array}
\begin{pmatrix}
t-1 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & \frac{1-2t}{t+1} & \frac{2t}{t+1} & 0 & \frac{2t}{t+1} \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{t(t+1)} & \frac{1}{t+1} & 0 & -\frac{1}{t(t+1)} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & -\frac{t+3}{t(t+1)} & \frac{2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{2}{t(t+1)} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1}
\end{pmatrix}
$$

ed infine

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{t-1}(I-III) \\
II+III \\
\\
\\
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & -\frac{2t^2+3}{t(t^2-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} & -\frac{1}{t(t-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & -\frac{t+2}{t(t+1)} & \frac{t+2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{1}{t(t+1)} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & | & -\frac{t+3}{t(t+1)} & \frac{2}{t(t+1)} & \frac{1}{t} & \frac{2}{t(t+1)} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1}
\end{pmatrix}.
$$

Abbiamo quindi trovato una soluzione particolare al problema, a cui dobbiamo sommare tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato, ovvero le matrici che hanno come colonne vettori nel nucleo di A_t. Quindi, per $t \notin \{-1, 0, 1\}$, gli elementi di R_t sono le matrici

$$
\begin{pmatrix}
-\frac{2t^2+3}{t(t^2-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} & -\frac{1}{t(t-1)} & \frac{2t^2-2}{t(t^2-1)} \\
2a-\frac{t+2}{t(t+1)} & 2b+\frac{t+2}{t(t+1)} & 2c+\frac{1}{t} & 2d-\frac{1}{t(t+1)} \\
2a-\frac{t+3}{t(t+1)} & 2b+\frac{2}{t(t+1)} & 2c+\frac{1}{t} & 2d-\frac{2}{t(t+1)} \\
-\frac{1}{t+1} & \frac{1}{t+1} & 0 & \frac{1}{t+1} \\
-a & -b & -c & -d
\end{pmatrix}
\qquad \text{al variare di } a,b,c,d \in \mathbb{R}.
$$

Per $t = \pm 1$ il rango di A_t è uguale a 3, mentre per $t = 0$ il rango è 2. In tutti e tre i casi $R_t = \varnothing$ perché nessun prodotto A_tX può avere rango maggiore di $\operatorname{rk} A_t$.

(c) Osserviamo infine che, su $\mathbb{F}_p$, la matrice A_p diventa

$$
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\
-1 & 0 & 1 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Dunque ha rango 2 ed il suo nucleo è il sottospazio $K = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$, che mantiene senso anche in $\mathbb{F}_2$. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 gennaio 2006

ESERCIZIO 1. *Siano $n \geq 0$ e $k \geq 1$ due numeri interi e si indichi con P_k^n lo spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n in k indeterminate a coefficienti reali.*
(*a*) *Si mostri che* $\dim P_k^n = \binom{n+k-1}{n}$.
(*b*) *Si mostri che, per ogni $n \geq 0$ e $k \geq 1$, si ha*

$$\binom{n+k}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j}.$$

(*c*) *È vero che si ha*

$$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} + \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j}$$

per ogni $n \geq 0$ e $k \geq 1$?

Svolgimento. (a) La dimensione dello spazio vettoriale P_k^n coincide con il numero di monomi di grado n, in k indeterminate, $X_1, \dots, X_k$. Se $k = 1$, per ogni intero $n \geq 0$ c'è un unico monomio di grado n, X_1^n, e quindi $\dim P_1^n = 1 = \binom{n}{n}$, che dimostra la formula in questo caso particolare. Se $k > 1$, osserviamo che, se $n = 0$, l'unico monomio di grado 0 è la cortante 1 e quindi $\dim P_k^0 = 1 = \binom{k-1}{0}$. Possiamo quindi fare induzione supponendo che la formula sia vera per tutte le coppie di interi in cui almeno uno dei due è minore di n o di k e distinguiamo i monomi della base di P_k^n mettendo da una parte quelli in cui compare X_1 e dall'altra quelli in cui questo fattore non compare. I primi si otterranno moltiplicando per X_1 i monomi di grado $n-1$, mentre i secondi sono i monomi di grado n in $k-1$ indeterminate, applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\dim P_k^n = \dim P_k^{n-1} + \dim P_{k-1}^n = \binom{n+k-2}{n-1} + \binom{n+k-2}{n} = \binom{n+k-1}{n}$$

che è quanto dovevamo verificare.
(*b*) Sia fissato k e dimostriamo la formula per induzione su n. Se $n = 0$, si ha $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k-1}{0}$. Per $n > 0$, applicando l'ipotesi induttiva, si ha

$$\sum_{j=0}^{n+1} \binom{j+k-1}{j} = \binom{n+k}{n+1} + \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k-1}{j} = \binom{n+k}{n+1} + \binom{n+k}{n} = \binom{n+k+1}{n+1}$$

che dimostra la formula.
(*c*) Per quanto visto al punto precedente, si tratta di verificare se è vero che

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k-1}.$$

Possiamo quindi fissare n e fare induzione su k. Infatti, per $k = 1$, si ha $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{0}$. Per $k > 1$, applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\sum_{i=1}^{k+1} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k}{n} + \sum_{i=1}^{k} \binom{n+i-1}{n} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k+1}{k}.$$

Dunque la formula è vera per ogni k. □

ESERCIZIO 2. *Sia*
$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

(*a*) *Si verifichi che, qualunque siano A e B in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, si ha $AB \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ ed $A^{-1} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.*

(*b*) *Data $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, si consideri la funzione di variabile complessa $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$. Si determinino il dominio ed immagine di f_A. Sia $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid i(z - \bar{z}) < 0 \}$ e si mostri che $f_{A*}(H) = H = f_A^*(H)$ per ogni $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.*

(*c*) *Siano $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Si mostri che $f_{AB} = f_A \circ f_B$.*

Svolgimento. (a) Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \quad AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}.$$

Si ha quindi

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Operando sulle righe della matrice e ricordando che $ad - bc = 1$, si ha

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1+bc & -ab \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & d & -b \\ 0 & 1 & -c & a \end{array}\right);$$

e quindi $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

(*b*) La funzione $f_A(z)$ è definita per $z \neq -d/c$ ed ha come immagine il sottoinsieme $\mathbb{C} \smallsetminus \{a/c\}$. Inoltre, con un calcolo diretto, si verifica che $f_A^{-1}(z) = \frac{dz-b}{a-cz} = f_{A^{-1}}(z)$ e quindi, essendo $f_{A*}(H) = f_A^{-1*}(H) = f_{A^{-1}}^*(H)$, è sufficiente verificare che $f_A^*(H) = H$ per ogni $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Infatti,

$$\begin{aligned} z \in f_A^*(H) &\iff i\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) < 0 \\ &\iff i\big((az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)\big) < 0 \\ &\iff i(z-\bar{z})(ad-bc) < 0, \end{aligned}$$

che permette di concludere, essendo $ad - bc = 1$.

(*c*) Siano A e B come sopra, $z \neq -d/c$, e consideriamo il vettore $\binom{z}{1} \in \mathbb{C}^2$. Si ha

$$A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az+b \\ cz+d \end{pmatrix} = (cz+d)\begin{pmatrix} f_A(z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

ed $f_A(z)$ è determinato dalla condizione

$$\begin{pmatrix} f_A(z) \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle A\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Osserviamo che si ha

$$AB\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = A(\gamma z + \delta)\begin{pmatrix} f_B(z) \\ 1 \end{pmatrix} = (\gamma z + \delta)A\begin{pmatrix} f_B(z) \\ 1 \end{pmatrix} = (\gamma z + \delta)(cf_B(z) + d)\begin{pmatrix} f_A(f_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $\begin{pmatrix} f_A(f_B(z)) \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\langle AB\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, da cui si conclude che $f_{AB}(z) = f_A(f_B(z))$. □

ESERCIZIO 3. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_5 \mod 4$. Si consideri la matrice,*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scrivano le matrici

$$S = (B\,{}^tB)^{-1}, \qquad R = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}, \qquad P = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}B.$$

(b) Si determinino una base di nucleo ed immagine di P e si dicano che relazioni vi sono tra questi sottospazi e nucleo ed immagine di B e ${}^tB$. È vero che P è la matrice di una proiezione?

(c) Sia $v = \left(\begin{smallmatrix} n \\ 1 \\ n \end{smallmatrix}\right)$ e si consideri il sistema lineare $Bx = v$. Si mostri che tutte le soluzioni del sistema sono del tipo $Rv + (\mathbf{1} - P)y$, al variare di y in $\mathbb{R}^4$. È così per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$?

Svolgimento. (a) Si ha

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & n^2+1 & 0 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 10/49 & 0 & -1/49 \\ 0 & 1/(n^2+1) & 0 \\ -1/49 & 0 & 5/49 \end{pmatrix}, \; R = {}^tBS = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 & -1/7 \\ 0 & -n/(n^2+1) & 0 \\ 1/7 & 0 & 2/7 \\ 0 & 1/(n^2+1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$P = RB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^2/(n^2+1) & 0 & -n/(n^2+1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -n/(n^2+1) & 0 & 1/(n^2+1) \end{pmatrix}.$$

(*b*) Le prime 3 colonne della matrice P sono linearmente indipendenti, mentre la quarta è uguale alla seconda divisa per $-n$ e quindi $\operatorname{rk} P = 3$, $\operatorname{im} P = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ n \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ e $\ker P = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ n \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$. Si tratta di sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e quindi non vi sono relazioni con $\operatorname{im} B$ e $\ker {}^tB$ che sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$. D'altro canto, si hanno le inclusioni naturali $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} {}^tB$ e $\ker B \subseteq \ker P$ che sono entrambo uguaglianze per motivi di dimensione, essendo $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} {}^tB = 3 = \operatorname{rk} P$.

Si ha $P^2 = {}^tB(B\,{}^tB)^{-1}(B{}^tB)(B\,{}^tB)^{-1}B = P$ e quindi P è la matrice della proiezione di $\mathbb{R}^4$ su $\operatorname{im} {}^tB$ parallelamente a $\ker B$.

(*c*) Si ha $BRv = (B{}^tB)(B\,{}^tB)^{-1}v = v$ e quindi Rv è una soluzione particolare del sistema. Inoltre, $\mathbf{1} - P$ è la matrice della proiezione su $\ker P = \ker B$ (parallelamente ad $\operatorname{im} P$) e quindi i vettori del tipo $(\mathbf{1} - P)y$, al variare di $y \in \mathbb{R}^4$, generano $\ker B$, ovvero il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si conclude che

$$\left\{\, x \in \mathbb{R}^4 \mid Bx = v \,\right\} = \left\{\, Rv + (\mathbf{1} - P)y \;\middle|\; y \in \mathbb{R}^4 \,\right\}$$

e che ciò vale qualsiasi sia il vettore v in $\mathbb{R}^3$. □

ESERCIZIO 4. *Sia $n \in \{1,2,3,4\}$ tale che $n \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino i sistemi lineari*

$$\Sigma_t = \begin{cases} (t-2)x_1 - tx_2 - 3x_3 - tx_4 = -t \\ tx_2 + 2x_3 = 2 - t \\ (t-2)x_1 + (t+n-1)x_3 = 2 + n \\ (t-2)x_1 - (1+t+n)x_3 + tx_4 = 2 - t - n \end{cases}$$

al variare di t in $\mathbb{R}$.

(a) Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, quando il sistema ha soluzione e la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

(b) Si scrivano le soluzioni del sistema al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(c) Per ogni numero primo p, si determinino le soluzioni del sistema Σ_p, considerando i coefficienti del sistema come elementi di $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b) Operiamo sulle righe della matrice completa del sistema per arrivare ad una forma a scalini.

$$\begin{pmatrix} t-2 & -t & -3 & -t & -t \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ t-2 & 0 & -1-t-n & t & 2-t-n \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} III \\ II \\ III-I \\ IV-III \end{array} \begin{pmatrix} t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ 0 & t & t+n+2 & t & t+2+n \\ 0 & 0 & -2t-2n & t & -t-2n \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} \\ \\ III-II \\ IV+2III-2II \end{array} \begin{pmatrix} t-2 & 0 & t+n-1 & 0 & 2+n \\ 0 & t & 2 & 0 & 2-t \\ 0 & 0 & t+n & t & 2t+n \\ 0 & 0 & 0 & 3t & 3t \end{pmatrix}$$

Si conclude quindi che, per $t \notin \{-n, 0, 2\}$ la matrice incompleta ha rango 4, così come la matrice completa e quindi il sistema Σ_t ammette un'unica soluzione, uguale a $v_t = \begin{pmatrix} \frac{3-t}{t-2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Per $t = -n$ le ultime due righe della matrice completa diventano proporzionali e quindi la matrice completa e quella incompleta hanno entrambo rango 3 ed il sistema omogeneo associato ha un sottospazio di dimensione 1 di soluzioni. Le soluzioni del sistema formano quindi la classe laterale $\begin{pmatrix} -\frac{n+3}{n+2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{n}{n+2} \\ 2 \\ n \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 0$ l'ultima riga della matrice completa diventa identicamente nulla, mentre la seconda e la terza riga diventano proporzionali e quindi la matrice completa e quella incompleta hanno entrambo rango 2 ed il sistema omogeneo associato ha un sottospazio di dimensione 2 di soluzioni. Le soluzioni del sistema formano quindi la classe laterale $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Per $t = 2$ la matrice incompleta ha rango 3 mentre quella completa ha rango 4 e quindi il sistema non ha soluzione. Il sistema omogeneo associato ha comunque un sottospazio di dimensione 1 di soluzioni.

(c) La matrice completa del sistema Σ_p è

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & n-1 & 0 & 2+n \\ -2 & 0 & -1-n & 0 & 2-n \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} -I \\ \\ III-I \\ IV-I \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & n+2 & 0 & 2+n \\ 0 & 0 & 2-n & 0 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Quindi, se $p \neq 2$, la matrice incompleta e la matrice completa hanno entrambo rango 2 ed il sistema ha le soluzioni $\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se $p = 2$ ed n è pari, il sistema è omogeneo ed ha rango 1, quindi le soluzioni formano il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Se invece n è dispari la matrice incompleta ha ancora rango 1, mentre la matrice completa ha rango 2 e quindi non vi sono soluzioni. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 4 aprile 2006

ESERCIZIO 1. *Sia $z \in \mathbb{C}$.*

(a) Si disegni il sottoinsieme, D, del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} |z + \bar{z}| \le 1 \\ z\bar{z} \ge 1 \end{cases}.$$

(b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{1}{z+1}$. Si determinino i domini, D_f, di f e D_g, della sua inversa, g, e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_f \cap D_g \cap D$.

(c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D)$.

Svolgimento. (a) Come di consueto scriviamo $z = x + iy$, ove $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$. Allora

$$D = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\tfrac{1}{2} \le x \le \tfrac{1}{2},\ x^2 + y^2 \ge 1 \right\}.$$

Si tratta cioè dei numeri posti all'esterno della circonferenza unitaria ed all'interno della striscia verticale, come nel disegno sottostante.

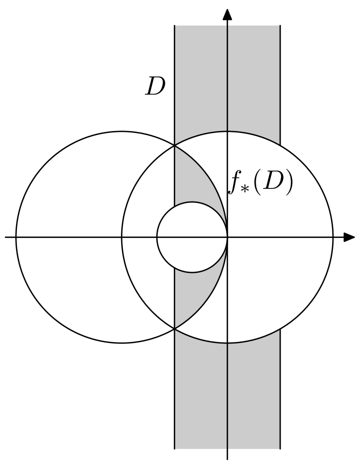
(b) Il dominio di f è il piano complesso privato del punto $z = -1$. L'inversa di f è la funzione $g(z) = -\frac{z+1}{z}$ che è quindi definita su tutto il piano complesso, con l'eccezione dell'origine $z = 0$. Entrambi i punti sono esterni a D e quindi $D_f \cap D_g \cap D = D$.

(c) Osserviamo che

$$f_*(D) = g^*(D) : \begin{cases} -1 \le g(z) + \overline{g(z)} \le 1 \\ g(z)\overline{g(z)} \ge 1 \end{cases}.$$

e quindi

$$f_*(D) : \begin{cases} (x + \frac{1}{3})^2 + y^2 \ge \frac{1}{9} \\ (x+1)^2 + y^2 \le 1 \\ 2x \ge -1 \end{cases} \qquad \binom{x}{y} \ne \binom{0}{0}.$$



per cui $f_*(D)$ è l'insieme evidenziato in grigio, delimitato dalle tre circonferenze nel disegno qui a fianco, compreso il bordo, con l'esclusione dell'origine, $z = 0$, che non appartiene all'immagine di f.

Fine della discussione $\square$

ESERCIZIO 2. *Si considerino i vettori*

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\1\\-1 \end{pmatrix},\ w_2 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\-1\\-1 \end{pmatrix},\ w_3 = \begin{pmatrix} -2\\-1\\0\\1\\2 \end{pmatrix}$$

ed i sottospazi $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ *e* $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$.

(a) *Dai generatori dati si estraggano delle basi di* U *e* W *e si determinino delle equazioni cartesiane per i due sottospazi. È vero che* $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$*?*

(b) *Sia* $\pi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *la proiezione su* U*, parallelamente a* W*. Si scriva la matrice* $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$*. Qual è il rango di* A*?*

(c) *Si dica se esiste un'applicazione lineare,* $\phi : W \to U$*, tale che*

$$\phi(w_1 + w_2) = 2u_1 - 2u_3, \qquad \phi(w_2 + w_3) = u_3 - u_1, \qquad \phi(w_1 + w_3) = 3u_1 - 2u_2 - u_3$$

e si scriva la matrice di ϕ *rispetto alle basi determinate al punto (a). È vero che l'insieme* $W_\phi = \{\, w - \phi(w) \mid w \in W \,\}$ *è un sottospazio complementare ad* U*?*

Svolgimento. (a) I tre vettori u_1, u_2, u_3, sono linearmente indipendenti, mentre si ha $w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 0$. Dunque una base di U è $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, ed una base di W è $\mathcal{W} = \{w_2, w_3\}$. I due sottospazi sono determinati dai seguenti sistemi di equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} x_1 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Le cinque equazioni formano un sistema di rango massimo e quindi si ha $U \cap W = \langle 0 \rangle$; e dunque $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(*b*) Dato $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$, la proiezione $\pi(x) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, è determinata dalla condizione $x - \pi(x) \in W$; e quindi $\pi(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1+x_5 \\ x_2+x_4 \\ 2x_3 \\ x_2+x_4 \\ x_1+x_5 \end{pmatrix}$. Si conclude che

$$A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Si ha

$$\phi(w_1) = 3u_1 - u_2 - 2u_3, \qquad \phi(w_2) = u_2 - u_1, \qquad \phi(w_3) = u_3 - u_2$$

e quindi $\phi(w_1) + 3\phi(w_2) + 2\phi(w_3) = 0$, da cui si conclude che l'applicazione ϕ esiste ed ha matrice

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{U}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Qualunque sia l'applicazione lineare $\psi : W \to U$, il sottospazio $W_\psi = \{\, w + \psi(w) \mid w \in W \,\}$ è un complementare di U, dunque ciò vale anche per ϕ. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 18 luglio 2006

ESERCIZIO 1. *Sia $z \in \mathbb{C}$.*

(a) Si disegni il sottoinsieme, D, del piano di Gauss definito dalle condizioni

$$D : \begin{cases} z\bar{z} \le 1 \\ z\bar{z} + z + \bar{z} \ge 0 \\ z\bar{z} - z - \bar{z} \ge 0 \end{cases} .$$

(b) Si consideri la funzione $f(z) = -\frac{z+1}{z}$. Si determinino i domini, D_f, di f e D_g, della sua inversa, g, e si scriva esplicitamente la funzione $g(z)$. Si determini l'insieme $D_0 = D_f \cap D_g \cap D$.

(c) Si determini e si disegni nel piano di Gauss il sottoinsieme $f_*(D_0)$.

(d) Esistono punti $x \in D_0$ tali che $f(x) = x$?

Svolgimento. (a) Si tratta dei numeri complessi posti all'interno della circonferenza unitaria centrata nell'origine ed all'esterno delle due circonferenze unitarie centrate in 1 e -1, compreso il bordo (cf. il disegno qui sotto).

(b) Il dominio di f è il piano complesso privato dell'origine. L'inversa di f è la funzione $g(z) = -\frac{1}{1+z}$ che è quindi definita su tutto il piano complesso, con l'eccezione del punto $z = -1$. Si ha $D_0 = D_f \cap D_g \cap D = D \smallsetminus \{0\}$.

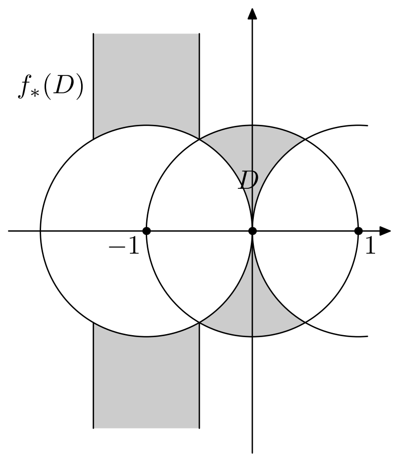
(c) Osserviamo che

$$f_*(D_0) = g^*(D_0) : \begin{cases} g(z)\overline{g(z)} \le 1 \\ g(z)\overline{g(z)} + g(z) + \overline{g(z)} \ge 0 \\ g(z)\overline{g(z)} - g(z) - \overline{g(z)} \ge 0 \end{cases} .$$

ovvero

$$f_*(D_0) : \begin{cases} (z+1)(\bar{z}+1) \ge 1 \\ z + \bar{z} \le -1 \\ z + \bar{z} \ge -3 \end{cases}$$

per cui $f_*(D)$ è l'insieme evidenziato in grigio, delimitato dalla circonferenza e dalle due rette nel disegno qui a fianco, compreso il bordo.



(d) I punti uniti sono le soluzioni dell'equazione $z^2+z+1 = 0$, ovvero i punti dell'insieme $D_0 \cap f_*(D_0) = \{\zeta, \bar{\zeta}\}$, ove $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. □

ESERCIZIO 2. *Siano V e W due spazi vettoriali reali e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ due rispettive basi.*

(a) Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = w_1 + w_2 + w_3.$$

Si dica se tali applicazioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ e se ne determini l'eventuale dimensione.

(b) Si dica se tra le applicazioni del punto precedente esiste una ϕ_0 che soddisfi all'ulteriore condizione $\phi_0(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = -w_1$. In caso affermativo se ne scriva la matrice nelle basi date e si determinino nucleo ed immagine.

(c) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\psi : W \to V$ tali che $\phi_0 \circ \psi = 1_W$ e si scrivano le loro matrici nelle basi date.

(d) Siano V e W due spazi vettoriali sul corpo $\mathbb{F}_2$ e siano $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ due rispettive basi. Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3) = w_1 + w_2 + w_3.$$

Si determinino, se esistono, tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_1 + v_2) = 2w_3, \quad \phi(v_1 + v_3) = 2w_2, \quad \phi(v_2 + v_3) = 2w_1, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = w_1.$$

Svolgimento. (a) I vettori $v_1 + v_2$, $v_1 + v_3$, $v_2 + v_3$, formano una base del sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ di V, e quindi esiste un'unica applicazione lineare $\langle v_1, v_2, v_3\rangle \to W$ che soddisfi alle prime tre condizioni. Il vettore $v_1 + v_2 + v_3$ appartiene al sottospazio $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ e la condizione data si ottiene sommando le tre condizioni precedenti. Quindi esistono infinite applicazioni $\phi : V \to W$ soddisfacenti alle condizioni date e dipendono dalla scelta dell'immagine del vettore v_4. Non formano quindi un sottospazio (non c'è l'applicazione nulla), ma una sottovarietà lineare di dimensione $3 (= \dim W)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(b) Tutte le applicazioni del punto (a) sono determinate dalle condizioni

$$\phi(v_1) = -w_1 + w_2 + w_3, \quad \phi(v_2) = w_1 - w_2 + w_3, \quad \phi(v_3) = w_1 + w_2 - w_3, \quad \phi(v_4) = aw_1 + bw_2 + cw_3.$$

Dunque si ha $\phi_0(v_4) = -2w_1 - w_2 - w_3$ e la matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi_0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 3 ed il nucleo è il sottospazio $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(c) L'applicazione ϕ_0 è suriettiva, quindi esistono infinite applicazioni $\psi : W \to V$ tali che $\phi_0 \circ \psi = 1_W$ e la differenza tra due tali applicazioni è un elemento di $\mathrm{Hom}(W, \ker \phi_0)$.

Con la tecnica di eliminazione, si vede che sono riga-equivalenti le matrici

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

e quindi si ha

$$\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \\ 3a & 3b & 3c \\ 2a & 2b & 2c \end{pmatrix},$$

al variare di $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(d) In $\mathbb{F}_2$, $2 = 0$, e quindi non possono esistere applicazioni lineari soddisfacenti alla prima serie di condizioni. L'unica applicazione che soddisfi alla seconda serie di condizioni è quindi definita da $\phi(v_1) = 0$, $\phi(v_2) = 0$, $\phi(v_3) = 0$, $\phi(v_4) = w_1$. □