Spazio affine metrico Spazio Hermitiano (cenni)

maurizio candilera

October 1, 2019

Introduzione

Fino a questo momento non abbiamo mai preso in considerazione un elemento fondamentale dello spazio euclideo, ovvero il fatto che lo spazio sia *orientato*. Cosa significhi orientare uno spazio vettoriale reale (o più in generale su un campo ordinato) lo abbiamo enunciato nella sezione sui determinanti.

D'ora in poi supporremo di aver fissato un orientamento negli spazi euclidei (sia vettoriali che affini) e distingueremo, se necessario, tra trasformazioni che conservano o invertono l'orientamento. Ad esempio, in uno spazio vettoriale euclideo, solo le trasformazioni ortogonali di determinante 1 (ovvero con matrice in SO_n rispetto a una base ortonormale concorde con l'orientamento) rispettano le lunghezze e l'orientamento, mentre le altre lo invertono.

La prima costruzione che richiede la presenza di un orientamento fissato è il prodotto vettore (cross product) e cominceremo parlando di questo.

Prodotto vettore

Osservazione [prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$]

Sia $V = \mathbb{R}^3$, orientato e dotato dell'usuale prodotto scalare, e siano fissate una forma 3-lineare alternante non nulla, D, e una base ortonormale, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, concorde con l'orientamento. Dati due vettori, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ di V esiste un unico vettore $v \times w$ di V tale che

$$(v \times w) \cdot t = \frac{D(v, w, t)}{D(e_1, e_2, e_3)} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } t \in V.$$

Prodotto vettore

Osservazione [prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$]

Sia $V = \mathbb{R}^3$, orientato e dotato dell'usuale prodotto scalare, e siano fissate una forma 3-lineare alternante non nulla, D, e una base ortonormale, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, concorde con l'orientamento. Dati due vettori, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ di V esiste un unico vettore $v \times w$ di V tale che

$$(v \times w) \cdot t = \frac{D(v, w, t)}{D(e_1, e_2, e_3)} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } t \in V.$$

dim. L'esistenza e l'unicità di $v \times w$, discendono dal fatto che l'applicazione ζ, definita da $\zeta(t) = \frac{D(v,w,t)}{D(e_1,e_2,e_3)}$ è un elemento di V^* (che non dipende né dalla scelta di D, né dalla scelta della base ortonormale concorde $\mathcal{E}$) e che il prodotto scalare definisce un isomorfismo tra V e V^* (vedi la sezione sulla dualità). □

Prodotto vettore

Osservazione [prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$]

Sia $V = \mathbb{R}^3$, orientato e dotato dell'usuale prodotto scalare, e siano fissate una forma 3-lineare alternante non nulla, D, e una base ortonormale, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, concorde con l'orientamento. Dati due vettori, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ di V esiste un unico vettore $v \times w$ di V tale che

$$(v \times w) \cdot t = \frac{D(v, w, t)}{D(e_1, e_2, e_3)} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & t_3 \end{pmatrix}, \quad \text{per ogni } t \in V.$$

dim. L'esistenza e l'unicità di $v \times w$, discendono dal fatto che l'applicazione ζ, definita da $\zeta(t) = \frac{D(v,w,t)}{D(e_1,e_2,e_3)}$ è un elemento di V^* (che non dipende né dalla scelta di D, né dalla scelta della base ortonormale concorde $\mathcal{E}$) e che il prodotto scalare definisce un isomorfismo tra V e V^* (vedi la sezione sulla dualità). □

Dati v e w come sopra, per la formula di Parseval, si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} v \times w &= ((v \times w) \cdot e_1)e_1 + ((v \times w) \cdot e_2)e_2 + ((v \times w) \cdot e_3)e_3 \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3 \end{aligned}}$$

Si noti infine che , per ogni terna di vettori, si ha $(u \times v) \cdot w = (u \cdot (v \times w)) = (w \times u) \cdot v$ [prodotto misto].

Definizione [prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$]

Il *prodotto vettore* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (o *cross product*) è l'applicazione che associa a due vettori, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ di $\mathbb{R}^3$, il vettore $v \times w$ descritto nell'Osservazione precedente.

Definizione [prodotto vettore in $\mathbb{R}^3$]

Il *prodotto vettore* $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (o *cross product*) è l'applicazione che associa a due vettori, $v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ e $w = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ di $\mathbb{R}^3$, il vettore $v \times w$ descritto nell'Osservazione precedente.

Enunciamo e dimostriamo le proprietà di questa nuova operazione.

Presi comunque $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

- $w \times v = -(v \times w)$,
- $(v + w) \times u = v \times u + w \times u$
- $(\lambda v) \times w = \lambda(v \times w) = v \times (\lambda w)$,
- $v \times w = 0$ se, e solo se, v e w sono proporzionali,
- $(v \times w) \cdot v = 0 = (v \times w) \cdot w$; ovvero $v \times w \in \langle v, w\rangle^\perp$,
- $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - (v \cdot w)^2$ (identità di Lagrange),
- se $v \times w \neq 0$, la terna $v, w, v \times w$ è una base di $\mathbb{R}^3$ concorde con l'orientamento fissato.

dim. (*a*) si verifica con un calcolo diretto o ricordando che il segno del determinante cambia se si scambiano due colonne.
(*b*) e (*c*) , si verificano ugualmente con un calcolo diretto o ricordando che il determinante è una funzione multilineare delle colonne. [segue]

[continua].
(d) Sempre ricordando le proprietà del determinante, si ricava che $v \times w = 0$ se v e w sono proporzionali. Viceversa, se $v \times w = 0$, allora v e w devono essere proporzionali, perché se fossero indipendenti esisterebbe un vettore u che li completa a una base di $\mathbb{R}^3$ e allora $(v \times w) \cdot u = \frac{D(v,w,u)}{D(e_1,e_2,e_3)} \neq 0$.
(e) Ancora un calcolo diretto o il fatto che il determinante è una funzione alternante delle colonne, ci permette di verificare che $(v \times w) \cdot v = 0$ e $(v \times w) \cdot w = 0$ e quindi il prodotto vettore è ortogonale ai suoi fattori.
(f) Sia $T \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice che ha come colonne le coordinate di v, w, $v \times w$ rispetto alla base ortonormale concorde $\mathcal{E}$. Allora, per definizione, $\det T = (v \times w) \cdot (v \times w) = \|v \times w\|^2$. Inoltre, ricordando (e), si ha

$$ {}^tTT = \begin{pmatrix} v\cdot v & v\cdot w & 0 \\ w\cdot v & w\cdot w & 0 \\ 0 & 0 & \|v\times w\|^2 \end{pmatrix}. $$

Da cui, passando ai determinanti, si ricava $\|v \times w\|^2 = \det \begin{pmatrix} v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot v & w\cdot w \end{pmatrix}$, ovvero l'identità di Lagrange.
(g) Infine, se il prodotto vettore $v \times w$ è non nullo, v e w sono linearmente indipendenti e $\langle v \times w \rangle = \langle v, w \rangle^\perp$; per cui i tre vettori v, w, $v \times w$, sono una base di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, indicata con $\mathcal{B}$ tale base, si ha

$$ \det \alpha_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{id}_V) = \frac{D(v, w, v \times w)}{D(e_1, e_2, e_3)} = (v \times w) \cdot (v \times w) = \|v \times w\|^2 > 0, $$

perché il prodotto scalare è definito positivo e $v \times w \neq 0$; quindi le due basi sono concordi. □

Una conseguenza dell'identità di Lagrange è la descrizione "geometrica" del prodotto vettore. Dati due vettori non nulli, v e w, si ha $v \cdot w = \|v\|\|w\| \cos \vartheta$, ove $\vartheta = \vartheta(v, w) \in [0, \pi]$ è l'angolo tra i due vettori. Dall'identità di Lagrange, si ricava $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - (v \cdot w)^2 = \|v\|^2\|w\|^2(1 - \cos^2 \vartheta)$, ovvero $\|v \times w\| = \|v\|\|w\| \sin \vartheta$. Dunque, il modulo del prodotto vettore coincide con la misura dell'area del parallelogramma di lati v e w.

Possiamo quindi affermare che il prodotto vettoriale $v \times w$ è l'unico vettore, ortogonale ai fattori, di lunghezza uguale all'area del parallelogramma di lati v e w, e tale che, quando non sia nullo, la terna $v, w, v \times w$ sia concorde con l'orientamento fissato.

N.B. Il prodotto vettore non è associativo. Ad esempio, per ogni base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, si ha $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$ e $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0$.
È invece soddisfatta l'identità di Jacobi: per ogni terna di vettori u, v, w, si ha

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0.$$

La verifica dell'identità di Jacobi è lasciata come esercizio (si possono usare i seguenti risultati).

N.B. Il prodotto vettore non è associativo. Ad esempio, per ogni base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, si ha $e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2$ e $(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0$.
È invece soddisfatta l'identità di Jacobi: per ogni terna di vettori u, v, w, si ha

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0.$$

La verifica dell'identità di Jacobi è lasciata come esercizio (si possono usare i seguenti risultati).

Esercizio : In $\mathbb{R}^3$, siano dati due vettori u, v. Si verifichi che

$$(u \times v) \times u = -(u \cdot v)u + (u \cdot u)v \quad \text{e} \quad (u \times v) \times v = -(v \cdot v)u + (u \cdot v)v.$$

Svolg.: Supponiamo che u e v siano indipendenti (in caso contrario, i due membri dell'uguaglianza sono entrambi nulli). Per costruzione, $(u \times v) \times u$ e $(u \times v) \times v$ appartengono a $\langle u, v\rangle$ (piano ortogonale a $u \times v$) e, essendo g non degenere in $\langle u, v\rangle$, i due vettori coincidono se, e solo se, coincidono i loro prodotti scalari con dei vettori che generano il sottospazio.
È quindi sufficiente osservare che si ha

$$((u \times v) \times u) \cdot u = 0 \quad \text{e} \quad (-(u \cdot v)u + (u \cdot u)v) \cdot u = -(u \cdot v)(u \cdot u) + (u \cdot u)(v \cdot u) = 0;$$

e, applicando le osservazioni sul prodotto misto e l'identità di Lagrange, si ottiene

$$((u \times v) \times u) \cdot v = (u \times v) \cdot (u \times v) = \|u \times v\|^2 = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2 = (-(u \cdot v)u + (u \cdot u)v) \cdot v.$$

L'altra identità si dimostra in modo analogo. $\square$

Esercizio : In $\mathbb{R}^3$ siano dati quattro vettori u, v, w, z. Si verifichi che

(a) $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$.

(b) $(u \times v) \cdot (w \times z) = (u \cdot w)(v \cdot z) - (v \cdot w)(u \cdot z)$.

Svolg.: (*a*) . Supponiamo che u e v siano indipendenti (in caso contrario, i due membri dell'uguaglianza sono entrambi nulli) e osserviamo che, per costruzione, $(u \cdot w)v - (v \cdot w)u$ è ortogonale sia a $u \times v$ che a w. Quindi i due membri dell'uguaglianza sono vettori paralleli. Inoltre, applicando ripetutamente l'identità di Lagrange, si ha

$$\|(u \times v) \times w\|^2 = (u \cdot u)(v \cdot v)(w \cdot w) - (u \cdot v)^2(w \cdot w) - ((u \times v) \cdot w)^2.$$

D'altra parte

$$\|(u \cdot w)v - (v \cdot w)u\|^2 = (u \cdot w)^2(v \cdot v) - 2(u \cdot v)(u \cdot w)(v \cdot w) + (u \cdot u)(v \cdot w)^2,$$

e la differenza tra le due norme è quindi

$$\|(u \times v) \times w\|^2 - \|(u \cdot w)v - (v \cdot w)u\|^2 = \det \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} - ((u \times v) \cdot w)^2.$$

Questa differenza si annulla, perché, detta P la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori u, v e w rispetto a una base ortonormale concorde, si ha

$$(u \times v) \cdot w = \det P \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} u \cdot u & u \cdot v & u \cdot w \\ v \cdot u & v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot u & w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} = {}^tPP.$$

[segue]

[continua].
Resta quindi da verificare che i due vettori sono concordi, ovvero che

$$((u \times v) \times w) \cdot ((u \cdot w)v - (v \cdot w)u) > 0.$$

Ricordando l'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned} ((u \times v) \times w) \cdot ((u \cdot w)v - (v \cdot w)u) &= -(w \cdot ((u \times v) \times ((u \cdot w)v - (v \cdot w)u)) \\ &= -(w \cdot ((u \cdot w)(u \times v) \times v - (v \cdot w)(u \times v) \times u) \\ &= -(u \cdot w)(u \cdot v)(v \cdot w) + (v \cdot v)(u \cdot w)^2 + (u \cdot u)(v \cdot w)^2 - (u \cdot w)(u \cdot v)(v \cdot w). \end{aligned}$$

Possiamo dividere tutti i termini per $(\|u\|\|v\|\|w\|)^2$, ovvero supporre che i tre vettori abbiano norma 1.
Ricordando la disuguaglianza di Schwarz ($|u \cdot v| < \|u\|\|v\| = 1$), si ottiene

$$\begin{aligned} &(u \cdot w)^2 + (v \cdot w)^2 - 2(u \cdot v)(u \cdot w)(v \cdot w) \\ &\qquad > (u \cdot w)^2 + (v \cdot w)^2 \pm 2(u \cdot w)(v \cdot w) = ((u \cdot w) \pm (v \cdot w))^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ciò conclude la verifica della prima parte.

(b) . Per quanto visto nel punto precedente, e la definizione del prodotto vettore, si ha

$$(u \times v) \cdot (w \times z) = ((u \times v) \times w) \cdot z = ((u \cdot w)v - (v \cdot w)u) \cdot z,$$

che è quanto volevamo. □

Esercizio : Siano v e x due vettori di $\mathbb{R}^3$, con $\|v\| = 1$ e $x \notin \langle v \rangle$.

(a) Si verifichi che $(v \times x) \times v = v \times (x \times v)$ e si dimostri che $x = (v \times x) \times v + (v \cdot x)v$.

(b) Si dimostri che $\|v \times x\| = \|(v \times x) \times v\|$ e che i tre vettori $(v \times x) \times v$, $v \times x$ e v (nell'ordine) formano una base ortogonale concorde con la base canonica.

(c) Si dimostri che $\rho(x) = \cos\vartheta(v \times x) \times v + \sin\vartheta v \times x + (v \cdot x)v$ è il vettore che si ottiene ruotando x attorno alla retta $\langle v \rangle$ di un angolo ϑ.

Esercizio : Siano v e x due vettori di $\mathbb{R}^3$, con $\|v\| = 1$ e $x \notin \langle v \rangle$.

(a) Si verifichi che $(v \times x) \times v = v \times (x \times v)$ e si dimostri che $x = (v \times x) \times v + (v \cdot x)v$.

(b) Si dimostri che $\|v \times x\| = \|(v \times x) \times v\|$ e che i tre vettori $(v \times x) \times v$, $v \times x$ e v (nell'ordine) formano una base ortogonale concorde con la base canonica.

(c) Si dimostri che $\rho(x) = \cos\vartheta(v \times x) \times v + \sin\vartheta v \times x + (v \cdot x)v$ è il vettore che si ottiene ruotando x attorno alla retta $\langle v \rangle$ di un angolo ϑ.

Svolg.: (*a*) Si ha $(v \times x) \times v = -v \times (v \times x) = v \times (x \times v)$; quindi possiamo togliere le parentesi anche se il prodotto non è associativo. Dal punto (a) dell'Esercizio precedente, si ottiene
$(v \times x) \times v = (v \cdot v)x - (x \cdot v)v$; e ricordando che $\|v\| = 1$, si può concludere.

Esercizio : Siano v e x due vettori di $\mathbb{R}^3$, con $\|v\| = 1$ e $x \notin \langle v \rangle$.

(a) Si verifichi che $(v \times x) \times v = v \times (x \times v)$ e si dimostri che $x = (v \times x) \times v + (v \cdot x)v$.

(b) Si dimostri che $\|v \times x\| = \|(v \times x) \times v\|$ e che i tre vettori $(v \times x) \times v$, $v \times x$ e v (nell'ordine) formano una base ortogonale concorde con la base canonica.

(c) Si dimostri che $\rho(x) = \cos\vartheta(v \times x) \times v + \sin\vartheta v \times x + (v \cdot x)v$ è il vettore che si ottiene ruotando x attorno alla retta $\langle v \rangle$ di un angolo ϑ.

Svolg.: (*a*) Si ha $(v \times x) \times v = -v \times (v \times x) = v \times (x \times v)$; quindi possiamo togliere le parentesi anche se il prodotto non è associativo. Dal punto (a) dell'Esercizio precedente, si ottiene
$(v \times x) \times v = (v \cdot v)x - (x \cdot v)v$; e ricordando che $\|v\| = 1$, si può concludere.
(*b*) I due vettori hanno lo stesso modulo perché v e $v \times x$ sono ortogonali e $\|v\| = 1$ (identità di Lagrange). Se $x \notin \langle v \rangle$, i tre vettori sono non nulli e ortogonali a due a due, per le proprietà del prodotto vettoriale. Per lo stesso motivo i tre vettori (nell'ordine dato) sono concordi con la base canonica; infatti, il determinante del cambiamento di base è uguale a $(v \times x \times v) \cdot (v \times x \times v) > 0$.

Esercizio : Siano v e x due vettori di $\mathbb{R}^3$, con $\|v\| = 1$ e $x \notin \langle v \rangle$.

(a) Si verifichi che $(v \times x) \times v = v \times (x \times v)$ e si dimostri che $x = (v \times x) \times v + (v \cdot x)v$.

(b) Si dimostri che $\|v \times x\| = \|(v \times x) \times v\|$ e che i tre vettori $(v \times x) \times v$, $v \times x$ e v (nell'ordine) formano una base ortogonale concorde con la base canonica.

(c) Si dimostri che $\rho(x) = \cos\vartheta(v \times x) \times v + \sin\vartheta v \times x + (v \cdot x)v$ è il vettore che si ottiene ruotando x attorno alla retta $\langle v \rangle$ di un angolo ϑ.

Svolg.: (*a*) Si ha $(v \times x) \times v = -v \times (v \times x) = v \times (x \times v)$; quindi possiamo togliere le parentesi anche se il prodotto non è associativo. Dal punto (a) dell'Esercizio precedente, si ottiene
$(v \times x) \times v = (v \cdot v)x - (x \cdot v)v$; e ricordando che $\|v\| = 1$, si può concludere.
(*b*) I due vettori hanno lo stesso modulo perché v e $v \times x$ sono ortogonali e $\|v\| = 1$ (identità di Lagrange). Se $x \notin \langle v \rangle$, i tre vettori sono non nulli e ortogonali a due a due, per le proprietà del prodotto vettoriale. Per lo stesso motivo i tre vettori (nell'ordine dato) sono concordi con la base canonica; infatti, il determinante del cambiamento di base è uguale a $(v \times x \times v) \cdot (v \times x \times v) > 0$.
(*c*) In base a quanto visto nei punti precedenti, si può affermare che x e $\rho(x)$ hanno la stessa componente lungo la semiretta generata da v. Inoltre le proiezioni sul piano ortogonale, $\langle (v \times x) \times v, v \times x \rangle$, risultano ruotate di un angolo ϑ. □

Esercizio : Siano v e x due vettori di $\mathbb{R}^3$, con $\|v\| = 1$ e $x \notin \langle v \rangle$.

(a) Si verifichi che $(v \times x) \times v = v \times (x \times v)$ e si dimostri che $x = (v \times x) \times v + (v \cdot x)v$.

(b) Si dimostri che $\|v \times x\| = \|(v \times x) \times v\|$ e che i tre vettori $(v \times x) \times v$, $v \times x$ e v (nell'ordine) formano una base ortogonale concorde con la base canonica.

(c) Si dimostri che $\rho(x) = \cos\vartheta(v \times x) \times v + \sin\vartheta v \times x + (v \cdot x)v$ è il vettore che si ottiene ruotando x attorno alla retta $\langle v \rangle$ di un angolo ϑ.

Svolg.: (*a*) Si ha $(v \times x) \times v = -v \times (v \times x) = v \times (x \times v)$; quindi possiamo togliere le parentesi anche se il prodotto non è associativo. Dal punto (a) dell'Esercizio precedente, si ottiene
$(v \times x) \times v = (v \cdot v)x - (x \cdot v)v$; e ricordando che $\|v\| = 1$, si può concludere.
(*b*) I due vettori hanno lo stesso modulo perché v e $v \times x$ sono ortogonali e $\|v\| = 1$ (identità di Lagrange). Se $x \notin \langle v \rangle$, i tre vettori sono non nulli e ortogonali a due a due, per le proprietà del prodotto vettoriale. Per lo stesso motivo i tre vettori (nell'ordine dato) sono concordi con la base canonica; infatti, il determinante del cambiamento di base è uguale a $(v \times x \times v) \cdot (v \times x \times v) > 0$.
(*c*) In base a quanto visto nei punti precedenti, si può affermare che x e $\rho(x)$ hanno la stessa componente lungo la semiretta generata da v. Inoltre le proiezioni sul piano ortogonale, $\langle (v \times x) \times v, v \times x \rangle$, risultano ruotate di un angolo ϑ. $\square$

Per $n > 3$, si può estendere il cross product a un operazione su $\mathbb{R}^n$ (euclideo e orientato) che a $n-1$ vettori, $w_1, \dots, w_{n-1}$, associa quell'unico vettore $w_1 \times \cdots \times w_{n-1}$ per cui si ha

$$(w_1 \times \cdots \times w_{n-1}) \cdot v = \frac{D(w_1, \dots, w_{n-1}, v)}{D(e_1, \dots, e_n)}, \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n;$$

ove $0 \neq D \in A^n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale concorde.

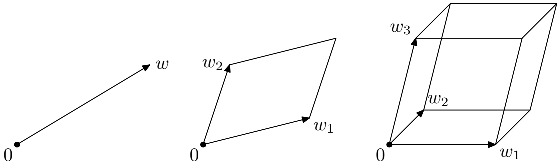
Parallelepipedi e simplessi

Richiamiamo rapidamente alcune definizioni:

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano dati k vettori (linearmente indipendenti), $w_1, \dots, w_k$ di V. Il *parallelepipedo* di lati $w_1, \dots, w_k$ è il sottoinsieme di V

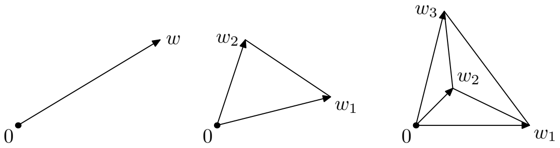
$$PL(w_1, \dots, w_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \;\middle|\; a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k \right\}.$$



Definizione

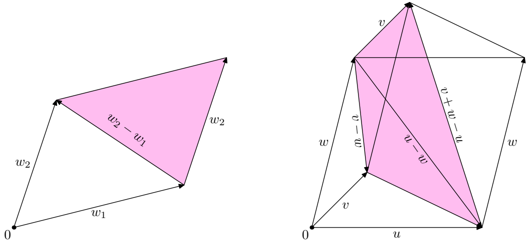
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano dati k vettori (linearmente indipendenti), $w_1, \dots, w_k$ di V. Il *simplesso* di lati $w_1, \dots, w_k$ è il sottoinsieme di V

$$\Delta(w_1, \dots, w_k) = \\ = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \,\middle|\, a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k,\ a_1 + \cdots + a_k \leq 1 \right\}.$$



Il parallelepipedo $PL(w_1, \ldots, w_k)$ si decompone nell'unione di $k!$ simplessi, aventi a due a due in comune al più una "faccia".

- Per $k = 1$, si ha $PL(w) = \Delta(w)$.
- Per $k = 2$, si ha $PL(w_1, w_2) = \Delta(w_1, w_2) \cup \Delta(w_2, w_2 - w_1)$.
- Per $k = 3$, si ha $PL(u, v, w) = 2(\Delta(u, v, w) \cup \Delta(w - u, w, v + w - u) \cup \Delta(v, u - w, v - w))$.



Si noti che abbiamo disegnato solo *metà* del parallelepipedo tridimensionale, ovvero solo il *prisma* che ha come base il simplesso di dimensione più piccola, e abbiamo aggiunto il fattore 2 nella decomposizione del prisma, considerando il contributo al parallelepipedo dato dalla parte "simmetrica" che è stata cancellata.
Il lettore è invitato a generalizzare la decomposizione a dimensioni superiori (Prop. 5.5.11 del libro).

Volume n-dimensionale

Nello spazio euclideo parallelepipedi e simplessi sono insiemi di punti. Gli insiemi di vettori definiti in precedenza si possono pensare applicati a qualsiasi punto dello spazio (e non solo nell'origine). Ad esempio, il simplesso di dimensione k determinato dai punti $P_0, \dots, P_k$, in posizione generale è

$$\begin{aligned}\Delta(P_0, \dots, P_k) &= \left\{ P_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(P_i - P_0) \,\middle|\, a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k,\ a_1 + \dots + a_k \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^{k} c_i P_i \,\middle|\, c_i \geq 0,\ i = 0, \dots, k,\ c_0 + \dots + c_k = 1 \right\}.\end{aligned}$$

Cambiando l'ordine dei punti, non varia il simplesso da essi determinato (varia invece il parallelepipedo).

Definizione [volume n-dimensionale]

Dati i vettori $w_1, \dots, w_n$ in $\mathbb{R}^n$ (euclideo orientato), il *volume orientato* del parallelepipedo $PL(w_1, \dots, w_n)$ è

$$\mathrm{Vol}(PL(w_1, \dots, w_n)) := \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(e_1, \dots, e_n)}$$

ove $0 \neq D \in A^n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale concorde con l'orientamento fissato. Il valore assoluto $|\mathrm{Vol}(PL(w_1, \dots, w_n))|$ è il *volume non-orientato* del parallelepipedo.

Date due basi ordinate ortonormali e concordi, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, il volume non dipende dalla scelta della base. Infatti si ha

$$\mathrm{Vol}(PL(w_1, \dots, w_n)) = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}$$

poiché per due basi ortonormali concordi, si ha $\frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = 1$.
La nozione di volume n-dimensionale è quindi indipendente dalla scelta della base (ortonormale concorde).

Date due basi ordinate ortonormali e concordi, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, il volume non dipende dalla scelta della base. Infatti si ha

$$\text{Vol}(PL(w_1, \dots, w_n)) = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}$$

poiché per due basi ortonormali concordi, si ha $\frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(e_1, \dots, e_n)} = 1$.
La nozione di volume n-dimensionale è quindi indipendente dalla scelta della base (ortonormale concorde).

Definizione [volume del simplesso]

Dati i vettori $w_1, \dots, w_n$ in $\mathbb{R}^n$ (euclideo orientato), il *volume orientato* del simplesso $\Delta(w_1, \dots, w_n)$ è

$$\text{Vol}(\Delta(w_1, \dots, w_n)) := \frac{1}{n!} \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(e_1, \dots, e_n)}.$$

ove $0 \neq D \in A^n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale concorde con l'orientamento fissato. Il valore assoluto $|\text{Vol}(\Delta(w_1, \dots, w_n))|$ è il *volume non-orientato* del simplesso.

Le due definizioni sono coerenti, ovvero i simplessi che compaiono nella decomposizione del parallelepipedo sono $n!$ e hanno tutti lo stesso volume. Facciamo vedere questo fatto per dimensione ≤ 3, lasciando al lettore le necessarie generalizzazioni.

- In dimensione 1 non c'è niente da dimostrare, perché parallelepipedo e simplesso coincidono.
- In dimensione 2, si ha $PL(w_1, w_2) = \Delta(w_1, w_2) \cup \Delta(w_2, w_2 - w_1)$ e

$$|\mathrm{Vol}(\Delta(w_1, w_2))| + |\mathrm{Vol}(\Delta(w_2, w_2 - w_1))| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(e_1, e_2)}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_2, w_2 - w_1)}{D(e_1, e_2)}\right| = \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(e_1, e_2)}\right|$$

per multilinearità e alternanza di D.

- Analogo calcolo nel caso tridimensionale, ove metà del parallelepipedo $PL(u, v, w)$ è uguale a $\Delta(u, v, w) \cup \Delta(v, u - w, v - w) \cup \Delta(w - u, w, v + w - u)$. Infatti, sempre per multilinearità e alternanza di D, si ha

$$\frac{1}{6}\left|\frac{D(u, v, w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| + \frac{1}{6}\left|\frac{D(v, u - w, v - w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| + \frac{1}{6}\left|\frac{D(w - u, w, v + w - u)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(u, v, w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right|.$$

In entrambo i casi, con i lati scelti in quest'ordine, l'uguaglianza è vera a prescindere dal valore assoluto.

- In dimensione 1 non c'è niente da dimostrare, perché parallelepipedo e simplesso coincidono.
- In dimensione 2, si ha $PL(w_1, w_2) = \Delta(w_1, w_2) \cup \Delta(w_2, w_2 - w_1)$ e

$$|\mathrm{Vol}(\Delta(w_1, w_2))| + |\mathrm{Vol}(\Delta(w_2, w_2 - w_1))| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(e_1, e_2)}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_2, w_2 - w_1)}{D(e_1, e_2)}\right| = \left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(e_1, e_2)}\right|$$

  per multilinearità e alternanza di D.
- Analogo calcolo nel caso tridimensionale, ove metà del parallelepipedo $PL(u, v, w)$ è uguale a $\Delta(u, v, w) \cup \Delta(v, u - w, v - w) \cup \Delta(w - u, w, v + w - u)$. Infatti, sempre per multilinearità e alternanza di D, si ha

$$\frac{1}{6}\left|\frac{D(u, v, w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| + \frac{1}{6}\left|\frac{D(v, u - w, v - w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| + \frac{1}{6}\left|\frac{D(w - u, w, v + w - u)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(u, v, w)}{D(e_1, e_2, e_3)}\right|.$$

  In entrambo i casi, con i lati scelti in quest'ordine, l'uguaglianza è vera a prescindere dal valore assoluto.

L'identità di Lagrange nello spazio euclideo tridimensionale, dice che il quadrato dell'area del parallelogramma di lati i vettori v e w coincide con

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2\|w\|^2 - (v \cdot w)^2 = \det\begin{pmatrix} v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot v & w\cdot w \end{pmatrix}.$$

La formula si generalizza per simplessi k-dimensionali nello spazio di dimensione n.

Definizione [volume k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$]

Siano $w_1, \dots, w_k$ vettori di $\mathbb{R}^n$, con $1 \leq k \leq n$. Il *volume* (non-orientato) del simplesso $\Delta(w_1, \dots, w_k)$ è

$$\mathit{vol}^k\left(\Delta(w_1, \dots, w_k)\right) = \frac{1}{k!}\sqrt{\det\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & \dots & w_1 \cdot w_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_k \cdot w_1 & \dots & w_k \cdot w_k \end{pmatrix}}.$$

Definizione [volume k-dimensionale in $\mathbb{R}^n$]

Siano $w_1, \dots, w_k$ vettori di $\mathbb{R}^n$, con $1 \le k \le n$. Il *volume* (non-orientato) del simplesso $\Delta(w_1, \dots, w_k)$ è

$$\mathit{vol}^k\left(\Delta(w_1, \dots, w_k)\right) = \frac{1}{k!}\sqrt{\det\begin{pmatrix} w_1 \cdot w_1 & \dots & w_1 \cdot w_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_k \cdot w_1 & \dots & w_k \cdot w_k \end{pmatrix}}.$$

Esempio Nello spazio $\mathbb{R}^5$ (euclideo e orientato) con riferimento ortonormale, si considerino i punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Si determinino l'area del triangolo $P_1P_2P_3$ e il volume del parallelepipedo $PL(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Svolg.: Il triangolo $P_1P_2P_3$ è il simplesso $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ e la sua area, A, è il volume 2-dimensionale del simplesso. Sia T la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P_2 - P - 1$ e $P_3 - P_1$ (nella base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_5\}$ del riferimento dato su $\mathbb{R}^5$), l'area è
$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tTT)} = \frac{1}{2}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{94}}{2}$.
Analogamente, se S è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $P_2 - P - 1$, $P_3 - P_1$ e $P_4 - P_1$, il volume del parallelepipedo è $\sqrt{\det({}^tSS)} = \sqrt{\det\begin{pmatrix} 13 & 7 & 0 \\ 7 & 11 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}} = \sqrt{71}$. □

Spazio affine metrico

Chiameremo spazio metrico euclideo e lo indicheremo con $E^n(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}^n)$ (o, più semplicemente, $\mathbb{E}^n$) lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, ove lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sia orientato e dotato del prodotto scalare usuale. Salvo diverso avviso, nei riferimenti si useranno solo basi ortonormali, concordi con l'orientamento.

Il prodotto scalare permette quindi di introdurre in $\mathbb{E}^n$ la distanza tra coppie di punti, ponendo per definizione $d(P, Q) = \|Q - P\|$, per ogni coppia di punti P e Q. Inoltre, tramite la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, possiamo misurare gli angoli (non orientati) tra vettori e definire l'angolo orientato, fissando un orientamento sul piano che contiene i due vettori.

Spazio affine metrico

Chiameremo spazio metrico euclideo e lo indicheremo con $E^n(\mathbb{R}) = E(\mathbb{R}^n)$ (o, più semplicemente, $\mathbb{E}^n$) lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^n)$, ove lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ sia orientato e dotato del prodotto scalare usuale. Salvo diverso avviso, nei riferimenti si useranno solo basi ortonormali, concordi con l'orientamento.

Il prodotto scalare permette quindi di introdurre in $\mathbb{E}^n$ la distanza tra coppie di punti, ponendo per definizione $d(P, Q) = \|Q - P\|$, per ogni coppia di punti P e Q. Inoltre, tramite la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, possiamo misurare gli angoli (non orientati) tra vettori e definire l'angolo orientato, fissando un orientamento sul piano che contiene i due vettori.

Possiamo definire anche la distanza tra sottoinsiemi non vuoti A e B dello spazio euclideo, ponendo

$$d(A, B) = \inf \{ \, d(X, Y) \mid X \in A, Y \in B \, \} \, .$$

Nel caso della distanza tra sottovarietà lineari, l'estremo inferiore è in realtà un minimo, ovvero esistono coppie di *punti di minima distanza* tra le due sottovarietà.

Punti di minima distanza

Proposizione

Siano $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = Q + V_{\mathbb{M}}$ sottovarietà lineari dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$. Allora esistono dei punti $P_0 \in \mathbb{L}$ e $Q_0 \in \mathbb{M}$ tali che il vettore $P_0 - Q_0$ sia ortogonale sia a $V_{\mathbb{L}}$ che a $V_{\mathbb{M}}$. Per tali coppie (P_0, Q_0) si ha

$$d(P_0, Q_0) = \min \{ \, d(X, Y) \mid X \in \mathbb{L}, Y \in \mathbb{M} \, \} = d(\mathbb{L}, \mathbb{M}).$$

dim. Se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti, sia $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, allora la coppia (P_0, P_0) è di minima distanza e il vettore $0 = P_0 - P_0$ è ortogonale a ogni altro vettore di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$, il vettore $Q - P$ non appartiene a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$. Per il teorema di decomposizione ortogonale, $\mathbb{R}^n = (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) \oplus (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$ e

$$Q - P = v_0 + w_0 + n, \quad \text{con } v_0 \in V_{\mathbb{L}}, \; w_0 \in V_{\mathbb{M}}, \; n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}.$$

Presi $P_0 = P + v_0 \in \mathbb{L}$, $Q_0 = Q - w_0 \in \mathbb{M}$, si ha $Q_0 - P_0 = n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$.

Punti di minima distanza

Proposizione

Siano $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = Q + V_{\mathbb{M}}$ sottovarietà lineari dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$. Allora esistono dei punti $P_0 \in \mathbb{L}$ e $Q_0 \in \mathbb{M}$ tali che il vettore $P_0 - Q_0$ sia ortogonale sia a $V_{\mathbb{L}}$ che a $V_{\mathbb{M}}$. Per tali coppie (P_0, Q_0) si ha

$$d(P_0, Q_0) = \min \{ \, d(X, Y) \mid X \in \mathbb{L}, Y \in \mathbb{M} \, \} = d(\mathbb{L}, \mathbb{M}).$$

dim. Se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti, sia $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, allora la coppia (P_0, P_0) è di minima distanza e il vettore $0 = P_0 - P_0$ è ortogonale a ogni altro vettore di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$, il vettore $Q - P$ non appartiene a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$. Per il teorema di decomposizione ortogonale, $\mathbb{R}^n = (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) \oplus (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$ e

$$Q - P = v_0 + w_0 + n, \quad \text{con } v_0 \in V_{\mathbb{L}}, \; w_0 \in V_{\mathbb{M}}, \; n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}.$$

Presi $P_0 = P + v_0 \in \mathbb{L}$, $Q_0 = Q - w_0 \in \mathbb{M}$, si ha $Q_0 - P_0 = n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$.
Per ogni coppia di punti $X = P_0 + v \in \mathbb{L}$ e $Y = Q_0 + w \in \mathbb{M}$, si ha

$$\|Y - X\|^2 = \|(Q_0 - P_0) + w - v\|^2 = \|n + (w - v)\|^2 = \|n\|^2 + \|(w - v)\|^2,$$

perché n è ortogonale a $w - v \in V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$. Dunque $\|Y - X\|^2 \geq \|n\|^2 = \|Q_0 - P_0\|^2$ e si conclude. $\square$

Punti di minima distanza

Proposizione

Siano $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = Q + V_{\mathbb{M}}$ sottovarietà lineari dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$. Allora esistono dei punti $P_0 \in \mathbb{L}$ e $Q_0 \in \mathbb{M}$ tali che il vettore $P_0 - Q_0$ sia ortogonale sia a $V_{\mathbb{L}}$ che a $V_{\mathbb{M}}$. Per tali coppie (P_0, Q_0) si ha

$$d(P_0, Q_0) = \min \{ \, d(X, Y) \mid X \in \mathbb{L}, Y \in \mathbb{M} \, \} = d(\mathbb{L}, \mathbb{M}).$$

dim. Se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti, sia $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, allora la coppia (P_0, P_0) è di minima distanza e il vettore $0 = P_0 - P_0$ è ortogonale a ogni altro vettore di $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$, il vettore $Q - P$ non appartiene a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$. Per il teorema di decomposizione ortogonale, $\mathbb{R}^n = (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) \oplus (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$ e

$$Q - P = v_0 + w_0 + n, \quad \text{con } v_0 \in V_{\mathbb{L}},\ w_0 \in V_{\mathbb{M}},\ n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}.$$

Presi $P_0 = P + v_0 \in \mathbb{L}$, $Q_0 = Q - w_0 \in \mathbb{M}$, si ha $Q_0 - P_0 = n \in (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}})^{\perp}$.
Per ogni coppia di punti $X = P_0 + v \in \mathbb{L}$ e $Y = Q_0 + w \in \mathbb{M}$, si ha

$$\|Y - X\|^2 = \|(Q_0 - P_0) + w - v\|^2 = \|n + (w - v)\|^2 = \|n\|^2 + \|(w - v)\|^2,$$

perché n è ortogonale a $w - v \in V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$. Dunque $\|Y - X\|^2 \geq \|n\|^2 = \|Q_0 - P_0\|^2$ e si conclude. $\square$

Si osservi che vi è un'unica coppia di minima distanza (P_0, Q_0) se, e solo se, $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle 0 \rangle$. Altrimenti sono di minima distanza tutte le coppie $(P_0 + w, Q_0 + w)$, al variare di $w \in V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}$.

Esempio Nello spazio $\mathbb{E}^4$, col riferimento (ortonormale) $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$, si determinino la distanza e i punti di minima distanza tra le sottovarietà lineari

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r = O + e_2 - 2e_4 + \langle e_2 + 2e_4 \rangle .$$

Svolg.: Il piano π passa per $P = O + 2e_1$ ed ha sottospazio direttore $V_\pi = \langle e_1 - e_4, 2e_1 + e_2 + e_3 \rangle$. La retta r passa per $Q = O + e_2 + 2e_4$ e il sottospazio direttore è $\langle e_2 + 2e_4 \rangle$; quindi per calcolare la distanza tra π e r dobbiamo determinare la lunghezza della proiezione ortogonale di $P - Q = 2e_1 - e_2 + 2e_4$ sul sottospazio $\langle e_1 - e_4, 2e_1 + e_2 + e_3, e_2 + 2e_4 \rangle^\perp = \langle n \rangle$, ove $n = e_1 - 2e_2 + e_4$. Dunque

$$d(\pi, r) = \frac{|(P - Q) \cdot n|}{\sqrt{n \cdot n}} = \sqrt{6}.$$

La proiezione ortogonale di $P - Q$ sulla somma dei sottospazi direttori $V_\pi \oplus V_r$ (si noti che $V_\pi \cap V_r = \langle 0 \rangle$ perché $e_2 + 2e_4$ non soddisfa il sistema omogeneo associato alle equazioni di π) è uguale a

$$(P - Q) - \frac{(P - Q) \cdot n}{n \cdot n} n = e_1 + e_2 + e_4 = v_0 + w_0, \quad \text{con } v_0 = e_1 - e_4 \in V_\pi, \text{ e } w_0 = e_2 + 2e_4 \in V_r.$$

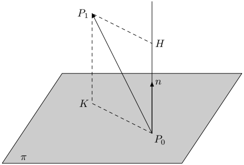
Dunque, l'unica coppia di minima distanza è data dai punti (P_0, Q_0), ove $P_0 = P - v_0 = O + e_1 + e_4$ e $Q_0 = Q + w_0 = O + 2e_2$. □

Distanze in $\mathbb{E}^3$

Ricordiamo qui alcune semplici formule per calcolare la distanza tra sottovarietà lineari dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$. Coordinate ed equazioni si intendono sempre espresse in un riferimento ortonormale (concorde).

Distanza di un punto da un piano Sia $\pi : aX + bY + cZ = d$ l'equazione cartesiana di un piano in $\mathbb{E}^3$ e sia $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ un punto del piano. Si ha quindi $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$. Inoltre, un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene al piano se, e solo se, il vettore $X - P_0 = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$ soddisfa alla condizione $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$; ovvero è ortogonale al vettore $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Dunque, la distanza del punto $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dal piano π è uguale alla norma della proiezione ortogonale del vettore $P_1 - P_0$ sul sottospazio $\langle n \rangle$, ovvero

$$d(P_1, \pi) = \left\| \frac{n \cdot (P_1 - P_0)}{n \cdot n} n \right\| = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

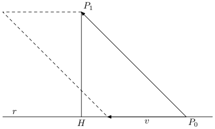


Questa formula può essere usata per calcolare la distanza tra due piani o tra una retta e un piano, tra loro paralleli.

Si osservi infine che si potrebbe scrivere una formula analoga per la distanza di un punto da un iperpiano di cui sia data l'equazione cartesiana nello spazio $\mathbb{E}^n$, qualunque sia la dimensione $n \geq 2$.

Distanza di un punto da una retta Si consideri la retta $r = P_0 + \langle v \rangle$ e sia P_1 un punto dello spazio $\mathbb{E}^3$. La distanza di P_1 da r è la distanza di P_1 dalla sua proiezione ortogonale sulla retta r (cf. il disegno sotto). Quindi, considerando il punto $H = p_r(P_1)$ e il triangolo rettangolo $P_0 H P_1$, la distanza $d(P_1, r)$ è uguale alla lunghezza del cateto $P_1 H$; ovvero

$$d(P_1, r) = \sqrt{\|P_1 - P_0\|^2 - \left\| \frac{v \cdot (P_1 - P_0)}{v \cdot v} v \right\|^2} = \sqrt{\|P_1 - P_0\|^2 - \frac{|v \cdot (P_1 - P_0)|^2}{v \cdot v}}.$$



Si osservi che la formula si generalizza senza alcuna variazione per misurare la distanza tra un punto e una retta nello spazio euclideo E^n, qualunque sia la dimensione n.

Si osservi inoltre che la distanza $\delta_0(P_1, r) = \delta_0(P_1, H)$ è anche uguale all'altezza, relativa alla base v, del parallelogramma di lati $P_1 - P_0$ e v e quindi possiamo ottenere $d(P_1, r)$ come rapporto tra la misura dell'area del parallelogramma e la lunghezza del lato v. Possiamo quindi scrivere nello spazio tridimensionale

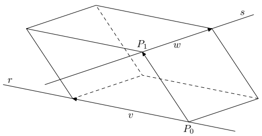
$$d(P_1, r) = \frac{\|(P_1 - P_0) \times v\|}{\|v\|} \qquad \left[\text{e } d(P_1, r) = \frac{\mathit{vol}^2\,(PL(P_1 - P_0, v))}{\|v\|} \text{ in dimensione qualunque} \right].$$

Entrambo le formule precedenti possono essere usate per calcolare la distanza tra due rette parallele.

Distanza tra due rette non parallele Si considerino in $\mathbb{E}^3$ le rette $r = P_0 + \langle v \rangle$ e $s = P_1 + \langle w \rangle$, con $\langle v \rangle \neq \langle w \rangle$.

La distanza di r da s è la lunghezza della proiezione ortogonale del vettore $P_1 - P_0$ lungo un sottospazio ortogonale ad entrambo le rette. Ricordando che il prodotto vettore $v \times w$ genera il sottospazio $\langle v, w \rangle^{\perp}$, possiamo quindi scrivere

$$d(r, s) = \frac{|(P_1 - P_0) \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|}.$$



Per la definizione di prodotto vettore, il numeratore è uguale al volume (non orientato) del parallelepipedo di lati $P_1 - P_0$, v e w, e, per l'identità di Lagrange, il denominatore è uguale all'area del parallelogramma di lati v e w. Possiamo usare il rapporto tra queste due grandezze per misurare la distanza tra due rette (non parallele) nello spazio euclideo di dimensione qualunque. Dunque

$$d(r, s) = \frac{\mathit{vol}^3\left(PL(P_1 - P_0, v, w)\right)}{\mathit{vol}^2\left(PL(v, w)\right)}.$$

Il lettore ora deve familiarizzarsi e usare ripetutamente le formule proposte, ma soprattutto, dovrebbe ricordarne la descrizione geometrica, in modo da poterle applicare anche in situazioni più generali.

Esercizio Nello spazio $\mathbb{E}^4$, col riferimento (ortonormale) $\mathscr{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$, si considerino le rette $r = O + e_3 + e_4 + \langle e_1 - e_2 + e_3 \rangle$ e $s = O + e_2 + \langle e_4 \rangle$.

(a) Si determinino la distanza tra r e s e la distanza tra $r \vee s$ e l'origine.

(b) Si determinino tutti gli iperpiani ortogonali a s e con distanza 5 da r.

(c) Si determini il volume del tetraedro di vertici $A = O + e_3 + e_4$, $B = O + e_2$, $C = O - e_4$, $D = O + e_1 + e_4$.

Svolg.: (*a*) Siano $P = O + e_3 + e_4$, $Q = O + e_2$, $v = e_1 - e_2 + e_3$ e $w = e_4$, cosicché $r = P + \langle v \rangle$ e $s = Q + \langle w \rangle$ e $r \vee s = P + \langle Q - P, v, w \rangle$, di equazione $x_2 + x_3 = 1$, perché le due rette sono sghembe. Un vettore ortogonale a $r \vee s$ è $n = e_2 + e_3$, quindi

$$d(r,s) = \frac{vol^3\,(PL(Q-P,v,w))}{vol^2\,(PL(v,w))} = \sqrt{\frac{\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \text{e} \qquad d(O, r \vee s) = \frac{|(P-O)\cdot n|}{\|n\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(*b*) La retta r è ortogonale a s ($v \cdot w = 0$). Quindi r è parallela a ogni iperpiano $\mathbb{H}_k$, ortogonale a s, di equazione $x_4 = k$ (al variare di $k \in \mathbb{R}$). Dunque $d(r, \mathbb{H}_k) = d(P, \mathbb{H}_k) = |k - 1| = 5$ se, e solo se, $k \in \{-4, 6\}$.

(*c*) Il volume del simplesso tridimensionale (tetraedro) è $1/6$ del volume del parallelepipedo di spigoli uguali, quindi si ha

$$vol^3\,(\Delta(B-A, C-A, D-A)) = \frac{1}{6}\sqrt{\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{10}}{6}$$

e l'esercizio è concluso. $\square$

Isometrie

Ci occuperemo ora della classificazione delle trasformazioni dello spazio euclideo che rispettano le lunghezze e gli angoli, ovvero delle isometrie.

Definizione [isometria]

Una trasformazione affine dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$ è un'*isometria* se l'applicazione lineare soggiacente è un'isometria dello spazio vettoriale euclideo. Si dirà un'*isometria diretta* se conserva l'orientamento, ed *isometria inversa* altrimenti.

Andiamo a mostrare la natura geometrica della definizione, ovvero che le isometrie sono tutte e sole le trasformazioni biunivoche dello spazio che rispettano le distanze.

Proposizione

Sia $\mathbb{E}^n$ lo spazio euclideo sono equivalenti

(a) $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è un'isometria.

(b) $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ è una biiezione e, per ogni coppia di punti P e Q in $\mathbb{E}^n$, si ha $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$.

dim. $((a) \Rightarrow (b))$ Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata a f; si ha $\ker \phi = \langle 0 \rangle$ perché deve aversi $\phi(v) \cdot \phi(v)) = v \cdot v > 0$, per ogni vettore $v \neq 0$. Dunque f è una biiezione e per ogni coppia di punti P, Q si ha

$$\|f(P) - f(Q)\|^2 = \|\phi(Q - P)\|^2 = \phi(Q - P) \cdot \phi(Q - P) = (Q - P) \cdot (Q - P) = \|Q - P\|^2;$$

e quindi $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ in quanto entrambi reali non negativi.

dim. $((a) \Rightarrow (b))$ Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata a f; si ha $\ker \phi = \langle 0 \rangle$ perché deve aversi $\phi(v) \cdot \phi(v)) = v \cdot v > 0$, per ogni vettore $v \neq 0$. Dunque f è una biiezione e per ogni coppia di punti P, Q si ha

$$\|f(P) - f(Q)\|^2 = \|\phi(Q - P)\|^2 = \phi(Q - P) \cdot \phi(Q - P) = (Q - P) \cdot (Q - P) = \|Q - P\|^2;$$

e quindi $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ in quanto entrambi reali non negativi.

$((b) \Rightarrow (a))$ Fissato un punto $P \in \mathbb{E}^n$, si consideri l'applicazione biiettiva $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definita ponendo $\phi(v) = f(P + v) - f(P)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Dobbiamo mostrare che ϕ è un'applicazione lineare che rispetta il prodotto scalare e, per far questo, è sufficiente mostrare che $\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$ per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$.

dim. $((a) \Rightarrow (b))$ Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata a f; si ha $\ker \phi = \langle 0 \rangle$ perché deve aversi $\phi(v) \cdot \phi(v)) = v \cdot v > 0$, per ogni vettore $v \neq 0$. Dunque f è una biiezione e per ogni coppia di punti P, Q si ha

$$\|f(P) - f(Q)\|^2 = \|\phi(Q - P)\|^2 = \phi(Q - P) \cdot \phi(Q - P) = (Q - P) \cdot (Q - P) = \|Q - P\|^2;$$

e quindi $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ in quanto entrambi reali non negativi.

$((b) \Rightarrow (a))$ Fissato un punto $P \in \mathbb{E}^n$, si consideri l'applicazione biiettiva $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definita ponendo $\phi(v) = f(P + v) - f(P)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Dobbiamo mostrare che ϕ è un'applicazione lineare che rispetta il prodotto scalare e, per far questo, è sufficiente mostrare che $\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$ per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$. Se questo è vero, fissati comunque due vettori v, w in $\mathbb{R}^n$ e una coppia di scalari a e b in $\mathbb{R}$, si ha

$$\big(\phi(av + bw) - a\phi(v) - b\phi(w)\big) \cdot \phi(u) =$$
$$= \phi(av + bw) \cdot \phi(u) - a(\phi(v) \cdot \phi(u)) - b(\phi(w) \cdot \phi(u)) = (av + bw) \cdot u - a(v \cdot u) - b(w \cdot u) = 0$$

per ogni vettore u in $\mathbb{R}^n$. Quindi, poiché ϕ è biiettiva, deve aversi $\phi(av + bw) - a\phi(v) - b\phi(w) = 0$, e ϕ è un'applicazione lineare.

dim. $((a) \Rightarrow (b))$ Sia $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione lineare associata a f; si ha $\ker \phi = \langle 0 \rangle$ perché deve aversi $\phi(v) \cdot \phi(v)) = v \cdot v > 0$, per ogni vettore $v \neq 0$. Dunque f è una biiezione e per ogni coppia di punti P, Q si ha

$$\|f(P) - f(Q)\|^2 = \|\phi(Q - P)\|^2 = \phi(Q - P) \cdot \phi(Q - P) = (Q - P) \cdot (Q - P) = \|Q - P\|^2;$$

e quindi $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ in quanto entrambi reali non negativi.

$((b) \Rightarrow (a))$ Fissato un punto $P \in \mathbb{E}^n$, si consideri l'applicazione biiettiva $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definita ponendo $\phi(v) = f(P + v) - f(P)$, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$. Dobbiamo mostrare che ϕ è un'applicazione lineare che rispetta il prodotto scalare e, per far questo, è sufficiente mostrare che $\phi(v) \cdot \phi(w) = v \cdot w$ per ogni coppia di vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$. Se questo è vero, fissati comunque due vettori v, w in $\mathbb{R}^n$ e una coppia di scalari a e b in $\mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\big(\phi(av + bw) - a\phi(v) - b\phi(w)\big) \cdot \phi(u) = \\
&= \phi(av + bw) \cdot \phi(u) - a(\phi(v) \cdot \phi(u)) - b(\phi(w) \cdot \phi(u)) = (av + bw) \cdot u - a(v \cdot u) - b(w \cdot u) = 0
\end{aligned}$$

per ogni vettore u in $\mathbb{R}^n$. Quindi, poiché ϕ è biiettiva, deve aversi $\phi(av + bw) - a\phi(v) - b\phi(w) = 0$, e ϕ è un'applicazione lineare.
Resta quindi da dimostrare l'affermazione evidenziata sopra. Siano v, w in $\mathbb{R}^n$ due vettori e consideriamo i punti P, $Q = P + w$, $R = P + v$. Si ha $R - Q = (R - P) - (Q - P)$ e quindi

$$\|R - Q\|^2 = (R - Q) \cdot (R - Q) = \|R - P\|^2 + \|Q - P\|^2 - 2(R - P) \cdot (Q - P).$$

Ricordando che f conserva le distanze, si deduce

$$\begin{aligned}
v \cdot w &= (R - P) \cdot (Q - P) = \tfrac{1}{2}\left(\|R - P\|^2 + \|Q - P\|^2 - \|R - Q\|^2\right) = \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\|f(R) - f(P)\|^2 + \|f(Q) - f(P)\|^2 - \|f(R) - f(Q)\|^2\right) = (f(R) - f(P)) \cdot (f(Q) - f(P)) = \\
&= \phi(v) \cdot \phi(w).
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione.

Nella dimostrazione precedente non si è usata mai l'ipotesi di finitezza della dimensione dello spazio. Quindi la stessa dimostrazione sarebbe valida in uno spazio di Hilbert.

Fissato un riferimento ortonormale $\mathscr{R} = \{O, e_1, \dots, e_n\}$ nello spazio euclideo, un'isometria $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$, associata all'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ha una matrice del tipo

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & R \end{array}\right),$$

ove $t = f(O) - O \in \mathbb{R}^n$ e $R = \alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi) \in O_n$, ovvero ${}^tRR = \mathbf{1}_n$.

Come per tutte le trasformazioni affini, si ha

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & R \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t' & R' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t + Rt' & RR' \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & R \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline -R^{-1}t & R^{-1} \end{array}\right).$$

e si ricordi che si sarebbe potuto scrivere ${}^tR$ in luogo di R^{-1}.

Isometrie del piano euclideo Andiamo a classificare, seguendo Eulero, le isometrie del piano.

- Sia $R \in SO_2$, ovvero $R = R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

  (a) R ha l'autovalore 1 se, e solo se, $R = \mathbf{1}_2$. In tal caso f è la traslazione di vettore t ($f(P) = P + t$ per ogni punto P del piano) e non ci sono punti uniti.

  (b) se $R = R_\vartheta$ non ha l'autovalore 1, ovvero $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, allora f ha un unico punto unito. Infatti, posto $X = O + x$; $f(X) = O + t + \phi(x) = X = O + x$ se, e solo se, $(\phi - 1)(x) = -t$, e quindi, essendo $\phi - 1$ invertibile, esiste un unico vettore, x, nella controimmagine di $-t$. Dunque f è una rotazione di centro $O + x$ ed angolo ϑ.

- Sia ora $R \in O_2$ e $\det R = -1$. Allora ϕ è (ortogonalmente) diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, con autovalori 1 e -1, entrambi di molteplicità 1. Detti $\langle v\rangle$ e $\langle w\rangle$ i corrispondenti spazi di autovettori (tra loro ortogonali), scriviamo $f(O) - O = t = av + bw$.

  (a) Se $a = 0$ e $t = bw$, i punti della retta $r = O + (b/2)w + \langle v\rangle$ sono uniti. Per ogni $s \in \mathbb{R}$, si ha $f(O+(b/2)w+sv) = O+t+\phi((b/2)w+sv) = O+bw-(b/2)w+sv = O+(b/2)w+sv$. Dunque f è la riflessione (o *simmetria ortogonale*) di asse r.

  (b) Se $t = av + bw$, con $a \neq 0$, allora f si ottiene applicando la simmetria descritta al punto precedente seguita dalla traslazione di vettore av (parallelo all'asse di simmetria). Quindi non vi sono punti uniti per f e si chiama glisso-riflessione di asse r.

Isometrie dirette dello spazio euclideo tridimensionale Passiamo ora alle isometrie dello spazio tridimensionale. In questo caso l'applicazione lineare associata, ϕ, ha sempre un autovalore reale uguale a $\det \phi = \pm 1$. Sia $R \in SO_3$, e quindi ϕ abbia l'autovalore 1.

(a) Se l'autospazio relativo ad 1 ha dimensione 3, ovvero $R = \mathbf{1}_3$, allora f è la traslazione di vettore t.

(b) Se $R \neq \mathbf{1}_3$, allora l'autospazio $\langle v_0 \rangle$ ha dimensione 1 e vi sono due possibilità.

  (i) Sia $t = f(O) - O \in \langle v_0 \rangle^\perp$. Allora esiste un vettore $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tale che $(\phi - 1)(x_0) = -t$. Infatti per ogni $x \in \mathbb{R}^3$, $\phi(x) \cdot v_0 = \phi(x) \cdot \phi(v_0) = x \cdot v_0$, ovvero $(\phi(x) - x) \cdot v_0 = 0$; quindi $\operatorname{im}(\phi - 1) \subseteq \langle v_0 \rangle^\perp$ ed i due sottospazi coincidono per motivi di dimensione. Quindi tutti i punti della retta $h = O + x_0 + \langle v_0 \rangle$ sono uniti per f e quindi f è la rotazione di asse h ed angolo ϑ, ove $1 + 2\cos\vartheta = \operatorname{tr}\phi$. Su qualsiasi piano ortogonale all'asse induce un'isometria diretta con un punto unito. In particolare, se l'angolo di rotazione è uguale a π, si parla anche di *riflessione* rispetto all'asse.

  (ii) Sia quindi $t = f(O) - O = n + cv_0$, con $n \in \langle v_0 \rangle^\perp$ e $c \neq 0$. Allora f si ottiene facendo seguire alla rotazione di asse $h = O + (\phi - 1)^{-1}(-n)$ (controimmagine del vettore) descritta sopra, la traslazione di vettore cv_0, parallelo all'asse di rotazione. Si tratta quindi di una roto-traslazione (o anche *glisso-rotazione*) di asse h, priva di punti uniti.

In conclusione, le possibili **isometrie dirette** dello spazio euclideo sono: **traslazioni**, **rotazioni** e **roto-traslazioni**, e si distinguono in base alla dimensione dell'autospazio relativo a 1 e alla presenza o meno di punti uniti.

Vedremo qui sotto che le possibili **isometrie inverse** sono: **riflessioni**, **glisso-riflessioni** e **roto-riflessioni**, e si distinguono in base alla dimensione della varietà dei punti uniti.

Isometrie inverse dello spazio euclideo tridimensionale Sia $R \in O_3$, con $\det R = -1$ e quindi ϕ abbia l'autovalore -1 con autovettore $n_0 \neq 0$ e consideriamo il sottospazio $\langle n_0 \rangle^\perp$.

(a) Se ϕ induce l'identità su $\langle n_0 \rangle^\perp$, possiamo distinguere due casi.

- (i) Sia $f(O) - O = t = cn_0$. Allora tutti i punti del piano $\pi = O + (c/2)n_0 + \langle n_0 \rangle^\perp$ sono punti uniti per f ed f è la riflessione rispetto al piano π.
- (ii) Sia $f(O) - O = v_0 + cn_0$, con $0 \neq v_0 \in \langle n_0 \rangle^\perp$. Allora f è composizione della riflessione descritta sopra, seguita dalla traslazione di vettore v_0 (parallelo al piano di riflessione); ovvero è una glisso-riflessione e non ha punti uniti.

(b) Se ϕ induce una rotazione di angolo $\vartheta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ su $\langle n_0 \rangle^\perp$. Sia $f(O) - O = t = v_0 + cn_0$, con $0 \neq v_0 \in \langle n_0 \rangle^\perp$ e indichiamo con $\rho_\vartheta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la rotazione di asse n_0 ed angolo ϑ. Siano

- $f_1 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la rotazione di angolo ϑ ed asse la retta $(O + x_0) + \langle n_0 \rangle$, ove $x_0 \in \langle n_0 \rangle^\perp$ e $\rho_\vartheta(x_0) - x_0 = -v_0$ (ovvero $f_1(O + x) = O + v_0 + \rho_\vartheta(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^3$).
- $f_2 : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione rispetto al piano $\pi = O + (c/2)n_0 + \langle n_0 \rangle^\perp$.

Allora, $f(X) = f_2(f_1(X))$ per ogni punto X. Infatti, sia $X = O + v + sn_0$, con $v \in \langle n_0 \rangle^\perp$; si ha

$$f(X) = O + t + \phi(v + sn_0) = O + v_0 + cn_0 + \phi(v) - sn_0 = O + v_0 + cn_0 + \rho_\vartheta(v) - sn_0 =$$
$$= f_2(O + v_0 + \rho_\vartheta(v + sn_0)) = f_2(f_1(O + v + sn_0)) = f_2(f_1(X)).$$

Quindi $f = f_2 \circ f_1 = f_1 \circ f_2$ è una roto-riflessione. Ha quindi un unico punto unito: il punto di intersezione tra l'asse di rotazione ed il piano di riflessione $(O + x_0 + (c/2)n_0)$. Se l'angolo di rotazione, $\vartheta = \pi$, si parla anche di *simmetria centrale* o *riflessione* rispetto al punto unito.

Forme canoniche delle matrici di isometrie

Per ogni isometria dello spazio euclideo esiste un opportuno riferimento euclideo, concorde, rispetto a cui la matrice dell'isometria abbia una delle seguenti forme, per opportuni valori dei parametri

DIRETTE		
Traslazione	**Rotazione**	**Rototraslazione**
$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{array}\right)$
INVERSE		
Riflessione	**Glissoriflessione**	**Rotoriflessione**
$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{c\|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{array}\right)$

Si noti che ogni qualvolta vi siano punti uniti, uno di questi viene scelto come origine, mentre quando vi è la componente traslatoria, questa commuta con la parte lineare. Nel caso della glissoriflessione si sarebbe potuto imporre di scegliere uno degli assi (ad esempio l'ultimo) parallelo alla direzione di traslazione, riducendo così il numero dei parametri.

Esercizio Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ munito del riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ si considerino i piani $\pi_1 : x + 3y - z = 11$ e $\pi_2 : x = 0$.

(a) Si determinino le matrici nel riferimento $\mathscr{R}$ delle riflessioni σ_1 e σ_2 di asse π_1 e π_2 rispettivamente. Si classifichi l'isometria $g = \sigma_1 \tau_v \sigma_2$, ove τ_v è la traslazione di vettore $v = e_1 + e_2 + 3e_3$.

(b) Si determini un riferimento (ortonormale e concorde) $\mathscr{R}'$ tale $\alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(g)$ sia in forma canonica e si scriva tale matrice.

(c) Si indichino le sottovarietà lineari unite per g. Quali altre isometrie di $\mathbb{E}^3$ hanno le stesse sottovarietà lineari unite? Descriverle tutte.

(d) Si descrivano (scrivendo la matrice in un opportuno riferimento) quali sono tutte le possibili rotazioni ρ di $\mathbb{E}^3$ tali che $\rho\sigma_1 = \sigma_1\rho$ e $\rho\sigma_1(P) = P$ con $P = O + 11e_1$.

Svolg.: (*a*) Un vettore ortogonale al piano π_1 è $n = e_1 + 3e_2 - e_3$ e il punto $P = O + 2e_1 + 3e_2 \in \pi_1$, quindi, per ogni punto $X \in \mathbb{E}^3$, il suo riflesso, $\sigma_1(X)$, si ottiene applicando in P il simmetrico del vettore $X - P$ rispetto al piano $\langle n \rangle^\perp$ (parallelo a π_1). Possiamo quindi scrivere

$$\sigma_1(X) = X - 2\frac{(X-P)\cdot n}{n \cdot n} n, \quad \text{ovvero} \quad \sigma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2(x+3y-z-11)}{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di σ_2 non richiede commenti e le due matrici sono

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_1) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 9/11 & -6/11 & 2/11 \\ 6 & -6/11 & -7/11 & 6/11 \\ -2 & 2/11 & 6/11 & 9/11 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma_2) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[segue]

[continua]
La trasformazione lineare (ortogonale) associata a g si ottiene componendo le corrispondenti applicazioni associate a σ_1 e σ_2; quindi si tratta di una rotazione di asse il sottospazio $\langle e_2 + 3e_3 \rangle$ (intersezione dei sottospazi direttori di π_1 e π_2). Il vettore $v = e_1 + e_2 + 3e_3$ ha la componente $u = e_2 + 3e_3$ parallela all'asse (che quindi non varia applicando le simmetrie) e la componente ortogonale $w = e_1$ e $\tau_w \sigma_2 = \sigma_2'$ è la simmetria rispetto al piano $\pi_2' : x = \frac{1}{2}$. Dunque $g = \tau_u(\sigma_1 \sigma_2')$ è una *rototraslazione* di asse la retta
$h = \pi_1 \cap \pi_2' : \begin{cases} x = 1/2 \\ x + 3y - z = 11 \end{cases}$, angolo ϑ, ove $\cos\vartheta = -9/11$ e vettore u (parallelo all'asse).

(*b*) Per scrivere la matrice della rototraslazione in forma canonica dobbiamo prendere come origine un punto dell'asse e come primo vettore della base un versore dell'asse, gli altri due versori devono formare una base ortonormale del sottospazio ortogonale all'asse, ordinati in modo che il nuovo riferimento sia concorde con $\mathscr{R}$. Si pone quindi $\mathscr{R}' = \{O'; u_1, u_2, u_3\}$ e $A = \alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(g)$, ove

$$O' = O + \tfrac{1}{2}e_1 - \tfrac{21}{2}e_3, \quad u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(e_2 + 3e_3), \qquad u_2 = e_1, \quad u_3 = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3e_2 - e_3); \qquad A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{10} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9/11 & -2\sqrt{10}/11 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10}/11 & -9/11 \end{array}\right).$$

(*c*) L'unica sottovarietà lineare unita per una rototraslazione è l'asse di rotazione. Dunque tutte e sole le rototraslazioni con asse h e angolo $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ hanno la stessa sottovarietà lineare unita.
(*d*) Il punto P appartiene a π_1 e quindi deve essere unito sia per ρ che per σ_1. Possiamo quindi sceglierlo come origine e occuparci delle trasformazioni ortogonali associate. Inoltre, scegliamo come primo vettore di base il versore $v_1 = \frac{1}{\|n\|} n$ e poi una base ortonormale v_2, v_3 di $\langle n \rangle^\perp$ (v_1, v_2, v_3 concorde). Deve aversi $\sigma_1(\rho(n)) = \rho(\sigma_1(n)) = \rho(-n) = -\rho(n)$ e quindi $\rho(n) \in \langle n \rangle$ (autospazio di autovalore -1). Dunque $\rho(n) = \pm n$ e le matrici della parte lineare di ρ sono tutte e sole quelle della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Rotazioni di asse $P + \langle n \rangle$ e angolo α le prime, rotazioni di angolo π e asse nel piano $P + \langle n \rangle^\perp$ le altre.

Esercizio Sia $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n$ un'isometria dello spazio euclideo $\mathbb{E}^n$.

(a) Si mostri che, se f ha un punto unito, P, allora ogni sottovarietà unita $\mathbb{L}$ contiene almeno un punto unito.

(b) Si mostri che, se f ha una retta $r = P + \langle u \rangle$ fatta di punti uniti, allora una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ è unita per $\tau_u f$ se, e solo se, $\mathbb{L}$ è unita per f e $u \in V_{\mathbb{L}}$ (ove τ_u è la traslazione di vettore u e $V_{\mathbb{L}}$ è il sottospazio direttore di $\mathbb{L}$).

Svolg.: (*a*) Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare unita per f ($X \in \mathbb{L} \Rightarrow f(X) \in \mathbb{L}$). Se $P \in \mathbb{L}$, non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti, sia Q il punto di $\mathbb{L}$ per cui $d(P, \mathbb{L}) = \|Q - P\|$ (punto di minima distanza, proiezione ortogonale di P su $\mathbb{L}$). Allora, poiché f è isometria, $\|P - f(Q)\| = \|f(P) - f(Q)\| = \|P - Q\|$ e inoltre, $\|P - f(Q)\|^2 = \|P - Q\|^2 + \|Q - f(Q)\|^2$, perché $f(Q) \in \mathbb{L}$ e $P - Q \in V_{\mathbb{L}}^{\perp}$. Dunque, $f(Q) = Q$, perché $\|Q - f(Q)\| = 0$.

(*b*) È chiaro che, se $\mathbb{L}$ è unita per f e $u \in V_{\mathbb{L}}$, allora $\tau_u f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$.
Dimostriamo l'altra implicazione. Sia $\mathbb{L} = Q + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{L}' = Q + (V_{\mathbb{L}} + \langle u \rangle)$. Allora $\mathbb{L}'$ è stabile per f e quindi, per quanto dimostrato sopra, esiste un punto unito per f, $Q_0 \in \mathbb{L}'$ e, se $Q_0 = Q_1 + cu$, con $Q_1 \in \mathbb{L}$, allora $f(Q_1) = f(Q_0) - \phi(cu) = Q_0 - cu = Q_1$, perché $P + \langle u \rangle$ è retta di punti uniti per f e quindi u è autovettore relativo all'autovalore 1 per l'applicazione lineare ϕ, associata a f. Allora, per ogni $v \in V_{\mathbb{L}}$, si ha $f(Q_1 + v) = Q_1 + \phi(v)$ e $\tau_u f(Q + v_1) \in \mathbb{L}$, per cui $\phi(v) + u \in V_{\mathbb{L}}$; da cui si conclude che $u \in V_{\mathbb{L}}$ e quindi che $f(\mathbb{L}) \subseteq \mathbb{L}$. $\square$

Esercizio Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$, si consideri l'isometria f di matrice

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{array}\right)$$

.

(a) È possibile scrivere $f = \tau_v \rho = \rho \tau_v$ con ρ rotazione e τ_v traslazione di vettore $v \in \mathbb{R}^3$? In caso affermativo, determinare τ_v, l'asse di rotazione di ρ e l'angolo di rotazione, dopo aver orientato l'asse.

(b) Si determini un sistema di riferimento $\mathscr{R}'$, concorde con $\mathscr{R}$, tale che la matrice di f sia in forma canonica. Si scriva tale matrice e si dica quali sono le sottovarietà lineari unite per f.

(c) Si determini una glissoriflessione g tale che la composizione gf sia una riflessione rispetto ad un piano π con $e_2 \in V_\pi$.

Svolg.: (*a*) La decomposizione richiesta è la decomposizione di Eulero di una rototraslazione, quindi andiamo a classificare f. Si tratta di un'isometria diretta ($\det A = 1$). L'applicazione lineare soggiacente ha l'autovalore 1 con molteplicità 1 e autospazio $\langle e_2 - e_3 \rangle$ e il vettore traslazione $t = \frac{2-\sqrt{2}}{2} e_1 - e_3$ si decompone nella somma

$$t = v + u, \quad \text{con} \quad v = \tfrac{1}{2}(e_2 - e_3) \in \langle e_2 - e_3 \rangle \text{ e } u = \tfrac{2-\sqrt{2}}{2} e_1 - \tfrac{1}{2} e_2 - \tfrac{1}{2} e_3 \in \langle e_2 - e_3 \rangle^{\perp}.$$

Dunque $f = \tau_v \rho = \rho \tau_v$ è una rototraslazione, ove $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\rho) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{array}\right)$.

[segue]

[continua]

L'asse di rotazione è la retta $h = O + e_1 + \langle e_2 - e_3 \rangle$ e $\cos\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(*b*) Scelto il riferimento ortonormale $\mathscr{R}' = \{O', v_1, v_2, v_3\}$, ove $O' = O + e_1$, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_3)$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 + e_3)$, $v_3 = e_1$; si ha un riferimento concorde con $\mathscr{R}$ e abbiamo orientato l'asse scegliendo il versore v_1. Il seno dell'angolo di rotazione ha quindi lo stesso segno di $\rho(v_2) \cdot v_3$ per cui l'angolo di rotazione è $-\frac{\pi}{4}$ e la matrice canonica è quindi

$$\alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{2}/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array}\right).$$

Non vi sono sottovarietà lineari unite diverse dall'asse di rotazione h.

(*c*) Abbiamo quindi $f = \tau_v \rho = \rho \tau_v$ e sappiamo che $g = \tau_w \sigma = \sigma \tau_w$, ove σ è la riflessione rispetto ad un opportuno piano e w un vettore parallelo a tale piano. Preso $w = -v$, si ha $gf = \sigma\tau_w\tau_v\rho = \sigma\rho$, e vediamo se possiamo determinare σ in modo che $\sigma\rho$ sia la riflessione nel piano π del testo. La rotazione ρ è composizione di due riflessioni rispetto a opportuni piani contenenti l'asse di rotazione h, e l'unico piano π contenente h e con $e_2 \in V_\pi$ è il piano $\pi = O - e_1 + \langle e_2, e_3 \rangle$. Detta σ' la simmetria di asse π, si deve avere $\sigma' = \sigma\rho$, ovvero $\sigma = \sigma'\rho^{-1}$; dunque

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(\sigma') = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{e} \quad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(g) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{2+\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}+2}{4} \end{array}\right).$$

Si noti che $w = -v$ è parallelo al piano della riflessione σ, perché parallelo all'asse h. □

Prodotto scalare hermitiano

Vogliamo estendere lo spazio euclideo per poter utilizzare anche punti a coordinate complesse. Ciò non sarebbe possibile con l'estensione banale del prodotto scalare. Diamo quindi le definizioni opportune.

Definizione [spazio vettoriale hermitiano]

Si chiama *spazio vettoriale hermitiano* di dimensione n lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ dotato del *prodotto scalare standard*, definito dalla formula

$$(x, y) \mapsto \langle x \,|\, y \rangle = {}^t\bar{x}y = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i,$$

al variare di (x, y) in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Se i vettori hanno coordinate reali, questo prodotto coincide col prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo.

Il prodotto scalare standard gode delle seguenti proprietà (di verifica immediata), qualunque siano u, v e w in $\mathbb{C}^n$ e a, b in $\mathbb{C}$.

- $\langle u \,|\, av + bw \rangle = a\langle u \,|\, v \rangle + b\langle u \,|\, w \rangle$,
- $\langle au + bv \,|\, w \rangle = \bar{a}\langle u \,|\, w \rangle + \bar{b}\langle v \,|\, w \rangle$,
- $\langle w \,|\, v \rangle = \overline{\langle v \,|\, w \rangle}$,
- $\langle v \,|\, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ e $\langle v \,|\, v \rangle = 0$ se, e solo se, $v = 0$;

Il prodotto scalare standard gode delle seguenti proprietà (di verifica immediata), qualunque siano u, v e w in $\mathbb{C}^n$ e a, b in $\mathbb{C}$.

- $\langle u \,|\, av + bw \rangle = a\langle u \,|\, v \rangle + b\langle u \,|\, w \rangle$,
- $\langle au + bv \,|\, w \rangle = \bar{a}\langle u \,|\, w \rangle + \bar{b}\langle v \,|\, w \rangle$,
- $\langle w \,|\, v \rangle = \overline{\langle v \,|\, w \rangle}$,
- $\langle v \,|\, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ e $\langle v \,|\, v \rangle = 0$ se, e solo se, $v = 0$;

Come nello spazio vettoriale euclideo, a partire dal prodotto scalare si definisce la *norma* di un vettore v di $\mathbb{C}^n$, ponendo $\|v\| = \sqrt{\langle v \,|\, v \rangle}$.

Dalle proprietà del prodotto scalare si deducono quelle della norma, ovvero

- $\|v\| \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{C}^n$ e $\|v\| = 0$ se, e solo se, $v = 0$;
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare),
- $\|cv\| = |c|\|v\|$,

qualunque siano v, w in $\mathbb{C}^n$ e c in $\mathbb{C}$.

In particolare, la disuguaglianza triangolare è una diretta conseguenza della seguente disuguaglianza di Schwarz, che generalizza quella dello spazio vettoriale euclideo.

Proposizione [disuguaglianza di Schwarz]

Per ogni coppia di vettori v, w di $\mathbb{C}^n$, si ha $|\langle v \mid w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$; e vale l'uguaglianza se, e solo se, v e w sono linearmente dipendenti.

dim. Se $\langle v \mid w \rangle = 0$, la tesi è banalmente vera. Sia quindi $\langle v \mid w \rangle \neq 0$ e si ponga $\kappa = \frac{\langle v \mid w \rangle)}{|\langle v \mid w \rangle|}$. Si ha $|\kappa| = 1$. Inoltre, per ogni numero reale, t, si ha

$$0 \leq \langle \kappa v + tw \mid \kappa v + tw \rangle = |\kappa|^2 \langle v \mid v \rangle + t \left(\kappa \langle w \mid v \rangle + \overline{\kappa} \langle v \mid w \rangle \right) + t^2 \langle w \mid w \rangle = \\ = \langle v \mid v \rangle + 2t |\langle w \mid v \rangle| + t^2 \langle w \mid w \rangle;$$

perché

$$\kappa \langle w \mid v \rangle = \frac{\langle v \mid w \rangle \langle w \mid v \rangle}{|\langle v \mid w \rangle|} = |\langle v \mid w \rangle| \qquad \text{e} \qquad \overline{\kappa} \langle v \mid w \rangle = \frac{\overline{\langle v \mid w \rangle} \langle w \mid v \rangle}{|\langle v \mid w \rangle|} = |\langle v \mid w \rangle|.$$

Per le usuali condizioni sul segno di un trinomio a coefficienti reali, si conclude che $|\langle v \mid w \rangle|^2 \leq \langle v \mid v \rangle \langle w \mid w \rangle = \|v\|^2 \|w\|^2$. $\square$

Ortogonali

Due vettori v e w sono ortogonali se, e solo se, $\langle v \mid w \rangle = 0$. Più in generale, dato un sottospazio W (o anche solo un sottoinsieme non vuoto) di $\mathbb{C}^n$, l'*ortogonale* di W è il sottospazio

$$W^{\perp} = \{ \; v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v \mid w \rangle = 0 \; \forall w \in W \; \} \, .$$

È immediato verificare che, se $W = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$, allora $x \in W^{\perp}$ se, e solo se, $\langle x \mid w_1 \rangle = 0, \ldots, \langle x \mid w_k \rangle = 0$. Dunque, se i vettori $w_1, \ldots, w_k$ sono una base di W, il sottospazio $W^{\perp}$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di rango k, che, per il Teorema di Rouché–Capelli, è un sottospazio di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $n - k$. Inoltre, un vettore w appartenente a $W \cap W^{\perp}$ deve soddisfare alla condizione $\langle w \mid w \rangle = 0$ e perciò, $W \cap W^{\perp} = \langle 0 \rangle$ e ne discende la

Proposizione [decomposizione ortogonale]

Per ogni sottospazio, W, dello spazio vettoriale hermitiano, $\mathbb{C}^n$, si ha $\mathbb{C}^n = W \oplus W^{\perp}$.

Anche nello spazio vettoriale hermitiano è preferibile utilizzare basi particolari, che rendano più facile il calcolo del prodotto scalare a partire dalle coordinate dei vettori.

Definizione [base ortonormale]

Una *base ortonormale* dello spazio vettoriale hermitiano $\mathbb{C}^n$ è un insieme di vettori $v_1, \cdots, v_n$, a due a due ortogonali, e di norma 1.

Data una base ortonormale $v_1, \cdots, v_n$ e un vettore v di $\mathbb{C}^n$, si ha

$$v = \langle v_1 \mid v \rangle v_1 + \cdots + \langle v_n \mid v \rangle v_n = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i \mid v \rangle v_i \qquad \text{[Formula di Parseval]}.$$

Infatti, la differenza $v - \langle v_1 \mid v \rangle v_1 - \cdots - \langle v_n \mid v \rangle v_n$ è ortogonale a tutti i vettori della base e, di conseguenza, a tutti i vettori di $\mathbb{C}^n$, e perciò è uguale al vettore nullo. Dati due vettori v e w, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i \mid v \rangle v_i, \quad w = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i \mid w \rangle v_i \qquad \text{e quindi} \qquad \langle v \mid w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v \mid v_i \rangle \langle v_i \mid w \rangle.$$

Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono due basi ortonormali di $\mathbb{C}^n$, la matrice di cambiamento di base $U = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ soddisfa alla condizione ${}^t\overline{U}U = \mathbf{1}_n$; ovvero U è una matrice unitaria. Infatti, l'elemento di posto (i, j) della matrice U è $u_{ij} = \langle v_i \mid w_j \rangle$, perché, per quanto visto sopra,

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i \mid w_j \rangle v_i, \qquad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Allora, l'elemento di posto (h, k) del prodotto ${}^t\overline{U}U$ è uguale a

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{u_{ih}} u_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \langle w_h \mid v_i \rangle \langle v_i \mid w_k \rangle = \langle w_h \mid w_k \rangle = \delta_{hk},$$

essendo vettori di una base ortonormale.

In modo perfettamente analogo al caso reale si dimostra la seguente

Osservazione [procedimento di Gram-Schmidt]

Nello spazio vettoriale hermitiano, $\mathbb{C}^n$, dati k vettori, $v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti, si possono determinare k vettori, $w_1, \dots, w_k$ a due a due ortogonali e di norma 1, tali che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle$ per $i = 1, \dots, k$.
In particolare, data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{C}^n$, esiste una base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$, tale che $\langle v_1, \dots, v_i \rangle = \langle w_1, \dots, w_i \rangle$ per $i = 1, \dots, n$ e quindi la matrice di cambiamento di base $P = \alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\mathrm{id})$ è triangolare superiore.

A ogni endomorfismo dello spazio hermitiano $\mathbb{C}^n$ si può associare l'applicazione lineare aggiunta.

Definizione [applicazione aggiunta]

Data un'applicazione lineare $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ tra spazi vettoriali hermitiani, la sua *aggiunta* è l'applicazione $\phi^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, definita ponendo $\langle \phi^*(w) \mid v \rangle = \langle w \mid \phi(v) \rangle$, per ogni $w \in \mathbb{C}^m$ e ogni $v \in \mathbb{C}^n$.

Fissate una base ortonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{C}^n$ e una base ortonormale $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di $\mathbb{C}^m$, sia $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(\phi) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ la matrice dell'applicazione lineare ϕ. In base alle definizioni, si ha

$$\phi^*(w_k) = \sum_{j=1}^{n} \langle v_j \mid \phi^*(w_k) \rangle v_j = \sum_{j=1}^{n} \langle \phi(v_j) \mid w_k \rangle v_j = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \mid w_k \right\rangle v_j = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} v_j$$

per $k = 1, \dots, m$; e quindi la matrice dell'aggiunta, ϕ^*, è la matrice trasposta della coniugata, $\overline{A}$, di A; ovvero $\alpha_{\mathcal{W},\mathcal{V}}(\phi^*) = {}^t\overline{A} \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$.

Teorema Spettrale complesso

Definizione [endomorfismo autoaggiunto e normale]

Un endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ di spazi vettoriali hermitiani, si dice *autoaggiunto* se coincide con il suo aggiunto; ovvero si ha $\langle \phi(w) \mid v \rangle = \langle w \mid \phi(v) \rangle$, per ogni $v, w \in \mathbb{C}^n$.
Un endomorfismo $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ di spazi vettoriali hermitiani, si dice *normale* se commuta con il suo aggiunto.

In particolare, per quanto visto sopra, per ogni base ortonormale, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, di $\mathbb{C}^n$, la matrice di un endomorfismo autoaggiunto ϕ, $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, è una matrice hermitiana, ovvero ${}^t\overline{A} = A$. Per un endomorfismo normale, invece si ha ${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$.

Teorema [teorema spettrale]

Sia $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un endomorfismo.

(a) Se ϕ è autoaggiunto, gli autovalori di ϕ sono reali ed esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori per ϕ.

(b) Se ϕ è normale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ costituita da autovettori per ϕ.

dim. (*a*) . Si potrebbe ripetere passo passo la dimostrazione del Teorema spettrale reale. Ad esempio, gli autovalori di ϕ sono tutti reali, perché, analogamente al caso reale, dati un autovalore di ϕ, $a \in \mathbb{C}$, e un autovettore ad esso relativo $v \neq 0$, si ha

$$\overline{a}\langle v \mid v \rangle = \langle av \mid a \rangle = \langle \phi(v) \mid v \rangle = \langle v \mid \phi(v) \rangle = \langle v \mid av \rangle = a\langle v \mid v \rangle;$$

da cui si deduce $\overline{a} = a$, perché $\langle v \mid v \rangle \neq 0$, essendo $v \neq 0$. Osserviamo invece che un endomorfismo autoaggiunto è anche normale e quindi possiamo dedurre la tesi dal caso seguente. [segue]

[continua]

(*b*) . Poiché ϕ è normale, per ogni coppia di vettori v e w, si ha

$$\langle \phi^*(v) \mid \phi^*(w) \rangle = \langle v \mid \phi(\phi^*(w)) \rangle = \langle v \mid \phi^*(\phi(w)) \rangle = \langle \phi(v) \mid \phi(w) \rangle.$$

Sia ora a un autovalore dell'endomorfismo normale ϕ e sia $v \neq 0$ un autovettore ad esso relativo. Allora, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \phi^*(v) - \overline{a}v \mid \phi^*(v) - \overline{a}v \rangle &= \langle \phi^*(v) \mid \phi^*(v) \rangle - \langle \phi^*(v) \mid \overline{a}v \rangle - \langle \overline{a}v \mid \phi^*(v) \rangle + \langle \overline{a}v \mid \overline{a}v \rangle \\
&= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \overline{a}\langle v \mid \phi(v) \rangle - a\langle \phi(v) \mid v \rangle + a\overline{a}\langle v \mid v \rangle \\
&= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \langle av \mid \phi(v) \rangle - \langle \phi(v) \mid av \rangle + \langle av \mid av \rangle \\
&= \langle \phi(v) - av \mid \phi(v) - av \rangle = \langle 0 \mid 0 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Da cui si conclude che $\phi^*(v) - \overline{a}v = 0$ e quindi che v è un autovettore per ϕ^*, relativo all'autovalore $\overline{a}$.

[continua]

(b) . Poiché ϕ è normale, per ogni coppia di vettori v e w, si ha

$$\langle \phi^*(v) \mid \phi^*(w) \rangle = \langle v \mid \phi(\phi^*(w)) \rangle = \langle v \mid \phi^*(\phi(w)) \rangle = \langle \phi(v) \mid \phi(w) \rangle.$$

Sia ora a un autovalore dell'endomorfismo normale ϕ e sia $v \neq 0$ un autovettore ad esso relativo. Allora, si ha

$$\begin{aligned}
\langle \phi^*(v) - \overline{a}v \mid \phi^*(v) - \overline{a}v \rangle &= \langle \phi^*(v) \mid \phi^*(v) \rangle - \langle \phi^*(v) \mid \overline{a}v \rangle - \langle \overline{a}v \mid \phi^*(v) \rangle + \langle \overline{a}v \mid \overline{a}v \rangle \\
&= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \overline{a}\langle v \mid \phi(v) \rangle - a\langle \phi(v) \mid v \rangle + a\overline{a}\langle v \mid v \rangle \\
&= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \langle av \mid \phi(v) \rangle - \langle \phi(v) \mid av \rangle + \langle av \mid av \rangle \\
&= \langle \phi(v) - av \mid \phi(v) - av \rangle = \langle 0 \mid 0 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Da cui si conclude che $\phi^*(v) - \overline{a}v = 0$ e quindi che v è un autovettore per ϕ^*, relativo all'autovalore $\overline{a}$. Mostriamo ora che autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Infatti, se $\phi(v) = av$ e $\phi(w) = bw$, con $b \neq a$, si ha

$$b\langle v \mid w \rangle = \langle v \mid bw \rangle = \langle v \mid \phi(w) \rangle = \langle \phi^*(v) \mid w \rangle = \langle \overline{a}v \mid w \rangle = a\langle v \mid w \rangle,$$

e quindi $(b - a)\langle v \mid w \rangle = 0$, da cui si deduce che $\langle v \mid w \rangle = 0$. Ciò significa che gli spazi di autovettori di ϕ oltre a essere in somma diretta sono anche, a due, a due, ortogonali.

[continua]

(*b*) . Poiché ϕ è normale, per ogni coppia di vettori v e w, si ha

$$\langle \phi^*(v) \mid \phi^*(w) \rangle = \langle v \mid \phi(\phi^*(w)) \rangle = \langle v \mid \phi^*(\phi(w)) \rangle = \langle \phi(v) \mid \phi(w) \rangle.$$

Sia ora a un autovalore dell'endomorfismo normale ϕ e sia $v \neq 0$ un autovettore ad esso relativo. Allora, si ha

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(v) - \overline{a}v \mid \phi^*(v) - \overline{a}v \rangle &= \langle \phi^*(v) \mid \phi^*(v) \rangle - \langle \phi^*(v) \mid \overline{a}v \rangle - \langle \overline{a}v \mid \phi^*(v) \rangle + \langle \overline{a}v \mid \overline{a}v \rangle \\ &= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \overline{a}\langle v \mid \phi(v) \rangle - a\langle \phi(v) \mid v \rangle + a\overline{a}\langle v \mid v \rangle \\ &= \langle \phi(v) \mid \phi(v) \rangle - \langle av \mid \phi(v) \rangle - \langle \phi(v) \mid av \rangle + \langle av \mid av \rangle \\ &= \langle \phi(v) - av \mid \phi(v) - av \rangle = \langle 0 \mid 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Da cui si conclude che $\phi^*(v) - \overline{a}v = 0$ e quindi che v è un autovettore per ϕ^*, relativo all'autovalore $\overline{a}$.
Mostriamo ora che autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali. Infatti, se $\phi(v) = av$ e $\phi(w) = bw$, con $b \neq a$, si ha

$$b\langle v \mid w \rangle = \langle v \mid bw \rangle = \langle v \mid \phi(w) \rangle = \langle \phi^*(v) \mid w \rangle = \langle \overline{a}v \mid w \rangle = a\langle v \mid w \rangle,$$

e quindi $(b - a)\langle v \mid w \rangle = 0$, da cui si deduce che $\langle v \mid w \rangle = 0$. Ciò significa che gli spazi di autovettori di ϕ oltre a essere in somma diretta sono anche, a due, a due, ortogonali.
Resta da vedere che gli autovettori di ϕ generano tutto $\mathbb{C}^n$. Se indichiamo con W lo spazio generato dagli autovettori relativi a ϕ, si ha $\mathbb{C}^n = W \oplus W^\perp$ e ϕ induce un endomorfismo del sottospazio $W^\perp$. Inoltre, se $x \in W^\perp$, allora per ogni autovettore w di ϕ, si ha $\langle \phi(x) \mid w \rangle = \langle x \mid \phi(w) \rangle = c\langle x \mid w \rangle = 0$, qualunque sia l'autovalore c. Dunque, $\phi(x) \in W^\perp$; e ϕ induce un endomorfismo nel sottospazio $W^\perp$. Se fosse $W^\perp \neq \langle 0 \rangle$, allora il sottospazio $W^\perp$ dovrebbe contenere un autovettore per ϕ, contro l'ipotesi che questi appartengano tutti a W e che $W \cap W^\perp = \langle 0 \rangle$. Si conclude che $W^\perp = \langle 0 \rangle$, ovvero che $W = \mathbb{C}^n$. $\square$

In termini di matrici, possiamo riformulare il teorema spettrale nel modo seguente: *Una matrice complessa* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *è hermitiana (ovvero* ${}^t\overline{A} = A$*) se, e solo se, esiste una matrice unitaria* U *tale che* ${}^t\overline{U}AU = U^{-1}AU$ *sia una matrice diagonale reale*.

Inoltre: *Una matrice complessa* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *commuta con la sua aggiunta, (ovvero* ${}^t\overline{A}A = A{}^t\overline{A}$*) se, e solo se, esiste una matrice unitaria* U *tale che* ${}^t\overline{U}AU = U^{-1}AU$ *sia una matrice diagonale*.

Si potrebbe enunciare e dimostrare in modo perfettamente analogo a quanto fatto nel caso dello spazio vettoriale euclideo la decomposizione e valori singolari di una matrice rettangolare complessa (i valori singolari sono ancora numeri reali positivi, ma le matrici di cambiamento di base sono matrici unitarie). Ugualmente, si potrebbe definire la pseudoinversa e mostrare un analogo risultato sulla soluzione dei sistemi lineari.