
Radici quadrate e decomposizione polare di matrici reali

Vogliamo presentare qualche ulteriore costruzione valida per gli endomorfismi dello spazio vettoriale euclideo, \mathbb{R}^n , dotato del consueto prodotto scalare che rende ortonormale la base canonica.

Definizione. Un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice *non-negativo* (o, secondo alcuni, *positivo*), se si ha

$$\phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \phi(v) \cdot v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Definizione. Dato un endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, una *radice quadrata* di ϕ , è un endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\psi^2 = \psi \circ \psi = \phi$.

Analogamente a quanto accade per i numeri reali non-negativi, vedremo che per ogni endomorfismo non-negativo esiste un'unica radice quadrata non-negativa e che ogni endomorfismo dello spazio vettoriale euclideo si decompone nel prodotto di un'isometria per la radice di un endomorfismo non-negativo (analogamente a quanto accade per i numeri complessi che si scrivono nella forma $z = |z|e^{i\theta}$, con $|z| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e l'applicazione $x \mapsto e^{i\theta}x$ è un'isometria del piano di Gauss).

Cominciamo con una caratterizzazione degli endomorfismi non-negativi.

Proposizione. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Sono equivalenti

- (a) ϕ è non-negativo;
- (b) ϕ è simmetrico e tutti i suoi autovalori sono non-negativi;
- (c) ϕ ha una radice quadrata non-negativa;
- (d) ϕ ha una radice quadrata simmetrica;
- (e) esiste un endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\phi = \psi^* \circ \psi$.

dim. (a) \Rightarrow (b). Per definizione, un endomorfismo non-negativo è simmetrico (ovvero $\phi(v) \cdot w = v \cdot \phi(w)$ per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$); quindi i suoi autovalori sono tutti in \mathbb{R} . Sia $\phi(v) = av$, con $\|v\| = 1$; allora, $a = a(v \cdot v) = (av) \cdot v = \phi(v) \cdot v \geq 0$.

(b) \Rightarrow (c). Per il Teorema spettrale, esiste una base ortonormale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di \mathbb{R}^n , di autovettori per ϕ e siano a_1, \dots, a_n gli autovettori corrispondenti. Siano b_1, \dots, b_n numeri reali non-negativi, tali che $b_i^2 = a_i$, per $i = 1, \dots, n$; definiamo l'endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ponendo $\psi(v_i) = b_i v_i$, per $i = 1, \dots, n$. ψ è la radice quadrata non-negativa cercata.

(c) \Rightarrow (d). Ovvio, perché un endomorfismo non-negativo è, in particolare, simmetrico.

(d) \Rightarrow (e). Ovvio.

(e) \Rightarrow (a). Le verifiche sono immediate. Per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\phi(v) \cdot w = \psi^*(\psi(v)) \cdot w = \psi(v) \cdot \psi(w) = v \cdot \psi^*(\psi(w)) = v \cdot \phi(w).$$

Inoltre, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, si ha $\phi(v) \cdot v = \psi^*(\psi(v)) \cdot v = \psi(v) \cdot \psi(v) \geq 0$. **CVD** □

In generale, non c'è alcun motivo perché la radice quadrata di un endomorfismo sia unica e, a questo proposito, possiamo osservare che tutte le simmetrie (ortogonali o meno) $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ soddisfano alla condizione $\sigma^2 = \text{id}$, ovvero sono radici quadrate dell'endomorfismo identico. Per cui, in generale, ci sono infinite radici quadrate di un endomorfismo (ed anche infinite radici simmetriche). Quanto abbiamo visto nella dimostrazione precedente ci permette di dimostrare un risultato di unicità per le radici quadrate *non-negative*.

Corollario. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo non-negativo. Allora ϕ ha un'unica radice quadrata non-negativa.

dim. Sia $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una radice quadrata non-negativa di ϕ . In particolare ψ è un endomorfismo simmetrico e quindi sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di autovettori per ψ ed indichiamo con b_1, \dots, b_n gli autovettori corrispondenti. Quindi, per $i = 1, \dots, n$, si ha $\phi(v_i) = \psi(\psi(v_i)) = b_i^2 v_i$ e perciò, la base data è una base (ortonormale) di autovettori anche per ϕ e, per ogni autovettore, b di ψ , si ha $\ker(\psi - b) = \ker(\phi - b^2)$, essendo tutti gli autovalori di ψ non negativi (quindi $b_i \neq b_j \Rightarrow b_i^2 \neq b_j^2$). Queste condizioni determinano univocamente ψ a partire da ϕ . **CVD** □

Possiamo quindi concludere con la seguente

Proposizione. [Decomposizione polare] Sia $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Allora $\phi = \rho \circ \psi$ dove $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria e ψ è la radice quadrata non-negativa di $\phi^* \circ \phi$.

dim. L'endomorfismo, $\phi^* \circ \phi$ è non-negativo, qualunque sia ϕ ; quindi esiste ed è unica la sua radice quadrata non-negativa. Poiché ψ è un endomorfismo non-negativo e una radice quadrata di $\phi^* \circ \phi$, per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\psi(v) \cdot \psi(v) = \psi(\psi(v)) \cdot v = \phi^*(\phi(v)) \cdot v = \phi(v) \cdot \phi(v).$$

Dalle proprietà del prodotto scalare si deduce che $\ker \psi = \ker \phi$ e possiamo quindi considerare le due applicazioni lineari ristrette al sottospazio $W = \ker \phi^\perp$ ed osservare che ψ induce un endomorfismo invertibile su questo sottospazio ($\psi(W) = W$). Ciò significa che, per ogni vettore $w \in W$, esiste un unico vettore $w' \in W$ tale che $\psi(w') = w$. Poniamo quindi $\rho(w) = \phi(w')$, per ogni $w \in W$; e osserviamo che si ha $\rho(\psi(w')) = \phi(w')$, per ogni $w' \in W$, e

$$\rho(w) \cdot \rho(u) = \phi(w') \cdot \phi(u') = \phi^*(\phi(w')) \cdot u' = \psi(\psi(w')) \cdot u' = \psi(w') \cdot \psi(u') = w \cdot u$$

per ogni coppia di vettori u, w in W ; e quindi ρ è un'isometria tra i sottospazi W e $\text{im} \phi$. Il sottospazio W è un complementare di $\ker \phi$, e quindi $\phi(W) = \text{im} \phi$. Per cui $\ker \phi$ ed $(\text{im} \phi)^\perp$ sono due spazi vettoriali euclidei della stessa dimensione e possiamo chiedere che ρ sia una qualunque fissata isometria tra questi due sottospazi (ad esempio scegliamo una base ortonormale per ciascuno dei due sottospazi e mandiamo ordinatamente i vettori della base di $\ker \phi = \ker \psi$ su quelli della base di $(\text{im} \phi)^\perp$). Così ρ si estende ad un'isometria di \mathbb{R}^n .

Essendo $\mathbb{R}^n = W \oplus \ker \phi$, dato un vettore $v = w + u$, con $w \in W$ ed $u \in \ker \phi$, si ha

$$\rho(\psi(v)) = \rho(\psi(w + u)) = \rho(\psi(w)) = \phi(w) = \phi(w) + \phi(u) = \phi(v)$$

e si ha la decomposizione cercata. **CVD** □

Osserviamo che, nell'enunciato soprastante, l'endomorfismo non-negativo, ψ , è univocamente determinato da ϕ , mentre l'isometria, ρ , è unica se, e solo se, ϕ è invertibile. Invitiamo il lettore a verificare che, se $\phi = \rho \circ \psi$ con ρ isometria e ψ non-negativo, allora $\psi^2 = \phi^* \circ \phi$.

Lasciamo al lettore il compito di dedurre da quanto visto sopra gli analoghi risultati validi per le matrici simmetriche non-negative e le loro radici quadrate non negative.

Tutte le affermazioni si possono facilmente estendere agli endomorfismi dello spazio hermitiano \mathbb{C}^n , con il prodotto scalare hermitiano (standard). Cosa si può dire per gli endomorfismi normali?