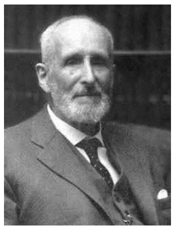
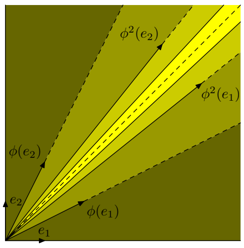
Un teorema di Perron e Frobenius

Il *Teorema di Perron-Frobenius* è un importante risultato sugli autovalori delle matrici reali ad elementi positivi o, più in generale, non negativi. Queste sono le matrici di trasformazioni lineari $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, tali che $\phi(\Pi) \subseteq \Pi$, ove Π è il *monoide dei positivi*, ovvero $\Pi = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \,\}$. Il teorema dice che per una matrice ad elementi positivi, l'autovalore che ha massimo valore assoluto è reale ed ha uno spazio di autovettori di dimensione 1, generato da un vettore di $\Pi^0 = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \,\}$. Matrici ad elementi non negativi compaiono in molte applicazioni, dai processi di Markov a modelli economici o di popolazioni, all'algoritmo di indicizzazione dei siti di Google; e la conoscenza dell'autovettore relativo al massimo autovalore ha grande importanza nel determinare il comportamento nel lungo periodo del processo modellato dalla matrice in questione. Non ci occuperemo delle applicazioni, ma ci limiteremo a ripercorrere una dimostrazione del risultato.



Ferdinand G. Frobenius (1849-1917)
Oskar Perron (1880-1975)

Vediamo un esempio elementare che illustri meglio quanto studieremo in seguito. Consideriamo l'endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ di matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, che ha la proprietà di mandare $\Pi \setminus \{0\}$ in Π^0. In questo caso, Π è il quadrante di $\mathbb{R}^2$ delimitato dai semiassi positivi e l'immagine di Π tramite ϕ è il settore delimitato dalle semirette generate da $\phi(e_1)$ e $\phi(e_2)$ (cf. il disegno a fianco). Applicando un'altra volta ϕ si va a cadere nel settore delimitato dalle semirette generate da $\phi^2(e_1)$ e $\phi^2(e_2)$ e così via in settori indicati nel disegno con un colore più brillante. Al crescere del numero di iterazioni di ϕ, il settore che delimita $\phi^n(\Pi)$ si chiude sulla semiretta contenente l'unico autovettore in Π^0 relativo proprio all'autovalore di massimo modulo per ϕ. Infatti, il polinomio caratteristico di ϕ è $p_\phi(X) = (X-1)(X-3)$ e gli autovettori sono $\ker(\phi - 3) = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ e $\ker(\phi - 1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. L'esempio descrive un comportamento generale che verrà ben precisato in un successivo Teorema.



Cominciamo ora con le notazioni che ci saranno necessarie nel seguito e con alcune facili osservazioni. Data un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, chiameremo *raggio spettrale* di ϕ il massimo tra i valori assoluti degli autovalori di ϕ, ovvero $\rho(\phi) = \max\{\, |c| \mid c \in \mathbb{C},\ p_\phi(c) = 0 \,\}$. Data una matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, scriveremo $\rho(A)$ per indicare il raggio spettrale dell'applicazione lineare di matrice A (rispetto alla base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{C}^n$). Osserviamo che $\rho(\phi) = 0$ solo se ϕ è nilpotente. Una matrice ad elementi positivi manda i vettori non nulli di Π in vettori di Π^0 e quindi non può essere nilpotente (perché?).

Sui vettori di Π (o, più in generale, sui vettori di $\mathbb{R}^n$) si può definire una relazione di ordine parziale, ponendo $u \leq v$ se, e solo se, $v - u \in \Pi$; ovvero, se $e_i^* \circ u \leq e_i^* \circ v$ per ogni $i = 1, \dots, n$, ove $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ è la base duale della base canonica. La relazione è chiaramente riflessiva, antisimmetrica e transitiva e quindi è un ordine parziale (essendoci coppie di vettori non confrontabili). Le matrici ad elementi non negativi rispettano questa relazione d'ordine, ovvero, se $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è un endomorfismo di matrice A ad elementi non negativi e $u \leq v \in \Pi$, allora $\phi(u) \leq \phi(v)$, ovvero $Au \leq Av$. Anzi, se $u < v \in \Pi^0$ allora $Au < Av$, purché A non sia la matrice nulla. Per una tale A, se $Au = 0$ per qualche $u \in \Pi^0$, allora deve essere $A = 0$.

Possiamo estendere il valore assoluto complesso ad un'applicazione $|\ | : \mathbb{C}^n \to \Pi$ che manda il vettore $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ sul vettore $|v| = |x_1| e_1 + \dots + |x_n| e_n$. In particolare, se $\phi(\Pi) \subseteq \Pi$, allora dalle proprietà elementari del valore assoluto si ricava $|\phi(v)| \leq \phi(|v|)$, per ogni vettore $v \in \mathbb{C}^n$.

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ si possono introdurre norme differenti che, pur essendo equivalenti dal punto di vista topologico (una successione che converga a zero in una di queste norme converge a zero in tutte le norme), hanno sfere unitarie di forme differenti. Per ogni numero reale $p \geq 1$ ed ogni vettore $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{C}^n$, si pone[†]

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \qquad \text{e} \qquad \|v\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|.$$

[†] Invitiamo il lettore a porre attenzione sul fatto che la definizione della norma di un vettore dipende dalle coordinate del vettore stesso nella base canonica di $\mathbb{C}^n$. Non tutti i cambiamenti di coordinate rispettano la norma. Allo stesso modo, generici cambiamenti di coordinate non lasciano invariante il sottoinsieme Π. Le permutazioni dei vettori della base canonica lasciano invariate sia la norma che il sottoinsieme Π.

Per ciascuna di queste norme valgono le consuete proprietà$^{(*)}$

- $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
- $\|cv\| = |c|\|v\|$ per ogni scalare $c \in \mathbb{C}$;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Le norme così definite per i vettori si estendono agli endomorfismi (o, più in generale, agli omomorfismi tra spazi diversi), ponendo per $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$\|\phi\| = \sup_{v \in \mathbb{C}^n \smallsetminus \{0\}} \frac{\|\phi(v)\|}{\|v\|}$$

per ciascuna delle norme definite sopra. Osserviamo che si ha

- $\|\phi\| \geq 0$ e $\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$;
- $\|c\phi\| = |c|\|\phi\|$ per ogni scalare $c \in \mathbb{C}$;
- $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$;
- $\|\phi \circ \psi\| \leq \|\phi\| \, \|\psi\|$;

per ciascuna delle norme definite sopra. Le prime tre proprietà discendono dalle analoghe proprietà della norma tra vettori; l'ultima si ottiene, osservando che, se $\psi(v) \neq 0$, allora $\frac{\|\phi(\psi(v))\|}{\|v\|} = \frac{\|\phi(\psi(v))\|}{\|\psi(v)\|} \frac{\|\psi(v)\|}{\|v\|} \leq \|\phi\|\|\psi\|$.

C'è una relazione tra il raggio spettrale e le norme di endomorfismi. Infatti, per ogni vettore v e per ognuna delle norme date, si ha $\|\phi(v)\| \leq \|\phi\| \, \|v\|$. Quindi, prendendo un autovettore relativo ad un autovalore di modulo massimo, si ottiene la disuguaglianza $\rho(\phi) \leq \|\phi\|$, valida per ogni norma e per ogni endomorfismo; da cui si deduce per ogni intero positivo k, la disuguaglianza $\rho(\phi)^k = \rho(\phi^k) \leq \|\phi^k\|$, ovvero $\rho(\phi) \leq \|\phi^k\|^{1/k}$. D'altro canto, per ogni numero reale positivo, ε, si ha $\rho\left(\frac{\phi}{\rho(\phi)+\varepsilon}\right) < 1$, e quindi $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\phi^k}{(\rho(\phi)+\varepsilon)^k} = 0$, da cui si deduce che, per valori di k sufficientemente grandi, si ha $\|\phi^k\| \leq (\rho(\phi)+\varepsilon)^k$, ovvero

$$\rho(\phi) \leq \|\phi^k\|^{1/k} \leq \rho(\phi) + \varepsilon, \qquad \text{per ogni } \varepsilon > 0,$$

da cui si conclude che $\rho(\phi) = \displaystyle\lim_{k\to\infty} \|\phi^k\|^{1/k}$, qualunque sia la norma in questione.

Osserviamo infine che, se ϕ è un endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ di matrice A ad elementi positivi, per ogni vettore $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ ed ogni indice $i = 1, \dots, n$, si ha

$$|e_i^* \circ \phi(v)| = \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right) \max_{j=1,\dots,n} |x_j| = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right) \|v\|_\infty.$$

Quindi, per ogni vettore $v \neq 0$, si ha

$$\frac{\|\phi(v)\|_\infty}{\|v\|_\infty} \leq \max_{i=1,\dots,n} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right) = \frac{\|\phi(e)\|_\infty}{\|e\|_\infty}$$

ove $e = e_1 + \cdots + e_n$. Ovvero per gli endomorfismi ϕ con matrice $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ ad elementi positivi, si ha $\|\phi\|_\infty = \|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right) = \|\phi(e)\|_\infty$. Sotto tali ipotesi, per un vettore $w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ di Π, si ha $\|\phi(w)\|_\infty \geq \|\phi\|_\infty(\min_{i=1,\dots,n} y_i)$.

Siamo quindi in grado di enunciare il seguente

Teorema. *Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un applicazione lineare tale che $\phi(\Pi \smallsetminus \{0\}) \subseteq \Pi^0$ ed indichiamo con $r = \rho(\phi)$ il raggio spettrale di ϕ. Allora valgono i fatti seguenti.*

(a) r è autovalore per ϕ e se v è autovettore relativo ad un autovalore di modulo r, allora $|v| \in \Pi^0$ ed è autovettore relativo all'autovalore r.

(b) r è l'unico autovalore di modulo uguale a $\rho(\phi)$.

(c) L'esponente di $(X - r)$ nel polinomio minimo di ϕ (l'indice di r) è uguale ad 1.

$^{(*)}$ Si veda il foglio sulle *Norme su spazi vettoriali complessi* per una dimostrazione.

(d) La molteplicità (algebrica) di r è uguale ad 1.
(e) Nessun altro autovalore di ϕ ha autovettori in Π^0.
(f) Sia $f : \Pi \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(v) = \min\limits_{\substack{i=1,\dots,n\\ e_i^*\circ v\neq 0}} \dfrac{e_i^*\circ\phi(v)}{e_i^*\circ v}$ Allora $r = \max\limits_{v\in\Pi\smallsetminus\{0\}} f(v)$.

dim. Abbiamo già osservato che nelle ipotesi date ϕ non può essere nilpotente e quindi deve aversi $r > 0$. Quindi, a meno di moltiplicare ϕ per uno scalare (reale) positivo, possiamo supporre $r = 1$.
(a) Sia c un autovalore di modulo 1 e sia v un autovettore ad esso relativo. Allora

$$|v| = |c||v| = |cv| = |\phi(v)| \leq \phi(|v|).$$

Sia $u = \phi(|v|) - |v| \in \Pi$ e supponiamo, per assurdo, che $u \neq 0$. In queste ipotesi, i vettori $\phi(u)$ e $\phi(|v|)$ stanno entrambi in Π^0, quindi esiste un numero reale positivo, ε, tale che $\phi(u) > \varepsilon\phi(|v|)$. Allora si ha

$$\phi(\phi(|v|)) = \phi(|v|) + \phi(u) > (\varepsilon+1)\phi(|v|), \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{1}{1+\varepsilon}\phi(\phi(|v|)) > \phi(|v|).$$

Posto $w = \phi(|v|) \in \Pi^0$ e $\psi = \frac{1}{1+\varepsilon}\phi$, si ha $\psi(w) > w$ e quindi $\psi^n(w) > w > 0$ per ogni intero positivo n. Questo è assurdo, perché $\rho(\psi) = \frac{\rho(\phi)}{1+\varepsilon} < 1$, e quindi la successione ψ^n tende a 0. L'assurdo nasce dall'aver supposto $u \neq 0$ e quindi $|v| = \phi(|v|) \in \Pi^0$ è autovettore relativo all'autovalore 1 per ϕ.
(b) Sia quindi $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo all'autovalore c, con $|c| = 1 = \rho(\phi)$. Per quanto visto al punto precedente, $|v|$ è autovettore relativo all'autovalore 1 e quindi $|v| = \phi(|v|) \in \Pi^0$. Indicata con $A = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$, si ha

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| = |e_i^*\circ\phi(v)| = |cx_i| = |x_i| = |e_i^*\circ\phi(|v|)| = \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|.$$

Ciò implica $a_{ij}x_j = \alpha_j a_{i1}x_1$ per qualche numero reale positivo α_j e $j = 2,\dots,n$. Osservato che, per $j = 1,\dots,n$, $x_j = \beta_j x_1$, ove $\beta_1 = 1$ e $\beta_j = \frac{\alpha_j a_{i1}}{a_{ij}} > 0$, e posto $v' = \beta_1e_1 + \cdots + \beta_ne_n = \frac{1}{x_1}v \in \Pi^0$, si ha $cv' = \phi(v') \in \Pi^0$ e quindi $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Ovvero $c = 1$.
(c) Se l'esponente di $X - 1$ nel polinomio minimo di ϕ fosse $m > 1$, la forma di Jordan di ϕ avrebbe un blocco di Jordan di ordine m relativo all'autovalore 1. Indicato con J_0 tale blocco, alcune delle entrate di J_0^k divergono al crescere di k (le entrate del tipo $(i, i+1)$ nelle notazioni che abbiamo usato nel corso), quindi, detta J la forma di Jordan della matrice di ϕ, si avrebbe che $\|J^k\|_\infty = \|\phi^k\|_\infty$ diverge al crescere di k. D'altra parte, esiste un vettore $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in \Pi^0$ tale che $\phi(v) = v$ e quindi, per quanto visto sopra, $\|v\|_\infty = \|\phi^k(v)\|_\infty \geq \|\phi^k\|_\infty(\min_{j=1,\dots,n} x_j)$, che è assurdo.
(d) Per quanto visto al numero precedente è sufficiente mostrare che la nullità (molteplicità geometrica) dell'autovalore 1 è uguale ad 1. Siano quindi $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ e $w = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$ due autovettori non nulli relativi all'autovalore 1. Fissato un coefficiente $y_i \neq 0$, poniamo $u = v - \frac{x_i}{y_i}w$ ed osserviamo che si tratta di un autovettore relativo all'autovalore 1, con $e_i^*\circ u = 0$. Se fosse $u \neq 0$ avrei che $|u| \in \Pi$ sarebbe anch'esso un autovettore non nullo relativo all'autovalore 1 e quindi $|u| = \phi(|u|) \in \Pi^0$, che è assurdo.
(e) L'applicazione trasposta, ϕ^*, ha matrice ad elementi positivi rispetto alla base duale ed ha gli stessi autovalori di ϕ; quindi esiste un autovettore $\zeta \in \mathbb{C}^{n*}$, relativo all'autovalore 1, "a coordinate positive rispetto alla base duale", ovvero tale che $\zeta\circ v \in \mathbb{R}_{>0}$ per ogni $v \in \Pi\smallsetminus\{0\}$. Ciò detto, se $w \in \Pi$ è un autovettore per ϕ, relativo ad un autovalore, c, si ha

$$0 < \zeta\circ w = \phi^*(\zeta)\circ w = \zeta\circ\phi(w) = c(\zeta\circ w)$$

che implica $c = 1$.
(f) Sia $w \in \Pi\smallsetminus\{0\}$ e $c = f(w)$. Allora $0 \leq cw \leq \phi(w)$. Siano $v \in \Pi^0$ e $\zeta \in \mathbb{C}^{n*}$ tali che $\phi(v) = v$ e $\phi^*(\zeta) = \zeta$, con $\zeta(\Pi) \subseteq \Pi^0$. Allora, da $0 \leq cw \leq \phi(w)$ si deduce

$$0 < c(\zeta\circ w) \leq \zeta\circ\phi(w) = \phi^*(\zeta)\circ w = \zeta\circ w$$

e quindi $c \leq 1$, ovvero $f(w) \leq 1$ per ogni $w \in \Pi\smallsetminus\{0\}$. D'altra parte, se $v \in \Pi^0$ è l'autovettore relativo all'autovalore 1, si ha $f(v) = 1$ e quindi la tesi. **CVD** $\square$

La condizione $\phi(\Pi\smallsetminus\{0\}) \subset \Pi^0$, ovvero che la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ abbia entrate positive, può essere indebolita chiedendo solo che $\phi(\Pi\smallsetminus\{0\}) \subseteq \Pi$ (matrice ad entrate non-negative). In tal caso, solo alcune delle proprietà viste in precedenza si mantengono, come si può verificare grazie ad un "procedimento di limite".

Corollario. *Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo tale che $\phi(\Pi) \subseteq \Pi$. Allora valgono i seguenti asserti.*
(a) $r = \rho(\phi)$ è autovalore per ϕ;
(b) esiste un autovettore $v \in \Pi \setminus \{0\}$ relativo ad r;
(c) Sia $f : \Pi \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(v) = \min\limits_{\substack{i=1,\dots,n \\ e_i^* \circ v \neq 0}} \dfrac{e_i^* \circ \phi(v)}{e_i^* \circ v}$. Allora $r = \max_{v \in \Pi \setminus \{0\}} f(v)$.

dim. (a) e (b) Sia $\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'endomorfismo definito da $\nu(e_i) = e_1 + \dots + e_n$, per $i = 1, \dots, n$, ovvero l'endomorfismo tale che $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\nu)$ abbia tutte le entrate uguali ad 1. Allora, per ogni $n > 0$, l'endomorfismo $\phi_n = \phi + \frac{1}{n}\nu$, soddisfa alla condizione $\phi_n(\Pi \setminus \{0\}) \subset \Pi^0$ e quindi alle ipotesi del Teorema precedente. Quindi, per ogni $n > 0$, esiste un autovettore $v_n \in \Pi^0$ per ϕ_n, relativo all'autovalore $r_n = \rho(\phi_n)$ e con $\|v_n\|_1 = 1$. La sfera unitaria (per qualsiasi norma) è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}^n$ e quindi la successione ammette una sottosuccessione $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente ad un vettore $v_0 \in \Pi$, con $\|v_0\|_1 = 1$. Inoltre, se $n_1 < n_2$, $\|\phi_{n_1}\|_1 > \|\phi_{n_2}\|_1$, per cui, si ha $\rho(\phi_{n_1}) \geq \rho(\phi_{n_2})$, in base alla relazione esistente tra norma e raggio spettrale. La successione dei raggi spettrali è quindi decrescente e limitata inferiormente dal raggio spettrale di ϕ e perciò converge ad un numero reale $r_0 \geq r = \rho(\phi)$. Si ha quindi

$$\phi(v_0) = \lim_{k \to \infty} \phi_{n_k}(v_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} r_{n_k} v_{n_k} = r_0 v_0$$

da cui si deduce che r_0 è un autovalore per ϕ e deve aversi $r_0 \leq r$, che permette di concludere che $r_0 = r$ e v_0 è l'autovettore cercato.
(c) Dall'esistenza dell'autovettore v_0 si ha $r \leq \max_{v \in \Pi \setminus \{0\}} f(v)$. L'altra disuguaglianza si ottiene in questo modo. Sia $\zeta_n \in \mathbb{C}^{n*}$ l'"autovettore positivo" di ϕ_n^*. Allora, per ogni $v \in \Pi$, si ha $0 \leq f(v)v \leq \phi(v) \leq \phi_n(v)$, da cui si deduce $0 \leq f(v)\zeta_n \circ v \leq \zeta_n \circ \phi_n(v) = \phi_n^*(\zeta) \circ v = r_n \zeta_n \circ v$ Per cui $f(v) \leq r_n$ per ogni $n > 0$ e quindi $f(v) \leq r = \lim_{n \to \infty} r_n$. **CVD** □

Nonostante si mantengano anche in questo caso alcuni risultati fondamentali, come l'esistenza dell'autovalore reale e la sua caratterizzazione tramite la funzione $f : \Pi \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(v) = \min\limits_{\substack{i=1,\dots,n \\ e_i^* \circ v \neq 0}} \dfrac{e_i^* \circ \phi(v)}{e_i^* \circ v}$ (*funzione di Collatz-Wielandt*); alcune importanti proprietà del Teorema precedente sono perdute. Ad esempio, non c'è alcun motivo per cui il raggio spettrale sia diverso da 0, né che la molteplicità o l'indice dell'autovettore ad esso relativo sia uguale ad 1, come si vede facilmente considerando l'endomorfismo di $\mathbb{C}^2$ di matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in base canonica. Inoltre, anche se il raggio spettrale è positivo, non c'è più garanzia che l'autovalore di massimo modulo sia unico, come si vede considerando, ad esempio la simmetria di matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in base canonica, di autovalori 1 e -1. Resta però vero che la matrice $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ha un unico autovalore positivo di massimo modulo $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a cui corrisponde l'autovettore $ce_1 + e_2 \in \Pi^0$. È merito di Frobenius, aver chiarito quali proprietà ulteriori debbano debbano soddisfare gli endomorfismi con matrici non-negative per poter estendere i risultati di unicità che valevano nel caso descritto dal Teorema.

Definizione. Un endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ si dice *riducibile* se esistono una permutazione, $\sigma \in \Sigma_n$, ed un intero k, $1 \leq k < n$, tali che il sottospazio $U = \langle e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)} \rangle$ sia stabile rispetto a ϕ ($\phi(U) \subseteq U$). Se ciò non accade ϕ si dirà *irriducibile*.

Lemma. *Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo irriducibile e tale che $\phi(\Pi) \subseteq \Pi$. Allora $\psi = (\mathrm{id} + \phi)^{n-1}$ soddisfa alla condizione $\psi(\Pi \setminus \{0\}) \subset \Pi^0$.*

dim. Si ha $\psi = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \phi^j$ ed è sufficiente verificare che $\psi(e_i) \in \Pi^0$ per $i = 1, \dots, n$. Se così non fosse esisterebbe un minimo indice i_0 per cui $\psi(e_{i_0}) \in \Pi \setminus \Pi^0$ e quindi il sottospazio $\langle e_{i_0}, \phi(e_{i_0}), \dots, \phi^{n-1}(e_{i_0}) \rangle$ sarebbe contenuto in uno degli iperpiani coordinati $H_j = \langle e_i, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n \rangle$. Sia j_0 il minimo indice per cui ciò accade e riordiniamo gli indici $1, \dots, n$ di modo che i_0 sia al primo posto, j_0 all'ultimo e gli altri nell'ordine naturale. Se $n = 2$, il sottospazio $\langle e_{i_0} \rangle$ è ϕ-stabile, contro l'ipotesi di irriducibilità. Se $n > 2$, siano $i_1, \dots, i_{r_1}$ gli indici diversi da i_0 (se esistono) tali che $e_{i_j}^* \circ \phi(e_{i_0}) \neq 0$ per $j = i, \dots, r_1$, ed osserviamo che, deve aversi $\phi(e_{i_j}) \in H_{j_0}$ per $j = 1, \dots, r_1$, perché, altrimenti, comparirebbe un coefficiente non nullo per e_{j_0} anche in $\phi^2(e_{i_0})$. Posso quindi riordinare gli indici in modo che $i_0, i_1, \dots, i_{r_1}$ siano ai primi posti, j_0 all'ultimo e gli altri nell'ordine naturale. Se $n = r_1 + 2$, il sottospazio $\langle e_{i_0}, \dots, e_{i_{r_1}} \rangle$ è ϕ-stabile, contro le ipotesi. Altrimenti posso continuare prendendo in considerazione gli ulteriori vettori della base canonica che compaiono con coefficiente non nullo in $\phi^2(e_{i_0})$ e poi nelle immagini successive. Alla fine di questa procedura ottengo un sottospazio ϕ-stabile $\langle e_{i_0}, \dots, e_{i_{r_k}} \rangle$ che non contiene e_{j_0}, contro l'ipotesi che ϕ fosse irriducibile. **CVD** $\square$

Possiamo quindi concludere con la seguente

Proposizione. *Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo irriducibile tale che $\phi(\Pi) \subseteq \Pi$. Allora, facendo seguito al corollario precedente, oltre agli asserti ivi dimostrati, si ha*
(d) la molteplicità algebrica di r è uguale ad 1;
(e) esiste un autovettore $v \in \Pi^0$ relativo ad r e $r = \rho(\phi) > 0$.

dim. Se $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ è un endomorfismo e $c_1, \dots, c_r$ sono i suoi autovalori, di molteplicità $m_1, \dots, m_r$; allora, per ogni polinomio $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ di grado positivo, l'endomorfismo $P(\phi)$ ha gli autovalori $P(c_1), \dots, P(c_r)$, con molteplicità $m_1, \dots, m_r$, come si può vedere facilmente considerando la forma di Jordan della matrice di ϕ (o una qualsiasi forma triangolare). In particolare, se v_0 è autovettore relativo a c_i per ϕ, allora, lo stesso v_0 è autovettore relativo a $P(c_i)$ per $P(\phi)$.
(*d*) Sia $P(X) = (1+X)^{n-1}$ e $\psi = P(\phi) = (\mathrm{id} + \phi)^{n-1}$. Se $r = \rho(\phi)$, allora $s = (1+r)^{n-1} = \rho(\psi)$. In base al Lemma ed al Teorema precedenti, s è autovalore per ψ con molteplicità 1 e quindi r non poteva avere una molteplicità maggiore come autovalore di ϕ.
(*e*) Per quanto visto nel Corollario precedente, ϕ ha un autovettore relativo ad r, $v_0 \in \Pi$. Allora $\psi(v_0) = P(r)v_0 \in \Pi^0$, per cui doveva aversi $v_0 \in \Pi^0$. Per quanto visto sulla molteplicità (algebrica), non vi possono essere altri autovettori per ϕ relativi ad r che non siano multipli di v_0.

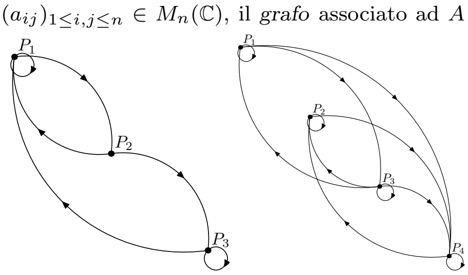
Infine, si osservi che, essendo $v_0 \in \Pi^0$, se fosse $r = 0$, si avrebbe $\phi(v_0) = 0$ e quindi $\phi = 0$, che non sarebbe certamente irriducibile. **CVD** $\square$

Quindi, per matrici irriducibili e ad elementi non-negativi valgono quasi tutti i risultati stabiliti per le matrici positive, con l'eccezione dell'unicità dell'autovalore di modulo massimo. Infatti, la simmetria di matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ in base canonica, è irriducibile, ma ha due autovalori di modulo 1.

Esercizio. Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo soddisfacente alla condizione $\phi(\Pi \smallsetminus \{0\}) \subset \Pi^0$. Si mostri che, dati due vettori v, w in Π, l'angolo tra $\phi(v)$ e $\phi(w)$ è minore o uguale dell'angolo tra v e w e che la disuguaglianza è stretta se v e w non sono linearmente dipendenti.
[**Sugg.** dato $v \in \Pi \smallsetminus \{0\}$, usare la disuguaglianza $0 \le cv \le \phi(v)$ per un opportuno $c > 0$.] $\square$

Irriducibilità e grafo associato ad una matrice. Data una matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{C})$, il *grafo* associato ad A è dato da n vertici, $P_1, \dots, P_n$ e da un cammino orientato da P_i a P_j per ogni entrata $a_{ij} \neq 0$ di A. Il grafo associato ad A si indica talvolta con il simbolo $\Gamma(A)$. Qui a fianco riportiamo come esempio i grafi associati alle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$



Dal grafo di una matrice si possono ottenere informazioni sulla matrice stessa.
Ad esempio una matrice rappresenta un endomorfismo irriducibile se, e solo se, il suo grafo è *fortemente connesso*, ovvero per ogni coppia ordinata di vertici (P_i, P_j) esiste un cammino orientato che parte da P_i ed arriva a P_j (esercizio!). Una matrice che abbia tutte le entrate positive ha chiaramente un grafo fortemente connesso. È fortemente connesso anche il grafo della matrice A, ma non quello della matrice $B = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$, in cui i vertici P_1 e P_3 non sono raggiungibili da P_2 o P_4. Si verifica facilmente che per quest'ultimo endomorfismo il sottospazio $\langle e_1, e_3 \rangle$ è ϕ-stabile.