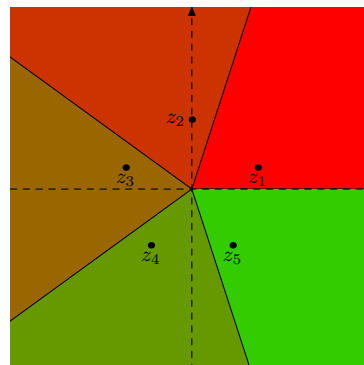


Potenze nel piano complesso

Consideriamo la funzione $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ ove n è un fissato numero intero positivo. Abbiamo già osservato che per ogni numero complesso $w \neq 0$, la sua controimmagine rispetto a questa applicazione è formata da esattamente n numeri complessi, z_1, \dots, z_n , che formano i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine.

In particolare, le formule di de Moivre ci dicono che la restrizione di questa applicazione al sottoinsieme $D_n = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Arg} z < \frac{2\pi}{n}\}$, mette D_n in corrispondenza biunivoca con tutto il piano complesso.

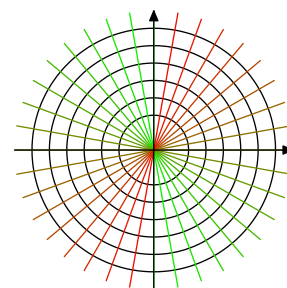
Nella figura qui a fianco si possono vedere le radici quinte, z_1, \dots, z_5 , del numero $2i$. Il settore colorato in rosso rappresenta l'insieme D_5 , descritto sopra ed ognuno dei settori colorati viene mandato dalla funzione $z \mapsto z^5$ su tutto il piano complesso (si suppone che lo 0 appartenga a ciascuno dei settori).



Se ci muovessimo lungo un cerchio per l'origine, di raggio $r > 0$, nel dominio della funzione, le immagini dei punti del cerchio percorrerebbero per cinque volte il cerchio nel codominio di centro l'origine e raggio r^5 .

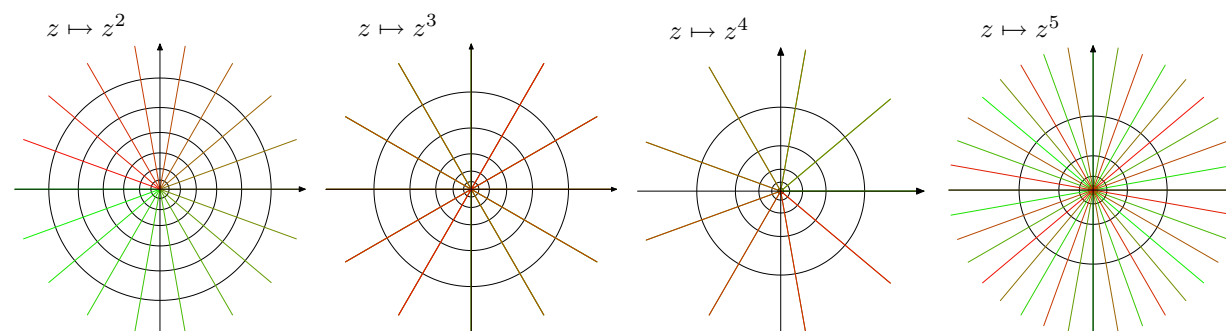
Così come i cerchi per l'origine vengono mandati in cerchi per l'origine, anche le rette per l'origine vengono mandate dall'elevazione a potenza in rette per l'origine, opportunamente ruotate e non più percorse a "velocità costante" (...cosa vuol dire?).

Riportiamo qui sotto cosa accade delle rette e dei cerchi nella figura a fianco ove abbiamo utilizzato colori diversi per cercare di "seguire" le immagini delle rette.



Qui sotto riportiamo i risultati ottenuti applicando le potenze di esponente 2, 3, 4, 5. Avendo tracciato 36 rette ad intervalli regolari, osserviamo subito che per potenze di esponente che divide 36, le immagini di alcune rette vengono a sovrapporsi. Le diverse immagini non sono 'alla stessa scala' per poterle far apparire affiancate. Il fatto che si vedano sempre meno cerchi è dovuto al fatto che il raggio di quelli più piccoli diventa 'impercettibile' rispetto ai più grandi.

Tra l'immagine sopra e quella che rappresenta le potenze quinte, c'è un rapporto di circa 1000 : 1 tra le due unità di misura.



Per disegnare le immagini di rette orizzontali e verticali del piano di Gauss, può essere utile ricordare che, dato $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dalla formula del binomio di Newton si ricava (dimostrarlo!)

$$\Re(z^n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} y^{2k} \quad \text{e} \quad \Im(z^n) = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-2k-1} y^{2k+1}$$

ove $\lfloor r \rfloor = \max \{ m \in \mathbb{Z} \mid m \leq r \}$ indica la *parte intera* del numero reale r .

Ad esempio, nel caso $z \mapsto z^2$, ciò implica gli archi di parabola qui disegnati vengono percorsi due volte in verso opposto (provare a spiegarsi come).

