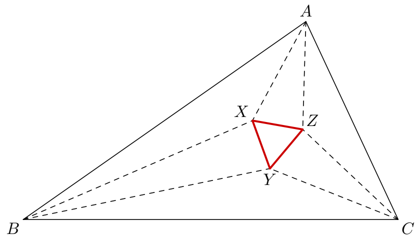
Piano complesso e teorema di Morley

Abbiamo visto che le operazioni tra numeri complessi hanno una notevole interpretazione geometrica. L'applicazione $f(z) = z + a$ è la traslazione tramite il vettore corrispondente al numero complesso a. L'applicazione $f(z) = \alpha z$, con $|\alpha| = 1$, è la rotazione attorno all'origine del numero complesso z dell'angolo $\operatorname{Arg}\alpha$. L'applicazione $f(z) = cz$, con $c \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$, è la dilatazione/contrazione di fattore c e, infine, il coniugio $f(z) = \bar{z}$ è la simmetria rispetto all'asse orizzontale del piano di Gauss. Possiamo quindi concludere che le trasformazioni affini $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ovvero le applicazioni $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$, sono tutte e sole le similitudini del piano di Gauss che conservano l'orientamento. Componendo applicazioni di questo tipo con il coniugio, si possono ottenere tutte le similitudini del piano (il lettore è caldamente invitato a verificare queste affermazioni).

Poter disporre facilmente di queste trasformazioni geometriche del piano permette di ottenere più facilmente tramite calcoli algebrici le dimostrazioni di risultati sulla geometria del piano. Vogliamo mostrare, ad esempio, come si possa usare l'algebra dei numeri complessi per dare una dimostrazione di una famosa osservazione di Frank Morley sui triangoli (cf. la figura a fianco). Nel seguito mostreremo come si possa dimostrare lo stesso risultato, in modo forse più laborioso, senza far uso dei numeri complessi, utilizzando la trigonometria piana.

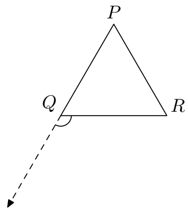


Proposizione. [Morley, 1899] *Sia dato un triangolo ABC e, per ogni angolo, si considerino i segmenti che lo dividono in tre parti uguali (trisettrici). Detti X, Y, Z i punti di intersezione tra le coppie di trisettrici adiacenti ad ogni lato, il triangolo XYZ è un triangolo equilatero.*

Prima di procedere alla dimostrazione della Proposizione stabiliamo qualche fatto che ci sarà utile nel seguito. Cominciamo con una caratterizzazione dei triangoli equilateri nel piano di Gauss e la facciamo seguire da un'osservazione sulle equazioni delle rette nel piano di Gauss.

Lemma 1. *I numeri complessi p, q, r sono i vertici di un triangolo equilatero del piano di Gauss se, e solo se, $p + q\omega + r\omega^2 = 0$, per un'opportuno numero complesso $\omega \neq 1$, tale che $\omega^3 = 1$.*

dim. Supponiamo i tre vertici disposti in verso antiorario, come nel disegno a fianco. Allora, p, q, r sono i vertici di un triangolo equilatero se, e solo se, il vettore $r - q$ si ottiene dal vettore $q - p$ con una rotazione di angolo $2\pi/3$. Posto quindi $\omega = e^{2\pi i/3}$, e ricordando che la moltiplicazione per ω è la rotazione (in verso antiorario) di angolo $2\pi/3$; la condizione diventa



$$r - q = \omega(q - p), \qquad \text{ovvero} \qquad \omega p - (1 + \omega)q + r = 0.$$

Moltiplicando il membro di sinistra per ω^2 si ottiene la tesi, ricordando che $0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(1 + \omega + \omega^2)$ e $\omega \neq 1$.

Se i tre vertici sono disposti in senso orario, occorre fare una rotazione (in verso antiorario) di angolo $4\pi/3$ per mandare il vettore $q - p$ su $r - q$ (si veda il disegno sopra, scambiando Q con R). Quindi si può applicare lo stesso ragionamento con il numero complesso $e^{4\pi i/3} = \omega^2 = \overline{\omega}$, in luogo di ω. **CVD** □

Facciamo ora qualche osservazione sulle equazioni delle rette nel piano complesso tramite le *coordinate hermitiane* z e $\bar{z}$.

Lemma 2. *Dati due punti distinti p e q del piano di Gauss, la retta per i due punti, $p \vee q$, ha un'equazione della forma*

$$Bz - \overline{Bz} + C = 0, \qquad \text{ove } B = \bar{q} - \bar{p}, \quad C = q\bar{p} - p\bar{q}.$$

In particolare, se i due punti p e q appartengono alla circonferenza unitaria ($|p| = 1 = |q|$), allora l'equazione si può scrivere nella forma

$$z + M\bar{z} - N = 0, \qquad \text{ove } M = pq, \quad N = p + q.$$

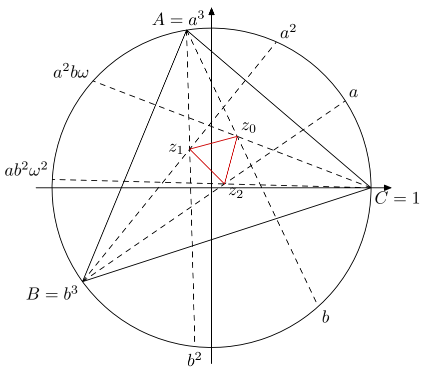
dim. I punti z appartenenti alla retta $p \vee q$ sono quei punti per cui il vettore $z - p$ è un multiplo *reale* del vettore $q - p$, ovvero $z - p = t(q - p)$ con $t \in \mathbb{R}$. Ciò significa che $\frac{z-p}{q-p} = t = \bar{t} = \frac{\bar{z}-\bar{p}}{\bar{q}-\bar{p}}$; da cui si deduce che(†)

$$(\bar{q} - \bar{p})z - (q - p)\bar{z} + (q\bar{p} - p\bar{q}) = 0.$$

Se, in particolare, $|p| = 1 = |q|$, allora $\bar{q} = q^{-1}$ e $\bar{p} = p^{-1}$, per cui moltiplicando il membro di sinistra per $(\bar{q} - \bar{p})^{-1} = \frac{qp}{p-q}$, si ottiene l'equazione nella forma voluta. **CVD** □

Siamo quindi in grado di proporre una dimostrazione del risultato di Morley.

dim. (della Proposizione di Morley). Possiamo sostituire il triangolo di partenza con uno simile e possiamo quindi supporre che i vertici del triangolo ABC appartengano alla circonferenza unitaria. Inoltre, possiamo ruotare il triangolo in modo che il vertice C coincida con il numero complesso 1. Facciamo quindi riferimento alla figura qui a fianco. Fissiamo quindi gli argomenti $\alpha \in (0, 2\pi)$ e $\beta \in (-2\pi, 0)$ dei numeri $a = e^{i\alpha}$ e $b = e^{i\beta}$ nel disegno, in modo che $a^3 = A$, $b^3 = B$, $3\alpha < 2\pi + 3\beta$ e le potenze di a ruotino in senso anti orario, mentre le potenze di b ruotino in senso orario. In questo modo i segmenti Ba e Ba^2 (risp. Ab e Ab^2) suddividono in tre parti uguali l'angolo in B (risp. in A), perché suddividono in parti uguali l'arco di circonferenza corrispondente. Per suddividere in tre parti uguali l'arco opposto al vertice C, devo ruotare, il punto A, dell'angolo $(2\pi + 3\beta - 3\alpha)/3 = 2\pi/3 + \beta - \alpha$ e del suo doppio; ovvero devo moltiplicare $A = a^3$ per i numeri complessi $\frac{\omega b}{a}$, $\frac{\omega^2 b^2}{a^2}$ e $\frac{b^3}{a^3}$, ove $\omega = e^{2\pi i/3}$. A questo punto non dobbiamo far altro che calcolare esplicitamente le coordinate dei punti, z_0, z_1, z_2, di intersezione delle trisettrici adiacenti ai lati e verificare che è soddisfatta la condizione del Lemma 1.



Grazie al Lemma 2, possiamo scrivere (e risolvere) facilmente dei sistemi che determinano nel piano di Gauss i punti

$$\{z_0\} = (1 \vee a^2b\omega) \cap (a^3 \vee b), \quad \{z_1\} = (b^3 \vee a^2) \cap (a^3 \vee b^2), \quad \{z_2\} = (1 \vee ab^2\omega^2) \cap (a \vee b^3).$$

Si ha quindi

$$\{z_0\} : \begin{cases} z + a^2b\omega\, \bar{z} - (1 + a^2b\omega) = 0 \\ z + a^3b\, \bar{z} - (a^3 + b) = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce (sottraendo la seconda equazione dalla prima)

$$\bar{z}_0 = \frac{1 + a^2b\omega - a^3 - b}{a^2b\omega - a^3b} = \frac{(\omega^3 - a^3) + b\omega(a^2 - \omega^2)}{a^2b(\omega - a)} = \bar{a}^2\bar{b}(\omega^2 + a\omega + a^2 - ab\omega - b\omega^2);$$

ovvero $z_0 = a^2b\omega + ab\omega^2 + b - a\omega^2 - a^2\omega$.

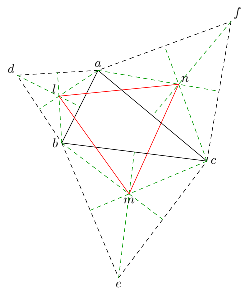
In modo analogo si ottengono i sistemi

$$\{z_1\} : \begin{cases} z + a^3b^2\, \bar{z} - (a^3 + b^2) = 0 \\ z + a^2b^3\, \bar{z} - (a^2 + b^3) = 0 \end{cases} \qquad \{z_2\} : \begin{cases} z + ab^3\, \bar{z} - (a + b^3) = 0 \\ z + ab^2\omega^2\, \bar{z} - (1 + ab^2\omega^2) = 0 \end{cases}$$

da cui si deduce $z_1 = b^2 + a^2 + ab - ab^2 - a^2b$ e $z_2 = ab^2\omega^2 + ab\omega + a - b\omega - b^2\omega^2$. A questo punto, il lettore può facilmente verificare con un calcolo diretto che $z_0 + \omega z_1 + \omega^2 z_2 = 0$. **CVD** □

Un'altra applicazione del Lemma 1 può essere la dimostrazione del cosiddetto Teorema di Napoleone: un'altra proprietà dei triangoli (cf. il disegno a fianco), la cui scoperta viene attribuita al generale-imperatore di Francia. La lasciamo come esercizio al lettore interessato.

Proposizione. *Dato un qualsiasi triangolo (non degenere) di vertici A, B, C, siano L, M e N i centri dei triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo. I punti L, M e N sono i vertici di un triangolo equilatero.*



(†) Si osservi che, per qualunque numero complesso z, il numero $f(z) = (\bar{q} - \bar{p})z - (q - p)\bar{z} + (q\bar{p} - p\bar{q})$ è un numero immaginario, perché differenza tra due numeri complessi coniugati. Se si vuole ottenere invece una funzione che abbia lo stesso luogo degli zeri e *valori reali*, allora basta considerare $if(z)$ (o la sua opposta). Queste ultime definiscono le equazioni delle rette del tipo proposto nel libro e, avendo valori reali su tutto il piano complesso, possono essere usate in disuguaglianze per definire semipiani.

Diamo ora un'altra dimostrazione dell'osservazione di Morley, dimostrazione che fa uso solo dei risultati fondamentali della trigonometria piana. Il lettore insoddisfatto dalle due dimostrazioni può provare a proporre la propria.

Cominciamo richiamando alcuni classici fatti sui triangoli (probabilmente ben noti al lettore).

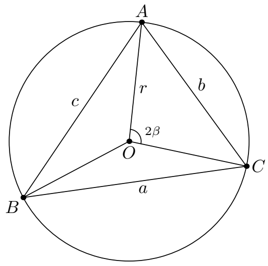
Lemma. *Si consideri un triangolo ABC, inscritto in una circonferenza di raggio r, e siano α, β e γ gli angoli nei rispettivi vertici.*
(a) Dette a, b, c, le lunghezze dei lati opposti ai vertici omonimi, si ha

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

(b) Si ha inoltre

$$\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma.$$

dim. (a) Indichiamo. come di consueto con A, B e C i vertici degli angoli α, β e γ e con a, b e c i lati opposti a tali vertici. Indicato con O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo [cf. il disegno qui a lato], osserviamo che il triangolo AOC è un triangolo isoscele, in quanto i lati AO e CO sono raggi della circonferenza e che l'angolo racchiuso tra tali lati è il doppio di β perchè un angolo al centro è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza. Dunque, applicando il *Teorema dei Coseni* al triangolo AOC, si ricava che



$$b^2 = 2r^2(1-\cos 2\beta) = 4r^2\sin^2\beta,$$

perché $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$, e quindi $a = 2r\sin\beta$. Analogamente, si ricava che $a = 2r\sin\alpha$ e $c = 2r\sin\gamma$. A margine osserviamo che la lunghezza del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo è uguale al rapporto tra la lunghezza di un lato ed il seno dell'angolo opposto e che talvolta viene enunciato in questo modo il cosiddetto *Teorema dei Seni*.
(b) È sufficiente applicare il cosiddetto Teorema dei Coseni al triangolo del punto precedente, ricordando le relazioni tra le lunghezze dei lati e il seno degli angoli opposti. Infatti, dalla relazione $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, si ricava quanto dobbiamo verificare. **CVD** □

Siamo quindi in grado di scrivere una dimostrazione del risultato di Morley.

dim. (della Proposizione di Morley). Facciamo riferimento alla figura a p. 1 e indichiamo con 3α, 3β e 3γ le misure degli angoli del triangolo ABC, e con a, b e c le misure dei lati opposti ai vertici omonimi. Dunque, si ha $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{3}$.

È chiaro che il problema non cambia se si sostituisce al triangolo dato un qualsiasi triangolo ad esso simile. Supponiamo quindi che il triangolo ABC sia inscritto in una circonferenza di diametro 1, e perciò che le misure dei suoi lati siano $a = \sin 3\alpha$, $b = \sin 3\beta$ e $c = \sin 3\gamma$. Nel triangolo AXB i due angoli adiacenti al lato AB, misurano α e β, quindi, applicando il *Teorema dei seni*, si ricava

$$|AX| = \frac{c\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)}.$$

Ora si osservi che, dalle formule di addizione, si deduce che

$$\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma = 4\sin\gamma\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\gamma\right] = 4\sin\gamma\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\gamma\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\gamma\right).$$

Applicando le formule di prostaferesi e poi le formule di duplicazione, si ricava

$$\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\gamma\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} + \sin\gamma\right) = 2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)\,2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)$$

e, mettendo insieme le due osservazioni precedenti, si può scrivere $\sin 3\gamma = 4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)$. Dunque, per quanto visto,

$$|AX| = \frac{\sin 3\gamma\,\sin\beta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\gamma)} = 4\sin\gamma\,\sin\beta\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).$$

Ragionando analogamente sul triangolo AZC, si ricava che

$$|AZ| = 4\sin\gamma\,\sin\beta\,\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right).$$

Dunque, applicando il *Teorema dei Coseni* al triangolo AXZ, si ottiene

$$\begin{aligned}|ZX|^2 &= |AX|^2 + |AZ|^2 - 2|AZ||AX|\cos\alpha = \\ &= 16\sin^2\beta\sin^2\gamma\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha\right].\end{aligned}$$

Ricordando che la somma dei tre angoli $\frac{\pi}{3}+\gamma$, $\frac{\pi}{3}+\beta$, α, è uguale a π, possiamo concludere che

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\cos\alpha = \sin^2\alpha$$

e quindi $|ZX| = 4\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha$. In modo analogo si ottiene che i lati XY e YZ hanno la stessa lunghezza e perciò il triangolo è equilatero. **CVD** $\square$

Il risultato di Morley, che abbiamo discusso così a lungo, non ha certo un ruolo centrale nella matematica moderna. Il suo interesse si deve anche alla facile realizzazione grafica e a una qualche sorpresa per il fatto abbia dovuto attendere la fine del XIX secolo per fare la sua comparsa (la non costruibilità con riga e compasso delle trisettrici ha forse influito in questo senso). Si deve comunque constatare che questo risultato ha dato origine a un gran numero di articoli (e siti web) di tipo divulgativo ed è stato variamente generalizzato alle trisettrici degli angoli esterni, dando origine a 18 triangoli equilateri che possono essere associati con costruzioni simili al triangolo originale. Il lettore interessato a una panoramica storica sulle sue dimostrazioni può consultare un articolo del mensile dell'AMS, [Cletus O. Oakley, Justine C. Baker, *The Morley trisector theorem*, Amer. Math. Monthly (1978), pp.737–745] dove si presenta una lunga bibliografia sull'argomento.

Un articolo successivo a quella lista, ma che mi sembra più interessante per comprendere il risultato e la sua interpretazione in termini dei gruppi di trasformazioni che agiscono su $\mathbb{C}$ (o, più in generale, su un campo qualsiasi), è stato scritto da Alain Connes (uno tra i più importanti matematici viventi) in occasione della celebrazione del quarantennale dell'Institut des Hautes Études Scientifiques e mostra come si possa generalizzare il risultato dal piano di Gauss alla retta affine su un qualsiasi campo di caratteristica diversa da 3 [Alain Connes, *A new proof of Morley's theorem*, Publ. Math. IHES 88, (1998) pp.43–46]. Nell'articolo si spiega come il triangolo equilatero di Morley discenda dall'esistenza di tre trasformazioni affini $g_0(z) = a_0z + b_0$, $g_1(z) = a_1z + b_1$, $g_2(z) = a_2z + b_2$,

che soddisfano alle seguenti condizioni:

- le applicazioni composte g_0g_1, g_1g_2, g_2g_0, $g_0g_1g_2$, non sono traslazioni;
- il prodotto dei coefficienti della z nelle tre applicazioni, $j = a_0a_1a_2$ è una radice terza di 1, ($j^3 = 1 \neq j$);
- l'applicazione composta $g_0^3g_1^3g_2^3 = \mathrm{id}$.

I punti uniti delle composizioni, a due a due, di queste trasformazioni; precisamente, z_0 il punto unito di g_1g_2, z_1 il punto unito di g_0g_1, z_2 il punto unito di g_2g_0 soddisfano alla condizione $z_1 + jz_0 + j^2z_2 = 0$.

Nelle notazioni della dimostrazione su $\mathbb{C}$ si tratta delle applicazioni $g_0(z) = a^{-1}z + b^3(1 - a^{-1})$, $g_1(z) = bz + a^3(1 - b)$, $g_2(z) = \frac{a\omega^2}{b}z + (1 - \frac{a\omega^2}{b})$ e $j = \omega^2$. I punti uniti z_0, z_1, z_2, sono i vertici di un triangolo equilatero, perché soddisfano alla condizione del Lemma 1.

Moltiplicando i coefficienti di z nelle trasformazioni g_0, g_1, g_2 per radici terze di 1, si ottengono terne di funzioni con le stesse proprietà, che danno quindi origine agli altri 18 triangoli equilateri.