Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 20 ottobre 2006

ESERCIZIO 1. *Siano*

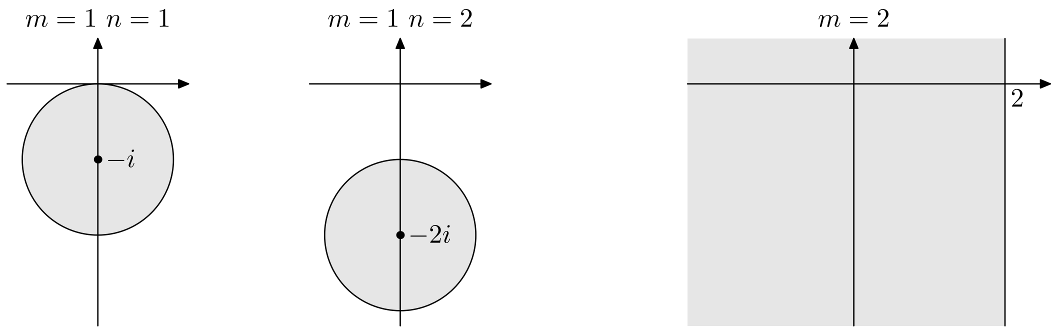
$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \frac{2z - m + 2in}{iz - n - im - i} \right| < m \right\} \qquad ed \qquad f(z) = \frac{iz - ik}{z - 1 + i}.$$

(a) *Si disegni l'insieme U nel piano di Gauss.*
(b) *Si determinino il dominio e l'immagine di f, l'eventuale funzione inversa ed i numeri complessi, z, tali che $f(z) = z$.*
(c) *Si determini il sottoinsieme $f_*(U) = \{ f(z) \mid z \in U \}$ e lo si disegni nel piano di Gauss.*
(d) *Si determinino il sottoinsieme $I = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{z}{\bar{z}} = -1 \right\}$ e le sue intersezioni con U ed $f_*(U)$.*

Svolgimento. (a) Sia $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. U è formato dai punti (x, y) tali che

$$(2x - m)^2 + 4(y + n)^2 < m^2\left[(x - m - 1)^2 + (y + n)^2\right].$$

Si tratta quindi dei punti interni alla circonferenza di centro ni e raggio 1, se $m = 1$ e dei punti del semipiano a sinistra della retta $x = 2$ se $m = 2$.



$|z + ni| < 1$ $\qquad$ $z + \bar{z} < 4$

(b) La funzione f è definita quando $z \neq 1 - i$ e la sua inversa è la funzione $g(z) = \dfrac{(1 - i)z - ik}{z - i}$, come si verifica con un calcolo diretto. La funzione g è definita per $z \neq i$, e quindi, il dominio e l'immagine di f sono rispettivamente $D = \mathbb{C} \setminus \{1 - i\}$ e $f_*(D) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

I punti uniti sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{iz - ik}{z - 1 + i} = z \qquad \text{ovvero} \qquad z^2 - z + ik = 0.$$

Si han quindi i punti

$$\frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \right) \quad \text{se } k = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{65} + 1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{65} - 1}{2}} \right) \quad \text{se } k = 2.$$

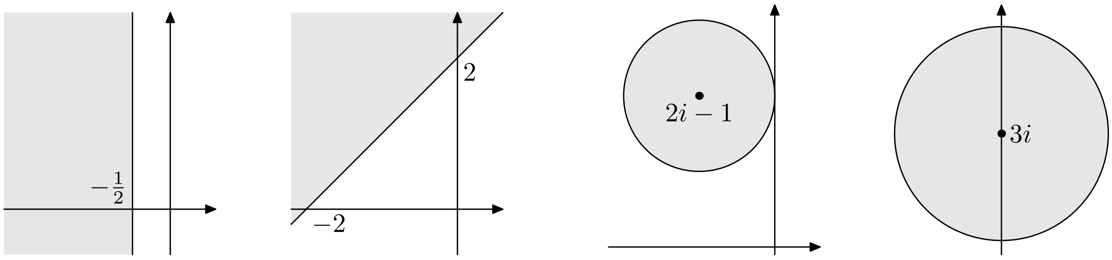
(c) Nelle notazioni del punto precedente, si ricava che $f_*(U) = g^*(U) = \{ z \in f_*(D) \mid g(z) \in U \}$. Distinguiamo quindi i possibili casi per U.

Se $\boxed{m = 1}$, si ha la disuguaglianza

$$\left| \frac{(1 - i)z - ik}{z - i} + ni \right| < 1 \qquad \text{ovvero} \qquad \left| \big(1 + (n - 1)i\big)z + n - ik \right| < |z - i|.$$

Per $n = 1$ si ottiene un semipiano, che dipende dal valore di k. Per $n = 2$ si ottengono i punti interni ad una circonferenza che dipende dal valore di k. Si veda quindi la figura.

$n = 1,\ k = 1$ — $n = 1,\ k = 2$ — $n = 2,\ k = 1$ — $n = 2,\ k = 2$



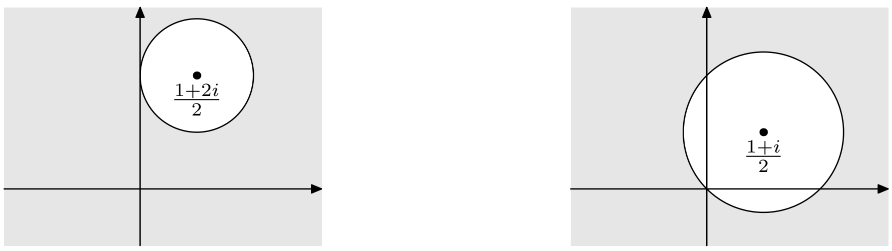
$z + \bar{z} < -1$ — $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} + 4 < 0$ — $|z - 2i + 1| < 1$ — $|z - 3i| < \sqrt{2}$

Se $\boxed{m = 2}$, si ha la disuguaglianza

$$\frac{(1-i)z - ik}{z - i} + \frac{(1+i)\bar{z} + ik}{\bar{z} + i} < 4 \qquad \text{ovvero} \qquad 2z\bar{z} - (1 - i(3-k))z - (1 + i(3-k))\bar{z} + 4 - 2k > 0.$$

Si ottengono così i punti esterni ad una circonferenza che dipende dal valore di k.

$k = 1$ — $k = 2$



$|2z - 2i - 1| > 1$ — $|2z - 1 - i| > \sqrt{2}$

(d) Si ha $\frac{z}{\bar{z}} = -1$ se, e solo se, $z \neq 0$ e $z^2 = -|z|^2$. Ciò accade se, e solo se, z è un numero puramente immaginario. Dunque I coincide con l'asse immaginario, privato dell'origine. Le intersezioni con U ed $f_*(U)$ si possono quindi dedurre dai disegni precedenti. □

ESERCIZIO 2. *Nel piano di Gauss si considerino le rette*

$$a : (m + ik)z + (m - ik)\bar{z} = 0 \qquad \text{e} \qquad b : (3 + in)z + (3 - in)\bar{z} = 0$$

e siano α e β gli angoli formati da queste con il semiasse positivo dell'asse reale.

(a) *Si disegnino le rette a e b e si scrivano le espressioni analitiche delle riflessioni, σ_a e σ_b, rispetto alle rette date.*

(b) *Si determini l'applicazione composta $z \mapsto \sigma_b(\sigma_a(z))$. È vero che si tratta di una rotazione? In caso affermativo, si determinino il centro, P, e l'angolo, ϑ, di rotazione in funzione degli angoli α e β. È vero che $\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_b \circ \sigma_a$?*

(c) *Si consideri il cerchio, C, di centro $z_0 = k + im$ e passante per l'origine. Si scriva l'espressione analitica della riflessione, λ_C, rispetto al cerchio C.*

(d) *Si determinino e si disegnino le immagini delle rette a e b tramite λ.*

Svolgimento. (a) Sia $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La retta a ha equazione $y = \frac{m}{k}x$ e quindi passa per il punto $k + im$. Dunque, la retta a forma con il semiasse positivo un angolo, α, determinato dalle condizioni

$$\cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}}.$$

Quindi σ_a è l'applicazione composta $\rho_\alpha \circ \sigma \circ \rho_{-\alpha}$, ove σ indica il coniugio e ρ_ϑ la rotazione di angolo ϑ. Si ha perciò

$$\sigma_a(z) = \frac{(k+im)^2}{k^2+m^2}\bar{z} \qquad \text{e, analogamente,} \qquad \sigma_b(z) = \frac{(n+3i)^2}{n^2+9}\bar{z}.$$

(b) L'applicazione composta $\sigma_b \circ \sigma_a$ è la moltiplicazione $z \mapsto \frac{(n+3i)^2}{n^2+9}\frac{(k-im)^2}{k^2+m^2}z$. Essendo la moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1 è una rotazione di centro l'origine. L'angolo di rotazione è $\vartheta = 2(\beta - \alpha)$. Le due rotazioni $\sigma_a \circ \sigma_b$ e $\sigma_b \circ \sigma_a$ sono l'una l'opposto dell'altra e coincidono solo se $\vartheta = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

(c) La riflessione $\lambda_C : \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \smallsetminus \{z_0\}$ è l'applicazione composta $\lambda_C = \tau_{z_0} \circ \mu_{|z_0|} \circ \lambda \circ \mu_{|z_0|^{-1}} \circ \tau_{-z_0}$, ove τ_x è la traslazione di vettore x, μ_s è la moltiplicazione per s e λ è la riflessione nel cerchio unitario. Dunque

$$\lambda_C(z) = \frac{|z_0|^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0 = \frac{(k+im)\bar{z}}{\bar{z} - (k-im)}.$$

(d) L'applicazione λ_C coincide con la sua inversa e quindi si ha $\lambda_{C*}(U) = \lambda_C^*(U)$ per ogni sottoinsieme U del dominio.

La retta a passa per il centro di C e quindi viene mandata in sé (ma non punto per punto!). Infatti un numero complesso z appartiene a $\lambda_C^*(a)$ se, e solo se,

$$i\bar{z}_0 \frac{z_0\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} - iz_0 \frac{\bar{z}_0 z}{z - z_0} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|z_0|^2}{|z - z_0|^2}(i\bar{z}_0 z - iz_0\bar{z}) = 0.$$

Escludendo il punto z_0 (che non appariene al dominio di λ_C), i punti di a vengono mandati in punti della stessa retta.

Analogamente, un numero complesso z appartiene a $\lambda_C^*(b)$ se, e solo se,

$$(3+in)\frac{z_0\bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_0} + (3-in)\frac{\bar{z}_0 z}{z - z_0} = 0$$

ovvero

$$2(3k-nm)z\bar{z} - \big((3k^2-3m^2-2mnk) - i(6mk+nk^2-nm^2)\big)z - \big((3k^2-3m^2-2mnk) + i(6mk+nk^2-nm^2)\big)\bar{z} = 0.$$

Si tratta quindi di una circonferenza passante per l'origine il cui centro e raggio si possono dedurre dall'espressione scritta sopra. □

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 17 novembre 2006

ESERCIZIO 1. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^5$ *si considerino i sottospazi*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\-1\\2m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\m-1\\-1\\0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} x_1 - mx_4 = 0 \\ (m-1)x_3 + (2+m)x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

ove $m \in \{1,2,3,4\}$ *ed* $m \equiv n_6 \mod 4$.

(a) *Si determini la dimensione e si esibisca una base di ciascuno dei due sottospazi e si verifichi se* $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(b) *Detta* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^5$, *si scrivano le matrici* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U)$ *ed* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W)$, *ove* $\pi_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la proiezione su* U *parallelamente a* W *e* $\pi_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la proiezione su* W *parallelamente ad* U.

(c) *Si scrivano le matrici* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U)$ *ed* $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W)$, *ove* $\sigma_U : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la simmetria di asse* U *e direzione* W *e* $\sigma_W : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ *è la simmetria di asse* W *e direzione* U.

(d) *Si consideri il sottospazio*

$$U' = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\2m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\m+1\\0\\-1\\2m+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\m-1\\m-1\\-1\\1-2m \end{pmatrix} \right\rangle$$

È vero che $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$? *In caso affermativo, siano* $\pi_{U'}$ *la proiezione su* U', *parallelamente a* W, $\pi = \pi_{U|U'} : U' \to U$ *e* $\pi' = \pi_{U'|U} : U \to U'$. *È vero che* $\pi \circ \pi' = 1_U$ *e* $\pi' \circ \pi = 1_{U'}$?

Svolgimento. (a) Indichiamo con u_1, u_2, u_3 i tre generatori di U.

Sia $\boxed{m \neq 1}$. Allora $\dim U = 3$ ed una sua base è $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$, mentre $\dim W = 2$ ed una base è $\mathcal{W} = \{e_2, e_5\} \subset \mathcal{E}$. I vettori u_1, u_2, u_3, e_2, e_5 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

Sia $\boxed{m = 1}$. Allora $\dim U = 2$ (si ha $2u_1 - u_2 + u_3 = 0$) ed una base di U è, ad esempio, $\mathcal{U} = \{u_1, u_3\}$, mentre $\dim W = 3$ ed una sua base è $\mathcal{W} = \{e_2, e_3, e_5\} \subset \mathcal{E}$. I vettori u_1, u_3, e_2, e_3, e_5 sono linearmente indipendenti e quindi $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$.

(b) Sia $\boxed{m \neq 1}$. Poiché $\dim W < \dim U$ calcoliamo dapprima la proiezione π_W. Il sottospazio U è definito dalle equazioni cartesiane $U : \begin{cases} mx_1 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$, e quindi, dato un generico generico vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione $\pi_W(x) = ae_2 + be_5$ è determinata dalla condizione

$$x - \pi_W(x) \in U \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} mx_1 - (x_5 - b) = 0 \\ (x_2 - a) + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = -mx_1 + x_5 \\ a = x_2 + x_4 \end{cases}$$

da cui si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

essendo $\pi_U + \pi_W = 1$.

Sia $\boxed{m = 1}$. In questo caso $\dim U < \dim W$ e quindi calcoliamo dapprima la proiezione π_U. Dato un generico generico vettore $x \in \mathbb{R}^5$, la sua proiezione $\pi_U(x) = au_1 + bu_3$ è determinata dalla condizione

$$x - \pi_U(x) \in W \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} (x_1 - a) - (x_4 + b) = 0 \\ x_4 + b = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} b = -x_4 \\ a = x_1 \end{cases}$$

da cui si conclude che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e quindi} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

essendo $\pi_U + \pi_W = 1$.

(c) È sufficiente ricordare che $\sigma_U = \pi_U - \pi_W = -\sigma_W$ per concludere che

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U) = -\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2m & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{se } \boxed{m \neq 1}$$

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_U) = -\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{se } \boxed{m = 1}$$

(d) Indichiamo con u'_1, u'_2, u'_3 i tre generatori di U'.

Sia $\boxed{m \neq 1}$. Allora $\dim U' = 3$ ed i vettori $u'_1, u'_2, u'_3, e_2, e_5$ sono linearmente indipendenti; quindi $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$.

Sia $\boxed{m = 1}$. Allora $\dim U' = 2$ ed i vettori $u'_1, u'_3, e_2, e_3, e_5$ sono linearmente indipendenti; quindi $\mathbb{R}^5 = U' \oplus W$.

In entrambo i casi, dato $x \in U'$, si ha $x = u + w$, ove $u = \pi_U(x)$ e $w = \pi_W(x)$ e quindi $u = x - w$, per cui $\pi_{U'}(\pi_U(x)) = \pi_{U'}(u) = x$. Ciò dimostra che $\pi' \circ \pi = 1_{U'}$. L'altra verifica è analoga ed è lasciata al lettore. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino gli spazi vettoriali, $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$, con la base $1, X, X^2, X^3$, ed $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$, con la base $1, X, X^2, X^3, X^4$, e sia $\phi : \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ la funzione $P \mapsto D(P) + nXP$, ove D indica la derivazione e l'intero $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ ed $n \equiv n_5 \mod 4$.*

(a) *Si verifichi che ϕ è lineare e si scriva la sua matrice nelle basi date.*

(b) *Si determinino $\ker\phi$ ed $\mathrm{im}\phi$ indicando la dimensione ed una base di ciascun sottospazio.*

(c) *Scrivere, se esistono, delle funzioni lineari $\psi : \mathbb{R}[X]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ inverse a destra o a sinistra per ϕ specificandone le matrici nelle basi date.*

(d) *Scrivere la matrice di ϕ (e delle eventuali ψ) nelle basi $1, 1 - nX, (1 - nX)^2, (1 - nX)^3$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ ed $1, 1 - nX, (1 - nX)^2, (1 - nX)^3, (1 - nX)^4$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 4}$.*

Svolgimento. (a) Con un calcolo diretto, si ha

$$\phi(1) = nX, \qquad \phi(X) = 1 + nX^2, \qquad \phi(X^2) = 2X + nX^3, \qquad \phi(X^3) = 3X^2 + nX^4.$$

La matrice cercata è quindi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & 0 & 2 & 0 \\ 0 & n & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathrm{rk}\phi = \mathrm{rk}A = 4$, quindi $\ker\phi = \langle 0 \rangle$ (dimensione 0) ed $\mathrm{im}\phi = \left\langle nX, 1 + nX^2, 2X + nX^3, 3X^2 + nX^4 \right\rangle$ (dimensione 4).

(c) L'applicazione ϕ non è suriettiva, quindi non può esistere un'inversa destra. Essendo iniettiva, esistono inverse sinistre, ψ, tali che $\psi \circ \phi = 1_{\mathbb{R}[X]_{\leq 3}}$ Le matrici cercate sono quindi del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & 0 & -\frac{2}{n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & -\frac{3}{n^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n^2a & 0 & -na & 0 & 3a \\ n^2b & 0 & -nb & 0 & 3b \\ n^2c & 0 & -nc & 0 & 3c \\ n^2d & 0 & -nd & 0 & 3d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$.

(d) Osservando che $nX = 1 - (1 - nX)$, si ha

$$\begin{aligned} \phi(1) &= nX = 1 - (1 - nX), \\ \phi(1 - nX) &= -n + nX(1 - nX) = -n + (1 - nX) - (1 - nX)^2, \\ \phi((1 - nX)^2) &= -2n(1 - nX) + nX(1 - nX)^2 = -2n(1 - nX) + (1 - nX)^2 - (1 - nX)^3, \\ \phi((1 - nX)^3) &= -3n(1 - nX)^2 + nX(1 - nX)^3 = -3n(1 - nX)^2 + (1 - nX)^3 - (1 - nX)^4. \end{aligned}$$

Dunque la matrice cercata è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2n & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3n \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le matrici inverse sinistre sono tutte le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2n-1 & 5n-1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3n-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & (1-n)a & (1-3n)a & (1-6n+3n^2)a \\ b & b & (1-n)b & (1-3n)b & (1-6n+3n^2)b \\ c & c & (1-n)c & (1-3n)c & (1-6n+3n^2)c \\ d & d & (1-n)d & (1-3n)d & (1-6n+3n^2)d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova di accertamento del 7 dicembre 2006

ESERCIZIO 1. *Si consideri il sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-n)X_2 + (n-t)X_4 - X_5 = n-t+1 \\ tX_1 - X_2 + 2tX_3 - 2nX_5 = 2n+1 \\ (2t-2n)X_2 + (t+1)X_3 + 2(n+1)X_4 + (2t-2)X_5 = 2n-3t+3 \\ tX_1 - X_2 + 2tX_3 - 2tX_5 = 2t+1 \end{cases}$$

ove $n \in \{1,2,3,4\}$ *ed* $n \equiv n_5 \mod 4$.

(a) *Si riduca il sistema* Σ_t *in una forma a scalino, riga-equivalente, e si determini il rango del sistema al variare del parametro* $t \in \mathbb{R}$.

(b) *Si determinino le soluzioni del sistema* Σ_t *al variare di* $t \in \mathbb{R}$.

(c) *Per ogni* $t \in \mathbb{R}$*, sia* U_t *il sottospazio formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato a* Σ_t*. Posto* $H = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} U_t$*, si dica se* H *è un sottospazio vettoriale e si determini una base di* $\langle H \rangle$.

(d) *Per ogni primo* p *si dica quante soluzioni ha il sistema* Σ_p *nel corpo* $\mathbb{F}_p$.

Svolgimento. (a) e (b) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & t-n & 0 & n-t & -1 & | & n-t+1 \\ t & -1 & 2t & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 2t-2n & t+1 & 2n+2 & 2t-2 & | & 2n-3t+3 \\ t & -1 & 2t & 0 & -2t & | & 2t+1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} II \\ I \\ III-2I \\ IV-II \end{array} \begin{pmatrix} t & -1 & 2t & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & t-n & 0 & n-t & -1 & | & n-t+1 \\ 0 & 0 & t+1 & 2t+2 & 2t & | & 1-t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(n-t) & | & 2(t-n) \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $t \notin \{-1,0,n\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$S_t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} (1+4t)/t \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t=-1}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ IV+(n+1)III \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & -1-n & 0 & n+1 & -1 & | & n+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_{-1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=0}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & -1+2n^2 & | & 1-2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n & | & -2n \end{pmatrix}, \qquad S_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=n}$. Possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} n & -1 & 2n & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & n+1 & 2n+2 & 2n & | & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_n = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(c) H è un'unione di sottospazi, ma non è un sottospazio. Infatti, contiene i vettori $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ma non ne contiene la somma. Il sottospazio generato da H è

$$\left\langle \begin{pmatrix} (1+4t)/t \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(d) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \geq 5}$ n e $2n$ sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & -2n & | & 2n+1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & 2n^2-1 & | & 1-2n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2n & | & -2n \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1, e vi sono perciò p soluzioni.

Se $\boxed{p=2}$ possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{l} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2, e vi sono perciò $2^2 = 4$ soluzioni.

Sia $\boxed{p=3}$. Se $n \neq 3$ possiamo ridurre la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II-nI \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & n & | & 1-n \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n & -n^2-1 & | & 1+n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n & | & n \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1, e vi sono perciò 3 soluzioni. Se $n = 3$ possiamo ridurre la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{c} \\ III \\ II \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2, e vi sono perciò $3^2 = 9$ soluzioni. □

ESERCIZIO 2. *Sia $m \in \{1,2,3,4\}$ tale che $m \equiv n_6 \mod 4$. Si considerino gli spazi vettoriali reali V e W, dotati delle rispettive basi $\mathcal{V} = \{v_1,\dots,v_3\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1,\dots,w_4\}$.*

(*a*) *Si determini l'applicazione lineare $\psi : V \to W$ tale che*

$$\begin{aligned} \psi(v_3 - 2v_1) &= -w_1 + (m-2)w_2 + (2-m)w_3 + w_4 \\ \psi(v_2 - v_1) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \\ \psi(v_1 - v_3) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ψ.

(*b*) *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : W \to W$ tale che*

$$\begin{aligned} \phi(2w_1 + w_4) &= mw_1 + mw_2 + 3w_3 + w_4 \\ \phi(w_2 + w_3) &= mw_1 + mw_2 + 3w_3 + w_4 \\ \phi(w_3 - w_2) &= mw_1 - mw_2 - w_3 - w_4 \\ \phi(w_4 - w_2) &= (m-2)w_1 - 4w_2 + (1-2m)w_3 \end{aligned}$$

Si scriva $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi)$ e si determinino nucleo ed immagine di ϕ.

(*c*) *Si determinino tutte le applicazioni lineari $\chi : V \to W$ tali che $\psi = \phi \circ \chi$ e si scrivano tutte le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\chi)$.*

(*d*) *Si determini il sottospazio $\mathrm{im}\phi \cap \mathrm{im}\psi$ di W e gli ortogonali $(\mathrm{im}\phi)^\perp$ ed $(\mathrm{im}\psi)^\perp$ in W^*.*

(*e*)* *Dette $\phi^* : W^* \to W^*$ e $\psi^* : W^* \to V^*$ le applicazioni trasposte di ϕ e ψ, si determinino le applicazioni lineari $\eta : W^* \to W^*$ tali che $\phi^* \circ \eta = 0$ e $\psi^* \circ \eta = 0$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{W}^*,\mathcal{W}^*}(\eta)$, ove $\mathcal{W}^*$ è la base duale della base $\mathcal{W} = \{w_1,\dots,w_4\}$.*

Svolgimento. (a) I vettori $v_3 - 2v_1, v_2 - v_1, v_1 - v_3$ sono una base di V e quindi l'applicazione lineare ψ è univocamente determinata dalle condizioni date e la sua matrice è

$$A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1-2m \\ 2 & 2-m & 2+m \\ m-1 & m-2 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\psi(v_2 - v_1) = \psi(v_1 - v_3)$ e le prime due colonne della matrice sono chiaramente indipendenti. Dunque $\ker\psi = \langle 2v_1 - v_2 - v_3 \rangle$ ed $\mathrm{im}\,\psi = \langle (1-m)w_1 + 2w_2 + (m-1)w_3, w_1 + (2-m)w_2 + (m-2)w_3 - w_4 \rangle$.

(b) Analogamente al caso precedente, ϕ è univocamente determinata dalle condizioni date e la sua matrice è

$$B = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{W}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m & m-2 \\ 2 & m & 0 & m-4 \\ m & 2 & 1 & 3-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\phi(2w_1 + w_4) = \phi(w_2 + w_3)$ e le prime tre colonne della matrice sono linearmente indipendenti. Dunque $\ker\phi = \langle 2w_1 - w_2 - w_3 + w_4 \rangle$ ed $\operatorname{im}\phi = \langle w_1 + 2w_2 + mw_3, mw_2 + 2w_3 + w_4, mw_1 + w_3 \rangle$.

(c) Dobbiamo risolvere il "sistema lineare", $BX = A$, ove sono da determinarsi le entrate della matrice $X = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\chi) \in M_{4\times 3}$. Possiamo quindi applicare la tecnica di eliminazione alla matrice completa del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 2 & m & 0 & m-4 & 2 & 2-m & 2+m \\ m & 2 & 1 & 3-2m & m-1 & m-2 & m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ IV \\ \frac{1}{m}(II-2I) \\ III-mI \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1-m^2 & 3-m^2 & m^2-1 & -2 & 2m^2 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \frac{1}{2}(II-III) \\ IV-2II \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & m & m-2 & 1-m & 1 & 1-2m \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 1-m^2 & m^2-1 & 0 & 2(m^2-1) \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{r} I-mIII \\ \\ \\ IV+(m^2-1)III \end{array} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Possiamo quindi concludere che le matrici delle applicazioni lineari cercate sono della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ -a & -b & -c \\ -a & -b & -c \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

al variare di a, b, c in $\mathbb{R}$ e sono quindi un traslato di un sottospazio di $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$. In modo equivalente, si potevano determinare le applicazioni lineari, χ, scegliendo ad arbitrio $\chi_0(v_i) \in \phi^{-1}(\psi(v_i))$, per $i = 1, 2, 3$, e sommando all'applicazione, χ_0, così determinata tutti gli elementi di $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \ker\phi) \subset \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(d) Poiché esistono delle applicazioni lineari χ tali che $\psi = \phi\circ\chi$, deve aversi $\operatorname{im}\psi \subseteq \operatorname{im}\phi$ e quindi l'intersezione è uguale al più piccolo tra i due sottospazi: $\operatorname{im}\phi \cap \operatorname{im}\psi = \operatorname{im}\psi$. Per gli ortogonali vale l'inclusione inversa e si ha

$$(\operatorname{im}\phi)^{\perp} = \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^* \right\rangle \subseteq \\ \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^*, w_1^* + w_3^* + (m-1)w_4^* \right\rangle = (\operatorname{im}\psi)^{\perp}.$$

(e) Le applicazioni, η, devono soddisfare alla condizione $\operatorname{im}\eta \subseteq \ker\phi^* \cap \ker\psi^*$. Ricordando che per qualsiasi applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita, f, si ha $\ker f^* = (\operatorname{im} f)^\perp$, si conclude che deve aversi $\operatorname{im}\eta \subseteq (\operatorname{im}\phi)^\perp = \left\langle 2w_1^* + (m^2-1)w_2^* - 2mw_3^* + m(5-m^2)w_4^* \right\rangle$. Dunque le matrici cercate sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c & 2d \\ (m^2-1)a & (m^2-1)b & (m^2-1)c & (m^2-1)d \\ -2ma & -2mb & -2mc & -2md \\ m(5-m^2)a & m(5-m^2)b & m(5-m^2)c & m(5-m^2)d \end{pmatrix},$$

al variare di a, b, c, d in $\mathbb{R}$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 14 dicembre 2006

ESERCIZIO 1. *Siano $n, m \in \{1, 2\}$ tali che $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.*

Si consideri il polinomio $P(X) = (X - m - in)(X^2 - (m - n)(1 + i)X + i(m^2 + n^2)) \in \mathbb{C}[X]$.

(a) Si determinino le radici, z_1, z_2, z_3, di $P(X)$.

(b) Si scriva l'equazione della circonferenza, C, del piano di Gauss, passante per z_1, z_2, z_3.

(c) Si scriva l'espressione analitica della riflessione, λ_C, rispetto al cerchio C e si determinino i punti uniti dell'applicazione composta $z \mapsto \lambda_C(2i + \bar{z})$. È vero che i punti uniti stanno su C?

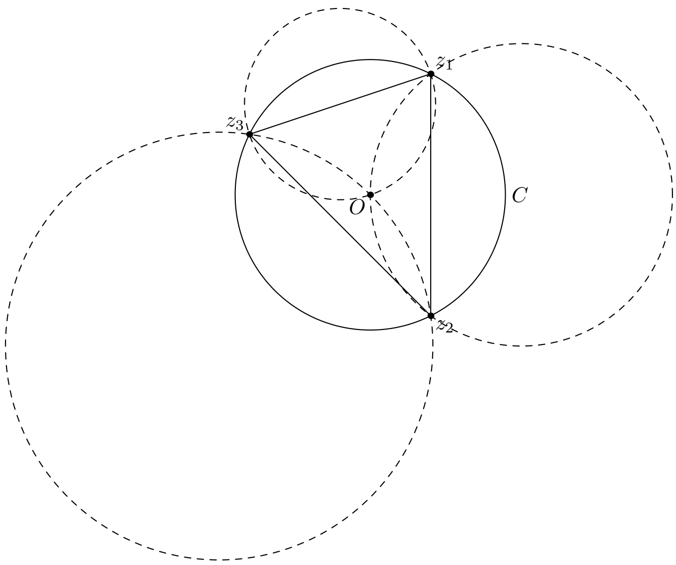
(d) Si disegni l'immagine tramite l'applicazione λ_C del triangolo di vertici z_1, z_2, z_3.

Svolgimento. (a) La radice del fattore lineare è evidente; le altre due si determinano risolvendo un'equazione di secondo grado. Dunque le tre radici sono $z_1 = m + in$, $z_2 = m - in = \bar{z}_1$, $z_3 = -n + im = iz_1$.

(b) I tre punti hanno il medesimo modulo e quindi appartengono alla circonferenza $C : z\bar{z} = m^2 + n^2$, di centro nell'origine e raggio $|z_1| = \sqrt{m^2 + n^2}$.

(c) La riflessione, λ_C, è quindi la funzione lineare fratta $\lambda_C(z) = \frac{m^2+n^2}{\bar{z}}$. I punti uniti sono i numeri complessi, z, tali che $z = \frac{m^2+n^2}{z-2i}$, ovvero le soluzioni dell'equazione $z^2 - 2iz - m^2 - n^2 = 0$. Sono quindi i numeri complessi $i \pm \sqrt{m^2 + n^2 - 1}$, che appartengono a C. Si può anche osservare che l'applicazione $z \mapsto 2i + \bar{z}$ è la riflessione rispetto ad una retta (quale?) e quindi che i punti uniti dell'applicazione composta sono l'intersezione tra questa retta ed il cerchio C.

(d) Le rette che formano i lati del triangolo vengono trasformate in tre cerchi passanti per l'origine e per i vertici del lato corrispondente.



Dunque i punti interni al triangolo vengono trasformati nei punti esterni alle tre circonferenze rappresentate nel disegno qui sopra ($m = 1, n = 2$). □

ESERCIZIO 2. *Siano $n, m \in \{1, 2\}$ tali che $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.*

Si considerino i seguenti sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$,

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} m-n \\ n \\ n-m \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n-2 \\ m+2 \\ 2-n \\ n+m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -m \\ n \\ m \\ n-m \end{pmatrix} \right\rangle \qquad e \qquad W : \begin{cases} nX_1 - mX_2 - nX_3 + nX_4 = 0 \\ X_1 + (2+n)X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ mX_1 + X_2 - mX_3 + mX_4 = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si determinino delle basi per i sottospazi U e W e si dica se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.*
(b) *Detta $\pi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proiezione su W parallelamente ad U, si determini la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi)$, ove $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^4$.*
(c) *Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tali che $\pi \circ \phi = \pi$ e si scrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$.*
(d) *Detta π^* l'applicazione trasposta di π, si determinino nucleo ed immagine di π^*. È vero che π^* è ancora una proiezione?*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente dipendenti e generano un sottospazio di dimensione 2, soluzione del sistema di equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_2 - X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

Le tre equazioni lineari omogenee che definiscono W sono dipendenti ($III - mII$ e $I - nII$ sono proporzionali) e anche W è un sottospazio di dimensione 2. L'intersezione, $U \cap W$, è formata dalle soluzioni del sistema omogeneo che si ottiene unendo le equazioni dei due sottospazi ed è un sistema di rango 4. Quindi $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(b) Una base di W è costituita dai vettori $e_1 + e_3$, $e_3 + e_4$ e, con i calcoli consueti, si ricava la matrice

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) L'applicazione identica o la stessa proiezione, π, sono applicazioni lineari che soddisfano alla condizione posta. Ogni altra differisce da queste per applicazioni, $\phi_0 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tali che $\operatorname{im}\phi_0 \subseteq \ker\pi = U$. Quindi le matrici cercate sono tutte e sole quelle appartenenti all'insieme

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(d) Il nucleo di π^* è

$$\ker\pi^* = (\operatorname{im}\pi)^\perp = W^\perp = \langle e_2^*, e_1^* - e_3^* + e_4^* \rangle ,$$

viste le equazioni cartesiane di W. Analogamente

$$\operatorname{im}\pi^* = (\ker\pi)^\perp = U^\perp = \langle e_1^* + e_3^*, e_2^* - e_3^* - e_4^* \rangle .$$

Per ogni coppia di endomorfismi di uno spazio vettoriale si ha $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ e quindi $\pi^* \circ \pi^* = \pi^*$ da cui si conclude che π^* è la proiezione su $U^\perp$ parallelamente a $W^\perp$. □

ESERCIZIO 3. *Si consideri il sistema*

$$\Sigma_t : \begin{cases} (t-n)X_2 + (t-3)X_3 + nX_4 + X_5 = t-1 \\ (3-t)X_1 + X_3 + mX_4 = 0 \\ (t-3)X_1 - X_3 + tX_4 + (m-n)X_5 = t+n \\ (3t-3n)X_2 + (3t-9)X_3 + 3nX_4 + tX_5 = 2t \end{cases}$$

ove $n, m \in \{1, 2\}$, $n \equiv n_6 \mod 2$ ed $m \equiv n_5 \mod 2$.
(a) *Si riduca il sistema Σ_t in una forma a scalino, riga-equivalente, e si determini il rango del sistema al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.*
(b) *Si determinino le soluzioni del sistema Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(c) *Per $t = n$, siano S_n l'insieme delle soluzioni del sistema Σ_n ed U_n il sottospazio formato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato. Si determinino i sottospazi $U_n^\perp$ ed $S_n^\perp$ dello spazio duale.*

(*d*) *Per ogni primo p si dica quante soluzioni ha il sistema Σ_p nel corpo $\mathbb{F}_p$.*

Svolgimento. (a) e (b) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & t-n & t-3 & n & 1 & t-1 \\ 3-t & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ t-3 & 0 & -1 & t & m-n & t+n \\ 0 & 3t-3n & 3t-9 & 3n & t & 2t \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} II \\ I \\ III+II \\ IV-3I \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 3-t & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & t-n & t-3 & n & 1 & t-1 \\ 0 & 0 & 0 & t+m & m-n & t+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-3 & 3-t \end{array}\right).$$

Dunque, se $t \notin \{-m, 3, n\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$S_t = \begin{pmatrix} m/(t-3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} (t-n)/(t-3) \\ 3-t \\ t-n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t=-m}$, possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto. Matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3+m & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & -m-n & -m-3 & n & 1 & -m-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -m-3 & m+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad S_{-m} = \begin{pmatrix} -m/(m+3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} -m(m+n) \\ n(m+3) \\ 0 \\ (n+m)(m+3) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m+n \\ (m+3)^2 \\ -(n+m)(m+3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=n}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3-n & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n-3 & n & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & n+m & m-n & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-3 & 3-n \end{array}\right), \qquad S_n = \begin{pmatrix} m/(n-3) \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t=3}$, matrice completa ed incompleta han rango 3 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{array}{c} II \\ I \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3-n & 0 & n & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+m & m-n & 3+n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -m \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (n^2-nm+m+3)/(n-3) \\ m^2-nm \\ n-m \\ 3+m \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(*c*) Si ha

$$\begin{aligned} U_n^\perp &= \langle e_2 \rangle^\perp = \langle e_1^*, e_3^*, e_4^*, e_5^* \rangle \\ S_n^\perp &= \langle me_1 + (n-3)e_2 + (n-3)e_4 - (n-3)e_5, e_2 \rangle^\perp = \langle e_3^*, (n-3)e_1^* - me_4^*, (n-3)e_1^* + me_5^* \rangle. \end{aligned}$$

(d) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \geq 5}$, i pivot sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e matrice completa ed incompleta del sistema han rango 4; quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1 e vi sono perciò p soluzioni.

Se $\boxed{p = 3}$ possiamo ridurre ulteriormente la matrice del sistema come indicato qui sotto,

$$\begin{array}{r} II \\ I \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 & n & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & m-n & | & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Qualunque siano m ed n, matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2; vi sono perciò $3^2 = 9$ soluzioni in $\mathbb{F}_3$.

Se $\boxed{p = 2}$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & n & 1 & n & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m & m-n & | & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Se m è dispari, matrice completa ed incompleta han rango 4 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 1; vi sono perciò 2 soluzioni.

Se m è pari, matrice completa ed incompleta han rango 3 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 2; vi sono perciò 4 soluzioni. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 9 gennaio 2007

ESERCIZIO 1. *Sia $m = 3$ se il proprio numero di matricola è pari, $m = -3$ altrimenti. Consideriamo $z = mi \in \mathbb{C}$.*

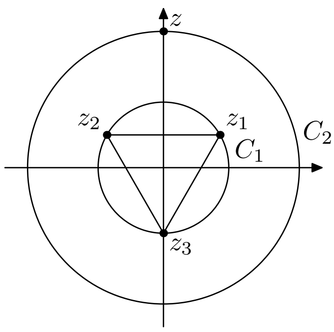
(a) *Determinare le radici cubiche z_1, z_2, z_3 di z, sia in forma algebrica che in forma trigonometrica, e si disegnino assieme a z sul piano di Gauss.*

(b) *Determinare la circonferenza C_1 del piano di Gauss contenente z_1, z_2, z_3, e quella concentrica C_2 contenente z.*

(c) *Scrivere le espressioni analitiche per le riflessioni λ_1, λ_2 rispetto a C_1, C_2 (rispettivamente).*

(d) *È vero che $\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ \lambda_1$? Di che trasformazioni si tratta? In generale, che risultato dà la composizione di due riflessioni rispetto a due cerchi concentrici del piano di Gauss?*

Svolgimento. (a) Sia, ad esempio, $m = 3$. Allora



$$z_1 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i \sin\tfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i \sin\tfrac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{3}\left(\tfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\tfrac{1}{2}\right),$$
$$z_3 = \sqrt[3]{3}\left(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i \sin\tfrac{9\pi}{6}\right) = -i\sqrt[3]{3}.$$

Se, invece $m = -3$, si ottengono quei punti ruotati di $\frac{\pi}{3}$, ovvero la stessa figura, simmetrica rispetto all'asse orizzontale.

(b) Le equazioni sono $C_1 : z\bar{z} - \sqrt[3]{9} = 0$, e $C_2 : z\bar{z} - 9 = 0$.

(c) Si ha

$$\lambda_1(z) = \frac{\sqrt[3]{9}}{\bar{z}} \qquad \text{e} \qquad \lambda_2(z) = \frac{9}{\bar{z}} \qquad \text{per } z \neq 0.$$

(d) L'applicazione composta da due riflessioni rispetto a cerchi concentrici è un'omotetia rispetto al centro comune, con fattore di dilatazione uguale al rapporto tra i due raggi. Nel caso corrente si ha

$$\lambda_1(\lambda_2(z)) = \frac{\sqrt[3]{9}}{9} z \qquad \text{e} \qquad \lambda_2(\lambda_1(z)) = \frac{9}{\sqrt[3]{9}} z$$

e quindi le due applicazioni composte non coincidono, ma sono una l'inversa dell'altra. □

ESERCIZIO 2. *Sia m tra 1 e 4 congruo modulo 4 all'ultima cifra del proprio numero di matricola. Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$:*

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ m-1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad W : \begin{cases} X_1 + X_2 + mX_4 = 0 \\ X_1 + X_3 + mX_4 = 0 \\ X_1 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(a) *Trovare equazioni cartesiane per il sottospazio U e una base per il sottospazio W (che dimensione hanno?). Verificare che si tratta di sottospazi complementari.*

(b) *Determinare le matrici in base canonica della simmetria, σ, di asse U e direzione W, e della proiezione, π, su W parallelamente ad U.*

(*c*) *È vero che $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$? Si tratta di proiezioni?*
(*d*) *Descrivere, tramite equazioni cartesiane e basi, nuclei e immagini delle applicazioni trasposte di σ, π, $\sigma \circ \pi$ e $\pi \circ \sigma$.*

Svolgimento. (a) I tre generatori di U sono linearmente indipendenti, per cui si tratta di un sottospazio di dimensione 3, definito dall'equazione cartesiana $U : X_1 + X_2 + X_3 + mX_4 = 0$.

Il sistema lineare omogeneo che definisce W ha rango 3; quindi il sottospazio ha dimensione 1 ed una sua base è costituita dal vettore $w = {}^t(1, -1, -1, 0)$.

Il sistema lineare che definisce l'intersezione tra i due sottospazi ha rango 4 (o, analogamente, $w \notin U$); quindi $U \cap W = \langle 0 \rangle$ ed $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*b*) Dato un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi(x) = \alpha w$, è quell'unico vettore tale che $x - \alpha w \in U$. Deve quindi aversi $\alpha = -x_1 - x_2 - x_3 - mx_4$. Quindi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -m \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla relazione $\sigma = 1 - 2\pi$, si ricava

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2m \\ -2 & -1 & -2 & -2m \\ -2 & -2 & -1 & -2m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(*c*) $\sigma \circ \pi = (1 - 2\pi) \circ \pi = \pi - 2\pi = -\pi$ ed, analogamente, $\pi \circ \sigma = -\pi$. Dunque le due applicazioni composte sono uguali, ma non si tratta di proiezioni, perché $(-\pi) \circ (-\pi) = \pi \neq -\pi$.

(*d*) σ è un isomorfismo e quindi lo è anche l'applicazione trasposta, che ha perciò $\langle 0 \rangle$ come nucleo e tutto lo spazio duale come immagine.

Per quanto riguarda la proiezione, π^*, si ha $\ker(\pi^*) = (\operatorname{im}\pi)^\perp = W^\perp$ ed $\operatorname{im}(\pi^*) = (\ker\pi)^\perp = U^\perp$. Le equazioni cartesiane, riferite alla base duale della base canonica, sono quindi

$$W^\perp : X_1 - X_2 - X_3 = 0, \qquad \text{e} \qquad U^\perp : \begin{cases} X_1 - X_2 + mX_3 - X_4 = 0 \\ X_1 + (m-1)X_3 - X_4 = 0 \\ X_1 - X_3 = 0 \end{cases}$$

Nucleo ed immagine di $-\pi^*$ coincidono con nucleo ed immagine di π^*. □

ESERCIZIO 3. *Sia m tra 1 e 4 congruo modulo 4 alla penultima cifra del proprio numero di matricola. Si consideri il sistema lineare*

$$\Sigma_t : \begin{cases} tX_1 + 2X_2 + tX_4 + mX_5 = -m \\ 2X_2 + mX_5 = -m \\ tX_1 + 2X_2 + 5X_3 + tX_4 + mX_5 = 1 - m \\ 2tX_2 + t^2X_5 = (1-m)t \end{cases}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$.
(*a*) *Scrivere la matrice del sistema e ridurla in forma a scalini per righe; determinare i ranghi di matrici completa e incompleta al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(*b*) *Si determinino le soluzioni U_t del sistema Σ_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.*
(*c*) *Descrivere l'unione U di tutti i sottinsiemi U_t (per $t \in \mathbb{R}$), il minimo sottospazio affine contenente U, e il minimo sottospazio vettoriale contenente U.*

(d) Determinare il numero di soluzioni del sistema Σ_p pensato a coefficienti in $\mathbb{F}_p$ per ogni primo p.

Svolgimento. (a) e (b) Il sistema Σ_t ha matrice

$$\begin{pmatrix} t & 2 & 0 & t & m & | & -m \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ t & 2 & 5 & t & m & | & 1-m \\ 0 & 2t & 0 & 0 & t^2 & | & (1-m)t \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} I-II \\ II \\ III-I \\ IV-tII \end{matrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & t & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t(t-m) & | & t \end{pmatrix}.$$

Dunque, se $t \notin \{0, m\}$, matrice completa ed incompleta han rango 4 e le soluzioni del sistema sono

$$U_t = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m}{2} - \frac{m}{2(t-m)} \\ 1/5 \\ 0 \\ \frac{1}{t-m} \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Discutiamo ora i casi particolari.

Se $\boxed{t = 0}$, matrice completa ed incompleta han rango 2 e le soluzioni del sistema sono indicate a fianco.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Se $\boxed{t = m}$, la matrice completa ha rango 4 mentre quella incompleta ha rango 3 e quindi non ci sono soluzioni al sistema.

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 & m & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & m \end{pmatrix}, \qquad U_m = \varnothing.$$

(c) Si osservi che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m}{2} - \frac{m}{2(t-m)} \\ 1/5 \\ 0 \\ \frac{1}{t-m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2(t-m)} \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e quindi $U_t \subset U_0$ per ogni valore di t. Dunque $U = U_0$ ed

$$\langle U \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -m/2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ m \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(d) Le trasformazioni elementari fatte per ridurre la matrice del sistema nella sua forma a scalini, sono tali anche su $\mathbb{F}_p$ e quindi possiamo partire considerando la matrice a scalini e riducendo su $\mathbb{F}_p$ le sue entrate. Dobbiamo distinguere alcuni casi.

Se $\boxed{p \notin \{2, 5\}}$, i pivot sono diversi da 0 in $\mathbb{F}_p$ e matrice completa ed incompleta del sistema han rango 2; quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione 3 e vi sono perciò p^3 soluzioni.

Se $\boxed{p = 2}$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & | & m \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $m \notin \{2,4\}$, matrice completa ed incompleta han rango 2 e quindi le soluzioni del sistema sono il traslato di un sottospazio di dimensione $2^3 = 8$. Altrimenti il rango è uguale ad 1 e le soluzioni in $\mathbb{F}_2$ sono $2^4 = 16$.

Se $\boxed{p = 5}$ la matrice del sistema diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & m & | & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

e quindi non vi sono soluzioni in $\mathbb{F}_5$. $\square$

Esame di Matematica 2 Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 17 luglio 2007

ESERCIZIO 1. *Sia* $P(z) = z^3 + 1$.

(a) *Si determinino le radici,* z_1, z_2, z_3*, di* $P(z)$ *e le si disegnino nel piano di Gauss, indicando con* z_1 *una radice reale di* $P(z)$.

(b) *Si scriva l'equazione della circonferenza,* C*, del piano di Gauss contenente* z_1, z_2, z_3 *e si scriva l'espressione analitica della riflessione,* λ_C*. rispetto a* C*. Si disegni nel piano di Gauss l'insieme*

$$U = \left\{ z_1^m z_2^n z_3^k \;\middle|\; (n, m, k) \in \mathbb{Z}^3 \right\}.$$

(c) *Detta* C_k *la circonferenza di centro* z_1 *e raggio* $k \geq 0$*, si determinino in funzione di* k *parte reale e parte immaginaria dei punti di intersezione tra* C *e* C_k *nel piano di Gauss. Si determini (se esiste) il valore* k_0 *per cui la circonferenza* C_{k_0} *passa per* z_2 *e* z_3.

(d) *Si determinino le equazioni di* $\lambda_C^*(C_k)$*, al variare di* k*, e si dica per quali valori di* k *si ottiene un cerchio o una retta. In ogni caso, si determinino centro e raggio della circonferenza o le equazioni cartesiane della retta. Al variare di* k*, si dica se* $\lambda_{C_k}^*(C)$ *è un cerchio o una retta.*

Svolgimento. (a) $P(z) = (z+1)(z^2 - z + 1) = (z+1)(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2})$. Dunque, le tre radici sono $z_1 = -1$, $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \bar{z}_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

(b) La circonferenza è la circonferenza unitaria centrata nell'origine $C : |z| = 1$ e $\lambda_C(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. U è l'insieme delle radici seste dell'unità, ovvero i vertici dell'esagono regolare iscritto nella circonferenza unitaria (con un vertice uguale ad 1).

(c) Si ha

$$C_k \cap C : \begin{cases} |z| = 1 \\ |z+1| = k \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad C_k \cap C : \begin{cases} \bar{z}z = 1 \\ (z+\bar{z}) - (k^2 - 2) = 0 \end{cases}.$$

Nel piano di Gauss i punti di intersezione tra le due circonferenze sono $\frac{k^2-2}{2} \pm i\frac{|k|\sqrt{4-k^2}}{2}$ $(0 \leq k \leq 2)$. Si ha $k_0 = |z_2 + 1| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$.

(d) Il punto $z_1 = -1$ appartiene a C, quindi

$$\lambda_C^*(C_k) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\lambda_C(z) + 1| = k \} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} + 1| = k|\bar{z}| \} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; (1-k^2)z\bar{z} + (z+\bar{z}) + 1 = 0 \right\}.$$

Dunque, per $k = 1$ si tratta della retta verticale $z + \bar{z} = 1$ $(\Re z = -\frac{1}{2})$. Per $k \neq 1$ si tratta della circonferenza di centro $z_0 = \frac{1}{k^2-1}$ e raggio $\frac{k}{|1-k^2|}$. Per ogni valore di $k \neq 1$, il cerchio C passa per il centro di C_k, quindi $\lambda_{C_k}^*(C)$ è una retta.

Lasciamo al lettore il compito di fare i disegni richiesti. □

ESERCIZIO 2. *Si considerino i seguenti sottospazi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$*:*

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 + X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_2 - 2X_3 + 3X_4 = 0 \\ X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(*a*) *Si determinino la dimensione, una base e delle equazioni cartesiane per i sottospazi* U *e* V.
(*b*) *Si determinino* $U \cap V$ *ed un sottospazio,* W*, tale che* $V = W \oplus (U \cap V)$*. Si verifichi che* $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
(*c*) *Determinare le matrici in base canonica di* π_U^W, σ_W^U*. Qual è la restrizione ad* $U \cap V$ *di queste due applicazioni?*
(*d*) *Si dica se l'insieme,* C*, delle applicazioni lineari* $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *tali che* $\mathrm{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U$ *è un sottospazio di* $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *ed in tal caso se ne calcoli la dimensione. Si scrivano le matrici in base canonica degli elementi di* C.

Svolgimento. (a) La seconda equazione che definisce V è uguale al doppio della prima meno la terza ed il sistema ha rango 2. Quindi $\dim U = 2$ ed una base è $\{e_1 - e_3 - e_4, 2e_1 - 2e_2 - e_3\}$.

I tre vettori che generano V sono linearmente indipendenti. Quindi V ha dimensione 3 ed è determinato dall'equazione cartesiana $V : X_1 + 2X_2 + X_4 = 0$.

(*b*) $U \cap V = \langle e_1 - e_3 - e_4 \rangle$ ha dimensione 1 e possiamo prendere $W = \langle e_1 + 2e_3 - e_4, e_1 - e_2 + e_4 \rangle$. Tramite la tecnica di eliminazione di Gauss, si verifica immediatamente che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(*c*) Dato un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$, la proiezione, $\pi_U^W(x) = a(e_1 - e_3 - e_4) + b(2e_1 - 2e_2 - e_3) \in U$, è quell'unico vettore tale che $x - \pi_U^W(x) \in W$. Deve quindi aversi

$$\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 & -5 \\ 6 & 12 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\sigma_W^U) = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(1 - 2\pi_U^W) = \mathbf{1}_4 - 2\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\pi_U^W).$$

Essendo $U \cap V \subset U$, per ogni $x \in U \cap V$, si ha $\pi_U^W(x) = x$ e $\sigma_W^U(x) = -x$.

(*d*) C non è vuoto perché contiene l'applicazione nulla. Indicato con v_0 un generatore di $U \cap V$, si ha che

$$\mathrm{im}(\pi_U^W \circ \phi) \subseteq V \cap U \iff \forall x \in \mathbb{R}^4,\ \phi(x) = av_0 + w,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \exists w \in W \iff \mathrm{im}\,\phi \subseteq (V \cap U) + W = V.$$

Dunque, gli elementi di C formano un sottospazio di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ isomorfo a $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^4, V)$, che ha dimensione 12. Le matrici in base canonica degli elementi di C hanno come colonne combinazioni lineari dei vettori della base di V data nel testo. Con questo in mente, il lettore può facilmente scrivere le matrici di una base di C o la matrice di un generico suo elemento (farlo!). $\square$

Esame di Matematica 2 – Mod.A (laurea in Matematica)

prova scritta del 11 settembre 2007

ESERCIZIO 1. Si consideri la trasformazione del piano complesso $z \mapsto f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$.

(a) Si determinino i punti uniti della trasformazione.

(b) Al variare di k tra i numeri reali positivi, siano $D_k = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| < k \,\}$ e $C_k = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = k \,\}$. Si determinino i valori di k per cui $f(z)$ è definita su tutti i punti di D_k. Detto k_0 il massimo valore per cui la trasformazione è definita su tutti i punti di D_{k_0}, si dica se l'insieme contiene qualche punto unito.

(c) Si determini l'insieme $f_*(D_{k_0})$ e lo si disegni nel piano di Gauss. Qual'è l'immagine di C_{k_0}?

(d) Si determinino gli insiemi $f_*(C_k)$, quando $k < k_0$.

ESERCIZIO 2. Siano date le basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_3\}$ degli spazi vettoriali reali V e W, rispettivamente.

(a) Si determinino tutte le applicazioni lineari $\phi : V \to W$ tali che

$$\phi(v_2 + v_3) = w_1 + 2w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 + v_4) = 2w_1, \quad \phi(v_3) = w_2 + w_3, \quad \phi(v_1 + v_2 + v_4) = 3w_1 + w_2$$

e si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi)$ per ciascuna di queste.

(b) Si determinino nucleo ed immagine per ϕ e si determini, se esiste, un sottospazio $U \subseteq V$ tale che $\phi_{|U}$ sia una biiezione su W per tutte le applicazioni, ϕ, soddisfacenti alle condizioni del punto (a).

(c) Si consideri l'unione $\mathscr{K}$ dei sottospazi $\ker\phi$ per tutte le applicazioni, ϕ, soddisfacenti alle condizioni del punto (a). Si dica se $\mathscr{K}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ o si determini il sottospazio generato da $\mathscr{K}$.

(d) Al variare di ϕ si determini l'insieme, C_ϕ, delle applicazioni lineari $\psi : V \to V$ tali che $\operatorname{im}(\phi \circ \psi) \subseteq \langle w_1 \rangle$. Si dica se si tratta di un sottospazio e se ne determini l'eventuale dimensione. Si descrivano le matrici $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\psi)$ delle applicazioni $\psi \in C_\phi$.