Spazi Vettoriali

maurizio candilera

October 1, 2018

Definizione di Spazio Vettoriale

Definizione

Sia K un campo fissato. Uno *Spazio Vettoriale* su K è un insieme (non vuoto) V dotato di due operazioni: somma tra vettori $+ : V \times V \to V$ e prodotto di un vettore per uno scalare $\cdot : K \times V \to V$, soddisfacenti alle seguenti proprietà. Per ogni u, v, w in V e ogni a, b in K, si ha

- $(u + v) + w = u + (v + w)$;
- $u + v = v + u$;
- esiste $0 \in V$ tale che $v + 0 = v = 0 + v$.
- dato v, esiste $-v \in V$ tale che $v + (-v) = 0 = (-v) + v$.
- $(ab)v = a(bv)$;
- $(a + b)v = av + bv$;
- $a(v + w) = av + aw$;
- $1v = v$.

Nella definizione e come sempre nel seguito, salvo diverso avviso, K è un campo qualsiasi.

Nella definizione e come sempre nel seguito, salvo diverso avviso, K è un campo qualsiasi. Diamo degli esempi di spazi vettoriali su un campo K.

- Sia $n \geq 1$ un numero intero fissato. Il prodotto cartesiano di n copie del campo K,

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in K, \; i = 1, \dots, n \right\}$$

è un K-spazio vettoriale con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}.$$

- Sia X un'indeterminata su K. I polinomi a coefficienti in K,

$$K[X] = \{\, a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mid a_i \in K,\ \ n \in \mathbb{N} \,\}$$

formano un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) + (b_0 + b_1X + \cdots + b_nX^n) &= \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n\end{aligned}$$

$$c(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = ca_0 + ca_1X + \cdots + ca_nX^n.$$

Ove si fa la solita convenzione di identificare due polinomi $a_0 + a_1X + \cdots + a_rX^r$ e $b_0 + b_1X + \cdots + b_{r+s}X^{r+s}$ se $a_i = b_i$ per $i = 0, \ldots, r$ e $b_i = 0$ per $i = r+1, \ldots, r+s$.

- Sia U un insieme non vuoto e K un campo. L'insieme $\mathscr{F}(U,K)$ di tutte le funzioni (insiemistiche) definite su U e a valori in K, è un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni tra funzioni:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (cf)(x) &= c\,f(x),\end{aligned} \qquad \text{per ogni } x \in U.$$

- Sia U un insieme non vuoto e K un campo. L'insieme $\mathscr{F}(U,K)$ di tutte le funzioni (insiemistiche) definite su U e a valori in K, è un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni tra funzioni:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (cf)(x) &= c\,f(x),\end{aligned}\qquad \text{per ogni } x \in U.$$

Se U è un insieme finito con n elementi, ad esempio $U = \{1,\dots,n\}$, identificando ogni funzione con la n-upla ordinata dei suoi valori, ritroviamo lo spazio vettoriale K^n dell'esempio iniziale.

- Sia U un insieme non vuoto e K un campo. L'insieme $\mathscr{F}(U, K)$ di tutte le funzioni (insiemistiche) definite su U e a valori in K, è un K-spazio vettoriale con le usuali operazioni tra funzioni:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \\ (cf)(x) &= c\,f(x), \end{aligned} \qquad \text{per ogni } x \in U.$$

Se U è un insieme finito con n elementi, ad esempio $U = \{1, \dots, n\}$, identificando ogni funzione con la n-upla ordinata dei suoi valori, ritroviamo lo spazio vettoriale K^n dell'esempio iniziale.
Se $K = \mathbb{R}$ e U un intervallo (non vuoto) della retta reale, abbiamo funzioni reali di una variabile reale, e possiamo pensare di identificare i polinomi $\mathbb{R}[X]$ ad un sottoinsieme dello spazio delle funzioni su U (in realtà un *sottospazio vettoriale*). [. . . e su un campo finito?]

- Siano n ed m due numeri interi positivi. Una *matrice* con m righe e n colonne ad elementi nel campo K è una tabella

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_{ij} \in K;$$

ove la coppia ordinata di indici (i, j) indica che l'elemento a_{ij} si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j.

- Siano n ed m due numeri interi positivi. Una *matrice* con m righe e n colonne ad elementi nel campo K è una tabella

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{con } a_{ij} \in K;$$

  ove la coppia ordinata di indici (i, j) indica che l'elemento a_{ij} si trova all'incrocio tra la riga i e la colonna j.

  L'insieme $M_{m\times n}(K)$ di tutte le matrici con m righe e n colonne ad entrate nel campo K è uno spazio vettoriale su K con le operazioni:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

In particolare, se $n = 1$, $M_{m\times 1}(K)$ coincide con lo spazio vettoriale K^m del primo esempio.

- L'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali positivi, è uno spazio vettoriale reale con le seguenti operazioni: la *somma* di x e y in $\mathbb{R}_{>0}$ è l'usuale prodotto di numeri reali, xy; e il *prodotto di* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *per uno scalare* $a \in \mathbb{R}$ è $x^a = \exp(a \log x)$.

- L'insieme $\mathbb{R}_{>0}$ dei numeri reali positivi, è uno spazio vettoriale reale con le seguenti operazioni: la *somma* di x e y in $\mathbb{R}_{>0}$ è l'usuale prodotto di numeri reali, xy; e il *prodotto di* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *per uno scalare* $a \in \mathbb{R}$ è $x^a = \exp(a \log x)$.

Si può generalizzare la definizione in modo naturale al prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{R}_{>0}$.

NOTA BENE

L'insieme $\mathbb{R}^2$ *non* è uno spazio vettoriale se poniamo le operazioni:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Valgono tutti gli assiomi, eccetto l'ultimo.
Infatti, se $y \neq 0$, $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Osservazioni

Sia V uno spazio vettoriale su K.

(a) Sia $0_K \in K$ e $v \in V$, allora $0_K v = 0_V$.

(b) Sia $0_V \in V$ e $c \in K$, allora $c0_V = 0_V$.

(c) Dato $v \in V$, l'opposto $-v \in V$ è unico e $-v = (-1)v$.

dim. (*a*) Si ha $0_K v = (0_K + 0_K)v = 0_K v + 0_K v$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-0_K v$, opposto di $0_K v$, si ricava l'uguaglianza $0_V = 0_K v + 0_V = 0_K v$.

(*b*) Si ha $c0_V = c(0_V + 0_V) = c0_V + c0_V$. Sommando ai due membri dell'uguaglianza un vettore $-c0_V$, opposto di $c0_V$, si ricava $0_V = c0_V + 0_V = c0_V$.

(*c*) Siano v_1 e v_2 soddisfacenti alle condizioni $v_1 + v = 0 = v + v_1$ e $v_2 + v = 0 = v + v_2$. Allora

$$v_1 = v_1 + 0 = v_1 + (v + v_2) = (v_1 + v) + v_2 = 0 + v_2 = v_2.$$

È quindi sufficiente dimostrare che $v + (-1)v = 0 = (-1)v + v$. Infatti, si ha

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 - 1)v = 0_K v = 0$$

Da quanto visto nell'osservazione precedente, si potrebbe dedurre che la commutatività della somma è conseguenza degli altri assiomi che definiscono uno spazio vettoriale. Infatti, presi due vettori qualsiasi, u e v in V, si ha

$$v + u = -((-u) + (-v)) = (-1)((-u) + (-v)) = \\ = (-1)(-u) + (-1)(-v) = u + v.$$

Ciò significa che avremmo potuto omettere tale assioma dalla definizione di spazio vettoriale e dedurlo come conseguenza.

Non ci addentriamo ulteriormente nell'indagare l'indipendenza degli assiomi e verifichiamo un'altra proprietà generale degli spazi vettoriali.

Da quanto visto nell'osservazione precedente, si potrebbe dedurre che la commutatività della somma è conseguenza degli altri assiomi che definiscono uno spazio vettoriale. Infatti, presi due vettori qualsiasi, u e v in V, si ha

$$v + u = -((-u) + (-v)) = (-1)((-u) + (-v)) = \\ = (-1)(-u) + (-1)(-v) = u + v.$$

Ciò significa che avremmo potuto omettere tale assioma dalla definizione di spazio vettoriale e dedurlo come conseguenza.
Non ci addentriamo ulteriormente nell'indagare l'indipendenza degli assiomi e verifichiamo un'altra proprietà generale degli spazi vettoriali.

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Presi comunque $v \in V$ e $c \in K$, si ha $cv = 0_V$ se, e solo se, $c = 0_K$ oppure $v = 0_V$.

dim. Abbiamo già visto che $cv = 0_V$ se uno dei due fattori è nullo. Viceversa, se $cv = 0_V$ e $c \neq 0_K$, allora esiste $c^{-1} \in K$ e

$$0_V = c^{-1}0_V = c^{-1}(cv) = (c^{-1}c)v = 1v = v.$$

Quindi, se $c \neq 0_K$, allora $v = 0_V$.

Sottospazi vettoriali

Definizione/Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Un sottoinsieme non vuoto U di V è un *sottospazio vettoriale* se, e solo se, soddisfa a una delle seguenti condizioni, tra loro equivalenti.

(a) U è chiuso per la restrizione delle operazioni di V.

(b) Presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K, il vettore $a_1u_1 + a_2u_2$ appartiene a U.

(c) Presi comunque u_1, u_2 in U e a in K i vettori $u_1 - u_2$ e au_1 appartengono a U.

Dobbiamo quindi verificare che le tre condizioni dell'enunciato sono equivalenti.

dim. $(a) \Rightarrow (b)$. Dire che U è *chiuso per la restrizione delle operazioni* di V, significa dire che, se due vettori stanno in U, allora anche la loro somma sta in U e che se un vettore sta in U anche il suo prodotto per qualsiasi scalare di K sta ancora in U. Allora è chiaro che, presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K i vettori a_1u_1 e a_2u_2 stanno in U e dunque che la loro somma ci sta.

dim. $(a) \Rightarrow (b)$. Dire che U è *chiuso per la restrizione delle operazioni* di V, significa dire che, se due vettori stanno in U, allora anche la loro somma sta in U e che se un vettore sta in U anche il suo prodotto per qualsiasi scalare di K sta ancora in U. Allora è chiaro che, presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K i vettori a_1u_1 e a_2u_2 stanno in U e dunque che la loro somma ci sta.
$(b) \Rightarrow (c)$. Presi comunque u_1, u_2 in U, e $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ in K allora $a_1u_1 + a_2u_2 = u_1 - u_2$ sta in U; analogamente, presi $a_1 = a$, $a_2 = 0$ in K allora $a_1u_1 + a_2u_2 = au_1$ sta in U.

dim. $(a) \Rightarrow (b)$. Dire che U è *chiuso per la restrizione delle operazioni* di V, significa dire che, se due vettori stanno in U, allora anche la loro somma sta in U e che se un vettore sta in U anche il suo prodotto per qualsiasi scalare di K sta ancora in U. Allora è chiaro che, presi comunque u_1, u_2 in U e a_1, a_2 in K i vettori a_1u_1 e a_2u_2 stanno in U e dunque che la loro somma ci sta.
$(b) \Rightarrow (c)$. Presi comunque u_1, u_2 in U, e $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ in K allora $a_1u_1 + a_2u_2 = u_1 - u_2$ sta in U; analogamente, presi $a_1 = a$, $a_2 = 0$ in K allora $a_1u_1 + a_2u_2 = au_1$ sta in U.
$(c) \Rightarrow (a)$. Presi comunque u_1, u_2 in U, allora anche $-u_2 = (-1)u_2$ appartiene ad U e quindi $u_1 + u_2 = u_1 - (-u_2)$ è in U e U è chiuso per la restrizione della somma. Se $u \in U$ e $a \in K$, allora $au \in U$, e perciò U è chiuso anche per la restrizione del prodotto per gli scalari di K. $\square$

Si osservi che per ogni sottospazio vettoriale U di V, si ha $0_V = u - u \in U$. Inoltre $\{0_V\}$ e V sono sottospazi vettoriali di V, detti i *sottospazi banali*.

Diamo ora una serie di esempi di sottospazi vettoriali.

- Nello spazio vettoriale K^n , siano fissati gli scalari $a_1, \dots, a_n$ e si consideri il sottoinsieme

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}.$$

U è un sottospazio vettoriale di K^n. Infatti, se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sono in U e $a \in K$, allora

$$a_1(x_1-y_1)+\cdots+a_n(x_n-y_n) = (a_1x_1+\cdots+a_nx_n)-(a_1y_1+\cdots+a_ny_n) = 0$$

e quindi $x - y \in U$ e, analogamente,

$$a_1(ax_1) + \cdots + a_n(ax_n) = a(a_1x_1 + \cdots + a_nx_n) = 0,$$

e quindi anche $ax \in U$ ed è soddisfatta la condizione (c) della definizione.

- Nello spazio vettoriale $K[X]$ dei polinomi a coefficienti in K, si fissi un intero n e si consideri il sottoinsieme

$$U = K[X]_{\leq n} = \{\ P(X) \in K[X] \mid \deg P(X) \leq n\ \}\,.$$

  U è un sottospazio vettoriale di $K[X]$. Infatti, la differenza di due polinomi di grado al più n ha anch'essa grado al più n e il prodotto di un polinomio di U per uno scalare non ne aumenta il grado.

Si ricordi la posizione $\deg 0 = -\infty$, per cui il polinomio nullo ha grado minore di ogni altro polinomio ed appartiene ad U qualunque sia n. In particolare, $\{0\} = K[X]_{\leq -1}$, $K = K[X]_{\leq 0}$, ecc.

- Nello spazio vettoriale $K[X]$ dei polinomi a coefficienti in K, si fissi un intero n e si consideri il sottoinsieme

$$U = K[X]_{\leq n} = \{\, P(X) \in K[X] \mid \deg P(X) \leq n \,\}.$$

  U è un sottospazio vettoriale di $K[X]$. Infatti, la differenza di due polinomi di grado al più n ha anch'essa grado al più n e il prodotto di un polinomio di U per uno scalare non ne aumenta il grado.

Si ricordi la posizione $\deg 0 = -\infty$, per cui il polinomio nullo ha grado minore di ogni altro polinomio ed appartiene ad U qualunque sia n. In particolare, $\{0\} = K[X]_{\leq -1}$, $K = K[X]_{\leq 0}$, ecc.

- Dato un intervallo non vuoto $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, l'insieme $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ di tutte le funzioni continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è un sottospazio dello spazio di tutte le funzioni $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$, perché chiuso per somma e prodotto per scalari.

- Nello spazio vettoriale $K[X]$ dei polinomi a coefficienti in K, si fissi un intero n e si consideri il sottoinsieme

$$U = K[X]_{\leq n} = \{\, P(X) \in K[X] \mid \deg P(X) \leq n \,\}.$$

  U è un sottospazio vettoriale di $K[X]$. Infatti, la differenza di due polinomi di grado al più n ha anch'essa grado al più n e il prodotto di un polinomio di U per uno scalare non ne aumenta il grado.

Si ricordi la posizione $\deg 0 = -\infty$, per cui il polinomio nullo ha grado minore di ogni altro polinomio ed appartiene ad U qualunque sia n. In particolare, $\{0\} = K[X]_{\leq -1}$, $K = K[X]_{\leq 0}$, ecc.

- Dato un intervallo non vuoto $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, l'insieme $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ di tutte le funzioni continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è un sottospazio dello spazio di tutte le funzioni $\mathscr{F}([a, b], \mathbb{R})$, perché chiuso per somma e prodotto per scalari.
- Nello spazio $\mathbb{R}^2$, i sottospazi non banali sono tutte e sole le rette per l'origine di equazione $ax + by = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$.

Diamo ora l'esempio di sottoinsiemi che *non* sono sottospazi vettoriali.

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ il sottoinsieme

$$C = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

  non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Infatti, $0 \notin C$, mentre ogni sottospazio contiene il vettore nullo.

Diamo ora l'esempio di sottoinsiemi che *non* sono sottospazi vettoriali.

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ il sottoinsieme

$$C = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}.$$

  non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. Infatti, $0 \notin C$, mentre ogni sottospazio contiene il vettore nullo.

- Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ il sottoinsieme

$$I = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0 \right\}.$$

  non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. In questo caso, $0 \in C$, ma I non è chiuso per le operazioni di $\mathbb{R}^2$. Infatti, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ appartengono a I, ma la loro somma $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ non soddisfa l'equazione $x^2 - y^2 = 0$.
  In realtà, I è l'unione di due sottospazi: quelli definiti dalle due equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 0$.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Dato un sottoinsieme non vuoto, S, di V, il *sottospazio vettoriale generato da* S è l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti in K di elementi di S, ovvero

$$\langle S \rangle = \{\, a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n \,|\, a_1, \ldots, a_n \in K,\ s_1, \ldots, s_n \in S,\ n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Si pone inoltre $\langle \varnothing \rangle = \{0_V\}$.

È chiaro che $\langle S \rangle$ soddisfa la proprietà (b) della definizione di sottospazio. Inoltre, ogni sottospazio U che contenga S contiene tutte le combinazioni lineari di elementi di S, per cui $S \subseteq U \implies \langle S \rangle \subseteq U$. Se $S = \{\, v_1, \ldots, v_n \,\}$, scriveremo $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ al posto di $\langle \{\, v_1, \ldots, v_n \,\} \rangle$ per non appesantire la notazione. Dunque

$$\langle v \rangle = \{\, av \,|\, a \in K \,\}, \quad \langle v, w \rangle = \left\{\, av + bw \,|\, (a, b) \in K^2 \,\right\}, \quad \text{etc.}$$

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Presa comunque una famiglia $(U_i)_{i\in I}$ di sottospazi di V, l'intersezione $\bigcap_{i\in I} U_i$ di tutti i sottospazi della famiglia è un sottospazio vettoriale di V.

dim. L'intersezione non è vuota perché 0_V appartiene a tutti i sottospazi di V. Inoltre, presi comunque due vettori u e v nell'intersezione e due scalari a e b in K, il vettore $au + bv$ appartiene a tutti i sottospazi U_i della famiglia e quindi all'intersezione, che è perciò un sottospazio vettoriale. □

Dato un sottoinsieme S di V, per ogni sottospazio U, si ha $S \subseteq U \implies \langle S\rangle \subseteq U$ e quindi $\langle S\rangle = \bigcap_{S\subseteq U} U$. In particolare, $\langle 0\rangle = \{0\}$ è l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di V.

In generale l'unione di sottospazi vettoriali di V *non* è un sottospazio vettoriale, come abbiamo visto in un esempio precedente. Vale la seguente

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U e W due sottospazi di V. Allora $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale di V se, e solo se, $U \subseteq W$ oppure $W \subseteq U$.

dim. È chiaro che, se i sottospazi U e W sono uno contenuto nell'altro, l'unione è il più grande tra i due ed è quindi un sottospazio. Viceversa, se $U \not\subseteq W$ e $W \not\subseteq U$ esistono, un elemento $u_0 \in U \setminus W$ e un elemento $w_0 \in W \setminus U$. Se $U \cup W$ fosse un sottospazio vettoriale la somma $u_0 + w_0$ dovrebbe appartenere all'unione e quindi a uno dei due sottospazi, ma se fosse $u_0 + w_0 = u \in U$, si avrebbe $w_0 = u - u_0 \in U$ contro le ipotesi e, analogamente, se $u_0 + w_0 = w \in W$, si avrebbe $u_0 = w - w_0 \in W$, di nuovo contro le ipotesi. Dunque l'unione non può contenere $u_0 + w_0$ e quindi non è un sottospazio. □

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U e W due sottospazi di V. La *somma* dei due sottospazi è il sottospazio

$$U + W = \{\, u + w \mid u \in U,\, w \in W \,\}.$$

Se inoltre, $U \cap W = \langle 0 \rangle$, si dice che U e W sono in *somma diretta* e si scrive $U \oplus W$ per indicare la loro somma.

Osserviamo che $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V e, precisamente, $U + W = \langle U \cup W \rangle$. Per definizione di sottospazio generato, $U + W \subseteq \langle U \cup W \rangle$. Viceversa, il generico elemento di $\langle U \cup W \rangle$ è una combinazione lineare

$$a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r + b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s,$$

ove $a_1, \dots, a_r$ e $b_1, \dots, b_s$ sono in K, $u_1, \dots, u_r$ in U e $w_1, \dots, w_s$ in W. Essendo U e W dei sottospazi, si ha $a_1 u_1 + \cdots + a_r u_r = u \in U$ e $b_1 w_1 + \cdots + b_s w_s = w \in W$ e quindi vale anche l'inclusione reciproca $\langle U \cup W \rangle \subseteq U + W$. □

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U e W due sottospazi di V. Se U e W sono in *somma diretta*, allora ogni elemento di $U \oplus W$ si scrive *in modo unico* come somma di un elemento di U e di un elemento di W.

dim. Che ogni elemento di $U \oplus W$ sia somma di un elemento di U con uno di W, è la definizione di somma di sottospazi. Se si ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, con u_1, u_2 in U e w_1, w_2 in W, allora

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \langle 0 \rangle , \quad \text{e quindi} \quad u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0,$$

da cui si conclude che $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$. □

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K e siano U e W due sottospazi di V. Se U e W sono in *somma diretta*, allora ogni elemento di $U \oplus W$ si scrive *in modo unico* come somma di un elemento di U e di un elemento di W.

dim. Che ogni elemento di $U \oplus W$ sia somma di un elemento di U con uno di W, è la definizione di somma di sottospazi. Se si ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, con u_1, u_2 in U e w_1, w_2 in W, allora

$$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \langle 0 \rangle, \quad \text{e quindi} \quad u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0,$$

da cui si conclude che $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$. □

Questo significa che ogni elemento di $U \oplus W$ determina i suoi addendi in U e W, ovvero che questi sono *funzioni* della somma. Useremo questa proprietà per definire le proiezioni (e le simmetrie), associate alla somma $U \oplus W$ quando quest'ultima coincide con lo spazio V.

Equazioni parametriche e cartesiane

Abbiamo visto che le soluzioni di un'equazione lineare omogenea nelle coordinate $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ formano un sottospazio vettoriale di K^n. Poiché l'intersezione di sottospazi è ancora un sottospazio vettoriale, possiamo affermare che un sistema di equazioni lineari omogenee nelle coordinate definisce un sottospazio vettoriale di K^n.

Equazioni parametriche e cartesiane

Abbiamo visto che le soluzioni di un'equazione lineare omogenea nelle coordinate $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ formano un sottospazio vettoriale di K^n. Poiché l'intersezione di sottospazi è ancora un sottospazio vettoriale, possiamo affermare che un sistema di equazioni lineari omogenee nelle coordinate definisce un sottospazio vettoriale di K^n.

Esempio: Il sistema lineare $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ definisce un sottospazio vettoriale, U, di $\mathbb{Q}^4$ formato dalle *soluzioni* del sistema. È chiaro che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \iff \begin{cases} x_3 = 3x_1 + 5x_2 \\ x_4 = 2x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad \text{dunque} \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_1+5x_2 \\ 2x_1-3x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2 \right\}.$$

Poiché $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 3x_1+5x_2 \\ 2x_1-3x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, si conclude che $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$,

ovvero è il sottospazio di $\mathbb{Q}^4$ generato dai due vettori (l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$ dei due vettori).

L'esempio precedente può essere facilmente generalizzato; ovvero:

metodo di sostituzione

Ogni volta che si ha un sistema lineare omogeneo nelle coordinate dei vettori di K^n, si possono usare le equazioni per ricavare alcune delle incognite in funzione delle rimanenti, che restano libere di variare in modo arbitrario nel campo K e trovare così dei generatori del sottospazio vettoriale delle soluzioni.

L'esempio precedente può essere facilmente generalizzato; ovvero:

metodo di sostituzione

Ogni volta che si ha un sistema lineare omogeneo nelle coordinate dei vettori di K^n, si possono usare le equazioni per ricavare alcune delle incognite in funzione delle rimanenti, che restano libere di variare in modo arbitrario nel campo K e trovare così dei generatori del sottospazio vettoriale delle soluzioni.

Diamo un altro esempio.

Esempio : Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dal sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
. Dalle ultime due equazioni si ricava
$$\begin{cases} x_4 = 2x_2 + x_3 \\ x_1 = 4x_2 - 2x_3 \end{cases}$$
che, sostituite nella prima equazione danno un'identità $(0 = 0)$.

Si conclude che
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 4x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

I nuovi generatori di W li abbiamo trovati esprimendo x_1 e x_3 in funzione di x_2 e x_4.

Possiamo procedere al contrario e ricavare equazioni cartesiane per un sottospazio di K^n di cui sia noto un insieme di generatori. Andiamo a vedere un esempio.

Esempio: Dato il sottospazio di $\mathbb{R}^4$, $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, i suoi elementi sono le combinazioni lineari dei generatori, ovvero

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in U \iff \begin{cases} x_1 = 2a \\ x_2 = -a + b \\ x_3 = -3b \\ x_4 = 3a + 2b \end{cases} \quad \text{e si ricava} \quad \begin{cases} a = \frac{x_1}{2} \\ b = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = -\frac{x_1}{2} - \frac{x_3}{3} \\ x_4 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni non contengono più i parametri a e b, e quindi

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 9x_1 - 4x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di equazioni cartesiane che definisce il sottospazio U.

metodo di eliminazione dei parametri

Ogni vettore del sottospazio $U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ di K^n si scrive come combinazione lineare $a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$. Le sue coordinate sono quindi combinazioni dei parametri $a_1, \ldots, a_k$ moltiplicati per le corrispondenti coordinate dei generatori $u_1, \ldots, u_k$. Ricavando i parametri in funzione delle coordinate e sostituendo nelle rimanenti equazioni, si eliminano i parametri ottenendo equazioni cartesiane per il sottospazio U.

metodo di eliminazione dei parametri

Ogni vettore del sottospazio $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ di K^n si scrive come combinazione lineare $a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k$. Le sue coordinate sono quindi combinazioni dei parametri $a_1, \dots, a_k$ moltiplicati per le corrispondenti coordinate dei generatori $u_1, \dots, u_k$. Ricavando i parametri in funzione delle coordinate e sostituendo nelle rimanenti equazioni, si eliminano i parametri ottenendo equazioni cartesiane per il sottospazio U.

Diamo un altro esempio della tecnica utilizzata sopra.

Esempio: In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Allora

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in W \iff \begin{cases} x_1 = a + 2c \\ x_2 = 2a + 3b + c \\ x_3 = -b + c \\ x_4 = 3a + 2b + 4c \end{cases} \quad \text{e si ricava} \quad \begin{cases} a = x_1 - 2c \\ b = -x_3 + c \\ x_2 = 2x_1 - 3x_3 \\ x_4 = 3x_1 - 2x_3 \end{cases}$$

Le ultime due equazioni non contengono più i parametri a, b, c, e quindi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di equazioni cartesiane che definisce W.

Riassumendo, possiamo descrivere i vettori del sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

come i vettori le cui coordinate si scrivono come

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 3a - b \\ x_3 = b \\ x_4 = -2a - 5b \end{cases} \quad \text{con } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; \qquad \boxed{\text{Equazioni parametriche}}$$

oppure come le soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee

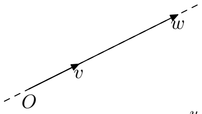
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\text{Equazioni cartesiane}}$$

Abbiamo visto negli esempi precedenti come passare da una rappresentazione all'altra.

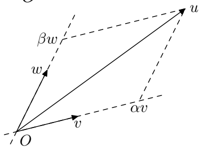
Dipendenza e indipendenza lineare

Si possono identificare gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ rispettivamente con il piano e lo spazio degli usuali vettori geometrici (in cui la somma si fà con la regola del parallelogramma). Le relazioni di parallelismo o di complanarità tra vettori geometrici si traducono in relazioni algebriche; ovvero, ricordando che nello spazio vettoriale dei vettori geometrici i vettori si applicano nell'origine, si ha

(a) due vettori v e w di $\mathbb{R}^3$ sono *paralleli* se, e solo se, $\exists(a,b) \neq (0,0)$ tale che $av + bw = 0$; ovvero se e solo se i due vettori sono proporzionali.



(b) tre vettori u, v, w di $\mathbb{R}^3$ sono *complanari* se, e solo se, $\exists(a,b,c) \neq (0,0,0)$ tale che $au + bv + cw = 0$; ovvero se, e solo se, uno dei tre vettori si può scrivere come somma di multipli (combinazione lineare) degli altri due.



Generalizziamo quanto descritto sopra ad un qualunque spazio vettoriale.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono in K degli scalari $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tali che $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$.

Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora *uno di questi si può scrivere come combinazione lineare dei precedenti*. Infatti, se $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, sia j il massimo indice per cui $a_j \neq 0$; allora dalla relazione di dipendenza lineare si ricava

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 + \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j} v_{j-1}.$$

Generalizziamo quanto descritto sopra ad un qualunque spazio vettoriale.

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono in K degli scalari $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ tali che $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$.

Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti, allora *uno di questi si può scrivere come combinazione lineare dei precedenti*. Infatti, se $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$, sia j il massimo indice per cui $a_j \neq 0$; allora dalla relazione di dipendenza lineare si ricava

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 + \cdots - \frac{a_{j-1}}{a_j} v_{j-1}.$$

I vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono *linearmente indipendenti* se *non* sono dipendenti.

Osservazione

Sia V uno spazio vettoriale su K. I vettori $v_1, \dots, v_n$ sono *linearmente indipendenti* se l'unico modo di scrivere $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ si ha per $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Base di uno spazio vettoriale

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una *base* di V è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti.

Base di uno spazio vettoriale

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una *base* di V è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti.

Possiamo quindi dimostrare la seguente

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K e $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.

Base di uno spazio vettoriale

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale su K. Una *base* di V è un insieme di generatori di V linearmente indipendenti.

Possiamo quindi dimostrare la seguente

Proposizione

Sia V uno spazio vettoriale su K e $v_1, \dots, v_n$ una base di V. Allora ogni vettore di V si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.

dim. Poiché $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, ogni vettore $v \in V$ si scrive come combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_n$. La scrittura è unica perché, dall'uguaglianza

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n \quad \text{si ricava} \quad (a_1 - b_1) v_1 + \cdots + (a_n - b_n) v_n = 0,$$

e quindi $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0$ perché $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. Ovvero $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$. $\square$

Diamo alcuni esempi di basi.

- Nello spazio vettoriale K^n la *base canonica* $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ è costituita dai vettori
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$
(ovvero, tutte le entrate della colonna e_j sono nulle, con l'eccezione di quella di posto j, uguale a 1).
- Nello spazio vettoriale dei polinomi $K[X]$ la *base canonica* è costituita dai vettori dell'insieme $\mathcal{X} = \{ X^n \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ 1, X, X^2, \dots \}$.
- Nello spazio vettoriale delle matrici $M_{m\times n}(K)$ la *base canonica* è
$$\mathcal{B} = \{ \varepsilon(i,j) \mid i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n \},$$
ove $\varepsilon(i,j)$ è la matrice che ha tutte le entrate nulle eccetto quella di posto (i,j), uguale a 1. Ad esempio, in $M_{2\times 3}(K)$ è la base
$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\1&0&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

NOTA BENE

Anche se uno spazio vettoriale ha una base canonica, in generale non ci sono basi canoniche per i suoi sottospazi

Coordinate associate a una base ordinata

Per quanto visto nella Proposizione precedente, fissata una base ordinata, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, dello spazio vettoriale V su K, resta associata una *corrispondenza biunivoca*

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{V}} : K^n \to V \quad \text{definita da} \quad \alpha_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.}$$

Dato il vettore $v \in V$, chiamiamo *coordinate di* v *nella base* $\mathcal{V}$ la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ tale che $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Coordinate associate a una base ordinata

Per quanto visto nella Proposizione precedente, fissata una base ordinata, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, dello spazio vettoriale V su K, resta associata una *corrispondenza biunivoca*

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{V}} : K^n \to V \quad \text{definita da} \quad \alpha_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n.}$$

Dato il vettore $v \in V$, chiamiamo *coordinate di* v *nella base* $\mathcal{V}$ la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ tale che $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Nella biiezione $\alpha_{\mathcal{V}}$ le operazioni sulle coordinate si trasformano nelle operazioni dello spazio vettoriale V, ovvero se x e y sono in K^n e $c \in K$, allora $\alpha_{\mathcal{V}}(x + y) = \alpha_{\mathcal{V}}(x) + \alpha_{\mathcal{V}}(y)$ e $\alpha_{\mathcal{V}}(cx) = c\alpha_{\mathcal{V}}(x)$.

Coordinate associate a una base ordinata

Per quanto visto nella Proposizione precedente, fissata una base ordinata, $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, dello spazio vettoriale V su K, resta associata una *corrispondenza biunivoca*

$$\boxed{\alpha_{\mathcal{V}} : K^n \to V \quad \text{definita da} \quad \alpha_{\mathcal{V}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n.}$$

Dato il vettore $v \in V$, chiamiamo *coordinate di* v *nella base* $\mathcal{V}$ la colonna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ tale che $v = \alpha_{\mathcal{V}}(x) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Nella biiezione $\alpha_{\mathcal{V}}$ le operazioni sulle coordinate si trasformano nelle operazioni dello spazio vettoriale V, ovvero se x e y sono in K^n e $c \in K$, allora $\alpha_{\mathcal{V}}(x + y) = \alpha_{\mathcal{V}}(x) + \alpha_{\mathcal{V}}(y)$ e $\alpha_{\mathcal{V}}(cx) = c\alpha_{\mathcal{V}}(x)$.

Usando le coordinate associate alla base $\mathcal{V}$, possiamo parlare di equazioni parametriche e cartesiane per i sottospazi vettoriali di V.

Teorema di struttura

Lo spazio vettoriale $V = \{0\}$, costituito dal solo vettore nullo, *non* ha una base; perché il suo unico elemento non è linearmente indipendente.

Teorema di struttura

Lo spazio vettoriale $V = \{0\}$, costituito dal solo vettore nullo, *non* ha una base; perché il suo unico elemento non è linearmente indipendente.

Il risultato più importante di questa sezione è che ogni spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ ha (almeno) una base e che tutte le basi di uno stesso spazio hanno lo stesso numero di elementi (ovvero due basi di uno stesso spazio possono essere messe in corrispondenza biunivoca l'una con l'altra).

Teorema di struttura

Lo spazio vettoriale $V = \{0\}$, costituito dal solo vettore nullo, *non* ha una base; perché il suo unico elemento non è linearmente indipendente.

Il risultato più importante di questa sezione è che ogni spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ ha (almeno) una base e che tutte le basi di uno stesso spazio hanno lo stesso numero di elementi (ovvero due basi di uno stesso spazio possono essere messe in corrispondenza biunivoca l'una con l'altra).

Daremo una dimostrazione di questo fatto nell'ipotesi che lo spazio vettoriale V sia finitamente generato, ovvero esista un insieme finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ tali che $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, per evitare di dover introdurre le tecniche necessarie per lavorare con insiemi infiniti. (si vedano, ad esempio, le pagine su moodle)

Teorema di struttura

Lo spazio vettoriale $V = \{0\}$, costituito dal solo vettore nullo, *non* ha una base; perché il suo unico elemento non è linearmente indipendente.

Il risultato più importante di questa sezione è che ogni spazio vettoriale $V \neq \{0\}$ ha (almeno) una base e che tutte le basi di uno stesso spazio hanno lo stesso numero di elementi (ovvero due basi di uno stesso spazio possono essere messe in corrispondenza biunivoca l'una con l'altra).

Daremo una dimostrazione di questo fatto nell'ipotesi che lo spazio vettoriale V sia finitamente generato, ovvero esista un insieme finito di vettori $v_1, \dots, v_n$ tali che $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, per evitare di dover introdurre le tecniche necessarie per lavorare con insiemi infiniti. (si vedano, ad esempio, le pagine su moodle)

Alla luce del risultato che abbiamo enunciato, possiamo dare la seguente

Definizione

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K, si chiama *dimensione* di V su K il numero di elementi (cardinalità) di una base di V. In simboli, scriveremo $\dim_K V$ per indicare la dimensione di V su K. Infine, poniamo, sempre per definizione, $\dim \{0\} = 0$.

Teorema (struttura degli spazi vettoriali)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K. Allora

(a) Esiste almeno una base per V.

(b) Due basi di V possono essere messe in corrispondenza biunivoca.

Teorema (struttura degli spazi vettoriali)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K. Allora

(a) Esiste almeno una base per V.

(b) Due basi di V possono essere messe in corrispondenza biunivoca.

dim. (nell'ipotesi che V sia finitamente generato)
(*a*) Sia $v_1, \dots, v_n$ un insieme finito di generatori per V. Se fossero linearmente indipendenti, avremmo finito; altrimenti possiamo scrivere $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0$ con $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. A meno di cambiare l'ordine tra i generatori, non è restrittivo suppore che $a_n \neq 0$, e quindi

$$v_n = -\frac{a_1}{a_n} v_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n} v_{n-1} \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle , \quad \text{ovvero} \quad V = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle .$$

Se $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono indipendenti, abbiamo finito; altrimenti possiamo continuare allo stesso modo. Dopo un numero finito di passi il processo deve arrestarsi. Se non accadesse perché abbiamo trovato una base, dovremmo esaurire i generatori. Arrivati ad avere $V = \langle v_1 \rangle$, il vettore v_1 non sarebbe linearmente indipendente e quindi $v_1 = 0$, ma per ipotesi, $V \neq \{0\}$. Dunque il processo si arresta quando fornisce una base di V.

(b) L'affermazione discende dal seguente

Lemma di Scambio (Steiniz)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K e $v_1, \dots v_n$ un insieme di generatori di V e $w_1, \dots w_k$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti. Allora $k \leq n$.

(b) L'affermazione discende dal seguente

Lemma di Scambio (Steiniz)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K e $v_1, \dots v_n$ un insieme di generatori di V e $w_1, \dots w_k$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti. Allora $k \leq n$.

La dimostrazione di questo lemma mostra come costruire una corrispondenza (lo "scambio") tra i vettori indipendenti e k tra i generatori. Assumiamo come vero questo risultato e concludiamo la dimostrazione del teorema osservando che, date due basi $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di V, si ha che $v_1, \dots v_n$ sono generatori di V e $w_1, \dots w_m$ indipendenti; per cui $m \leq n$. D'altra parte, anche $w_1, \dots w_m$ sono generatori di V e $v_1, \dots v_n$ indipendenti; per cui $n \leq m$; ovvero $n = m$ e i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca (quella che manda v_i su w_i per $i = 1, \dots, n$). $\square$

Concludiamo il percorso con la dimostrazione del Lemma di Scambio.

Lemma di Scambio (Steiniz)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K e $v_1, \dots v_n$ un insieme di generatori di V e $w_1, \dots w_k$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti. Allora $k \leq n$.

Lemma di Scambio (Steiniz)

Sia $V \neq \{0\}$ uno spazio vettoriale sul campo K e $v_1, \dots v_n$ un insieme di generatori di V e $w_1, \dots w_k$ un insieme di vettori di V linearmente indipendenti. Allora $k \leq n$.

dim. Sia $w_1 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Poiché $w_1 \neq 0$, deve aversi $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ e, a meno di cambiare l'ordine dei vettori, possiamo supporre $a_1 \neq 0$, per cui

$$v_1 = \frac{1}{a_1} w_1 - \frac{a_2}{a_1} v_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n \quad \text{e quindi} \quad \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V.$$

Poiché w_1, w_2 sono indipendenti, si ha $w_2 = b_1 w_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n$, con $(b_2, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$ e, come sopra, possiamo supporre $b_2 \neq 0$, per cui

$$v_2 = -\frac{b_1}{b_2} w_1 + \frac{1}{b_2} w_2 - \cdots - \frac{b_n}{b_2} v_n \quad \text{e quindi} \quad \langle w_1, w_2, v_3, \dots, v_n \rangle = \langle w_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V.$$

Possiamo proseguire analogamente e sostituire con ognuno dei w_i un diverso generatore di V, mantenendo ad ogni passo un sistema di generatori. Se fosse $n < k$, avremmo i generatori $w_1, \dots, w_n$ e $w_{n+1} = c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n$, contro l'ipotesi che i vettori $w_i \dots, w_k$ siano linearmente indipendenti. Dunque $k \leq n$ e il procedimento illustrato mette in biiezione gli indipendenti con una parte dei generatori. $\square$

Il Teorema di struttura e la sua dimostrazione sono ricchi di conseguenze, utili nel seguito. [Per una dimostrazione: farsela, oppure vedere il libro]

Corollario

Sia V uno spazio vettoriale su K di dimensione $n > 0$.

(i) Ogni insieme di generatori formato da n vettori è una base di V.

(ii) Ogni sottoinsieme di V formato da n vettori linearmente indipendenti è una base di V.

(iii) Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di V può essere completato ad una base di V, in particolare ha al più n elementi.

(iv) Ogni insieme di generatori di V contiene almeno una base di V, in particolare ha almeno n elementi.

(v) Se W è un sottospazio di V allora $\dim W \leq \dim V$ e vale l'uguaglianza se e solo se $W = V$.

Formula di Grassmann

Proposizione (Formula di Grassmann)

Siano U e W sottospazi di uno spazo vettoriale di dimensione finita. Allora, $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

dim. Sia $v_1, \dots, v_k$ una base di $U \cap W$ (nessun vettore, se $U \cap W = \langle 0 \rangle$) e si completino questi vettori a una base $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r$ di U e una base $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_s$ di W. La tesi è dimostrata se verifichiamo che $v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_r, w_{k+1}, \dots, w_s$ è una base di $U + W$.

Formula di Grassmann

Proposizione (Formula di Grassmann)

Siano U e W sottospazi di uno spazo vettoriale di dimensione finita. Allora, $\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W$.

dim. Sia $v_1,\dots,v_k$ una base di $U\cap W$ (nessun vettore, se $U\cap W=\langle 0\rangle$) e si completino questi vettori a una base $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_r$ di U e una base $v_1,\dots,v_k,w_{k+1},\dots,w_s$ di W. La tesi è dimostrata se verifichiamo che $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_r,w_{k+1},\dots,w_s$ è una base di $U+W$.
Ogni vettore $u+w\in U+W$ si scrive come
$(a_1v_1+\cdots+a_kv_k+a_{k+1}u_{k+1}+\cdots+a_ru_r)+(b_1v_1+\cdots+b_kv_k+b_{k+1}w_{k+1}+\cdots+b_sw_s)$
e quindi i vettori dati sono *generatori* di $U+W$.

Formula di Grassmann

Proposizione (Formula di Grassmann)

Siano U e W sottospazi di uno spazo vettoriale di dimensione finita. Allora, $\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W$.

dim. Sia $v_1,\dots,v_k$ una base di $U\cap W$ (nessun vettore, se $U\cap W=\langle 0\rangle$) e si completino questi vettori a una base $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_r$ di U e una base $v_1,\dots,v_k,w_{k+1},\dots,w_s$ di W. La tesi è dimostrata se verifichiamo che $v_1,\dots,v_k,u_{k+1},\dots,u_r,w_{k+1},\dots,w_s$ è una base di $U+W$.
Ogni vettore $u+w\in U+W$ si scrive come
$(a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}u_{k+1}+\dots+a_ru_r)+(b_1v_1+\dots+b_kv_k+b_{k+1}w_{k+1}+\dots+b_sw_s)$
e quindi i vettori dati sono *generatori* di $U+W$.
Inoltre, se
$a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}u_{k+1}+\dots+a_ru_r+b_{k+1}w_{k+1}+\dots+b_sw_s=0$, allora $a_1v_1+\dots+a_kv_k+a_{k+1}u_{k+1}+\dots+a_ru_r=-b_{k+1}w_{k+1}-\dots-b_sw_s\in U\cap W$, e quindi si scrive *in modo unico* come combinazione lineare dei soli $v_1,\dots,v_k$, per cui $a_{k+1}=\dots=a_r=0=b_{k+1}=\dots=b_s$ e $a_1v_1+\dots+a_kv_k=0$. Si conclude che anche $a_1=\dots=a_k=0$, perché $v_1,\dots,v_k$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Esercizi e Complementi

Facciamo qualche calcolo esplicito sui sottospazi e le loro basi.

Esercizio : Siano $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Q}^4$ e $U = \langle u_1, \dots, u_4 \rangle$. Vogliamo trovare tutte le basi di U contenute in $\{u_1, \dots, u_4\}$.

Esercizi e Complementi

Facciamo qualche calcolo esplicito sui sottospazi e le loro basi.

Esercizio : Siano $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Q}^4$ e $U = \langle u_1, \dots, u_4 \rangle$. Vogliamo trovare tutte le basi di U contenute in $\{u_1, \dots, u_4\}$.

$$x_1u_1 + \dots + x_4u_4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_2 = -x_4 & (II) \\ x_1 = -2x_4 & (IV) \\ x_3 = 0 & (I) \\ 0 = 0 & (III) \end{cases}.$$

Dunque $2u_1 + u_2 - u_4 = 0$ e i generatori di U sono linearmente dipendenti. Come nella dimostrazione del Teorema di struttura, possiamo eliminare uno qualsiasi dei tre vettori coinvolti nella relazione lineare e avere così una base di U. Dunque l'insieme $\{u_1, \dots, u_4\}$ contiene tre basi di U, ovvero

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \quad \{u_1, u_3, u_4\}, \quad \{u_2, u_3, u_4\}.$$

Continua: Siano ora $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Q}^4$ e $W = \langle w_1, \dots, w_4 \rangle$. Vogliamo trovare la dimensione e una base di W e basi per $U \cap W$ e $U + W$.

Continua : Siano ora $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Q}^4$ e $W = \langle w_1, \dots, w_4 \rangle$. Vogliamo trovare la dimensione e una base di W e basi per $U \cap W$ e $U + W$.

$$x_1w_1 + \cdots + x_4w_4 = 0 \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_4 \\ x_3 = x_2 - x_4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Dunque $w_2 = 2w_1 - w_3$ e $w_4 = w_1 + w_3$, per cui $W = \langle w_1, w_3 \rangle$ e $\dim W = 2$.

Il sottospazio U ha dimensione 3 e equazione cartesiana $3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$.

Un vettore $aw_1 + bw_3$ di W sta nell'intersezione se, e solo se, le sue coordinate soddisfano l'equazione cartesiana di U, ovvero $2a - 11b = 0$. Dunque $U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -22 \\ 15 \end{pmatrix} \right\rangle$ e, tramite la Formula di Grassmann, si ha $\dim(U + W) = 3 + 2 - 1 = 4$. Si conclude che $U + W = \mathbb{Q}^4$ e una sua base è, ad esempio, la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_4\}$. □

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, si considerino i vettori $v_1 = e_1 - 3e_3$, $v_2 = e_3 - e_2$, $v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v_4 = 2e_1 + e_3$.

(a) Si determini una relazione lineare non banale tra $v_1, \dots, v_4$.

(b) Siano $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W = \langle v_3, v_4 \rangle$. Si determinino la dimensione e una base dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$. Si dica se $U + W = U \oplus W$.

(c) Si dica se il vettore $v = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ appartiene a qualcuno tra U, W, $U \cap W$, $U + W$.

(d) Si determini, se esiste, un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^3$.

Esercizio: In $\mathbb{R}^3$, con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$, si considerino i vettori $v_1 = e_1 - 3e_3$, $v_2 = e_3 - e_2$, $v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $v_4 = 2e_1 + e_3$.

(a) Si determini una relazione lineare non banale tra $v_1, \dots, v_4$.

(b) Siano $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W = \langle v_3, v_4 \rangle$. Si determinino la dimensione e una base dei sottospazi $U \cap W$ e $U + W$. Si dica se $U + W = U \oplus W$.

(c) Si dica se il vettore $v = 2e_1 - 3e_2 + e_3$ appartiene a qualcuno tra U, W, $U \cap W$, $U + W$.

(d) Si determini, se esiste, un sottospazio $L \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $U \oplus L = W \oplus L = \mathbb{R}^3$.

Svolg.: (*a*) Con calcoli diretti si ottiene $2v_1 - v_4 = -7e_3$ e $v_2 + v_3 - v_4 = e_3$, da cui si deduce $2v_1 + 7v_2 + 7v_3 - 8v_4 = 0$.

(*b*) Un'equazione cartesiana per U è $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$, che non è soddisfatta da v_3, quindi $U + \langle v_3 \rangle$ ha dimensione $3 = \dim \mathbb{R}^3$. Dunque, $U + W = \mathbb{R}^3$ e, per la formula di Grassmann, $\dim(U \cap W) = 1$. Dalla relazione in (*a*) , si ricava che $2v_1 + 7v_2 = 8v_4 - 7v_3 \in U \cap W$ e perciò $U \cap W = \langle 2v_1 + 7v_2 \rangle = \langle 2e_1 - 7e_2 + e_3 \rangle$. La somma $U + W$ non è diretta.

(*c*) $v \notin U$ perché non soddisfa l'equazione cartesiana $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (e quindi $v \notin U \cap W$). Inoltre, sempre con un calcolo diretto, $v = 4v_4 - 3v_3$, per cui $v \in W$. Certamente $v \in U + W = \mathbb{R}^3$.

(*d*) Per trovare una tale sottospazio L, è sufficiente trovare un vettore $v_0 \notin U \cup W$. Ad esempio, $v_0 = e_1$. Preso $L = \langle v_0 \rangle$ si conclude. $\square$

Esercizio : Verificare che $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^4$ e trovare equazioni cartesiane per $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Si completi l'insieme $\{u_1, u_2, u_3\}$ ad una base di $\mathbb{C}^4$.

Si determini un sottospazio W_0 tale che $\mathbb{C}^4 = U \oplus W_0$. È possibile determinare *tutti* i sottospazi, W, tali che $\mathbb{C}^4 = U \oplus W$, tramite i generatori di U e W_0?

Esercizio : Verificare che $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}^4$ e trovare equazioni cartesiane per $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$. Si completi l'insieme $\{u_1, u_2, u_3\}$ ad una base di $\mathbb{C}^4$.
Si determini un sottospazio W_0 tale che $\mathbb{C}^4 = U \oplus W_0$. È possibile determinare *tutti* i sottospazi, W, tali che $\mathbb{C}^4 = U \oplus W$, tramite i generatori di U e W_0?

Svolg.: Si ha

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0 \iff \begin{cases} z_1 = a + b = 0 \\ z_2 = b + c = 0 \\ z_3 = -2a - b + c = 0 \\ z_4 = -c = 0 \end{cases} \iff a = b = c = 0.$$

Il sistema descrive le coordinate (in base canonica) dei vettori di U in funzione dei parametri (a, b, c). Eliminando i parametri si ottiene l'equazione cartesiana di $U : 2z_1 - z_2 + z_3 = 0$. Per completare i vettori dati a una base di $\mathbb{C}^4$ serve un qualsiasi vettore w_0 che non appartenga a U, ovvero un vettore le cui coordinate *non* soddisfino l'equazione cartesiana di U. Possiamo quindi prendere $W_0 = \langle w_0 \rangle$, con $w_0 = e_1$. I quattro vettori w_0, u_1, u_2, u_3 sono quindi una base di $\mathbb{C}^4$ e $\mathbb{C}^4 = U \oplus W_0$. I vettori $x_0w_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$ che non appartengono a U sono quelli per cui $x_0 \neq 0$. Dunque ogni altro complementare W di U sarà $W = \langle w_0 + x_1u + x_2v + x_3w \rangle$, al variare di $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$. □

Operazioni elementari (Gauss)

Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono due basi (ordinate) di un K-spazio vettoriale V, possiamo scrivere (in modo unico) i vettori della base $\mathcal{W}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{V}$. Possiamo arrivare a questa scrittura iterando un numero finito di *operazioni elementari* sui vettori della base $\mathcal{V}$.

Precisamente, dato un insieme finito di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$, possiamo

- scambiare di posto due dei vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$;
- moltiplicare uno dei vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ per uno scalare $c \neq 0$;
- sostituire v_i con $v_i + av_j$ per un qualche indice $j \neq i$ e $a \in K$.

È immediata la verifica che, se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V (risp. indipendenti), applicando operazioni elementari a $v_1, \dots, v_n$ si ottengono ancora generatori di V (risp. indipendenti).

Proposizione

Se $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ sono due basi ordinate di un K-spazio vettoriale V, possiamo ottenere i vettori della base $\mathcal{W}$ iterando un numero finito di operazioni elementari sui vettori della base $\mathcal{V}$.

dim. Facciamo induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$ allora $w_1 = cv_1$ per qualche $c \in K \smallsetminus \{0\}$ e la tesi è verificata. Sia quindi $n > 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale di dimensione $n - 1$.

Proposizione

Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono due basi ordinate di un K-spazio vettoriale V, possiamo ottenere i vettori della base $\mathcal{W}$ iterando un numero finito di operazioni elementari sui vettori della base $\mathcal{V}$.

dim. Facciamo induzione su $n = \dim V$. Se $n = 1$ allora $w_1 = cv_1$ per qualche $c \in K \smallsetminus \{0\}$ e la tesi è verificata. Sia quindi $n > 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per due basi qualsiasi di uno spazio vettoriale di dimensione $n - 1$. Scriviamo i vettori della base $\mathcal{V}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{n1}w_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{1n}w_1 + \cdots + a_{nn}w_n \end{aligned}$$

e osserviamo che deve aversi $a_{1i} \neq 0$ per qualche i. Altrimenti i vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_n$ starebbero nel sottospazio $\langle w_2, \dots, w_n \rangle$ contraddicendo il Lemma di scambio. Sia v_{i_0} il minimo indice per cui ciò accade. [segue]

Facciamo una prima serie di operazioni elementari prendendo

$$v'_1 = v_{i_0}, \qquad v'_{i_0} = v_1, \qquad v'_i = v_i - \frac{a_{1i}}{a_{1i_0}} v_{i_0}, \text{ per } 1 < i \neq i_0.$$

I vettori $v'_2, \dots, v'_n$ sono linearmente indipendenti e contenuti in $\langle w_2, \dots, w_n \rangle$; sono quindi una base di tale spazio e, per l'ipotesi induttiva, con un numero finito di operazioni elementari, possiamo ottenere da $v'_2, \dots, v'_n$ i vettori $w_2, \dots, w_n$.

Facciamo una prima serie di operazioni elementari prendendo

$$v'_1 = v_{i_0}, \qquad v'_{i_0} = v_1, \qquad v'_i = v_i - \frac{a_{1i}}{a_{1i_0}} v_{i_0}, \text{ per } 1 < i \neq i_0.$$

I vettori $v'_2, \dots, v'_n$ sono linearmente indipendenti e contenuti in $\langle w_2, \dots, w_n \rangle$; sono quindi una base di tale spazio e, per l'ipotesi induttiva, con un numero finito di operazioni elementari, possiamo ottenere da $v'_2, \dots, v'_n$ i vettori $w_2, \dots, w_n$.

Con un numero finito di operazioni elementari abbiamo trasformato i vettori della base $\mathcal{V}$ nei vettori $v'_1, w_2, \dots, w_n$; per concludere sono sufficienti le operazioni elementari che danno $w_1 = \frac{1}{a_{1i_0}}(v'_1 - a_{2i_0} w_2 - \cdots - a_{ni_0} w_n)$. □

Facciamo una prima serie di operazioni elementari prendendo

$$v'_1 = v_{i_0}, \qquad v'_{i_0} = v_1, \qquad v'_i = v_i - \frac{a_{1i}}{a_{1i_0}} v_{i_0}, \text{ per } 1 < i \neq i_0.$$

I vettori $v'_2, \dots, v'_n$ sono linearmente indipendenti e contenuti in $\langle w_2, \dots, w_n \rangle$; sono quindi una base di tale spazio e, per l'ipotesi induttiva, con un numero finito di operazioni elementari, possiamo ottenere da $v'_2, \dots, v'_n$ i vettori $w_2, \dots, w_n$.

Con un numero finito di operazioni elementari abbiamo trasformato i vettori della base $\mathcal{V}$ nei vettori $v'_1, w_2, \dots, w_n$; per concludere sono sufficienti le operazioni elementari che danno $w_1 = \frac{1}{a_{1i_0}}(v'_1 - a_{2i_0} w_2 - \dots - a_{ni_0} w_n)$. □

Esempio : Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, in $\mathbb{R}^3$. I tre vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$ e con operazioni elementari otteniamo da questa la base canonica.

Posto $v'_1 = v_1$, $v'_2 = v_2$ e $v'_3 = v_3 + 3v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$, si ha $\langle v'_2, v'_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle$. Con ulteriori operazioni si ha $e_2 = v'_3 - 3v'_2$ e $e_3 = -(v'_2 - 2e_2)$. Infine, $e_1 = v'_1 - 2e_2$. Mettendo tutto insieme:

$$e_1 = -5v_1 + 6v_2 - 2v_3, \qquad e_2 = 3v_1 - 3v_2 + v_3, \qquad e_3 = 6v_1 - 7v_2 + 2v_3.$$

Si noti infine che, aver ottenuto la base canonica, conferma che i vettori v_1, v_2, v_3 da cui siamo partiti formano una base di $\mathbb{R}^3$. □

Esercizio : In $\mathbb{R}^4$, sia $W = \langle w_1, \dots, w_4 \rangle$, ove $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si determinino la dimensione e una base per W. Si dica se vi sono relazioni di dipendenza tra $w, \dots, w_4$ e si determinino equazioni cartesiane per il sottospazio W.

Svolg.: Con operazioni di Gauss otteniamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 - 2w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

e

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 - w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 - 2w_1 + w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Dunque $(w_2 - w_4) + (w_3 - 2w_1 + w_4) = 0$, ovvero $2w_1 - w_2 - w_3 = 0$, che è una relazione di dipendenza tra i vettori che ci permette di affermare che il sottospazio W è generato dai vettori

$$w_1' = w_1 - \frac{2}{3}(w_2 - w_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w_2' = w_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w_3' = \frac{1}{3}(w_2 - w_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

che sono linearmente indipendenti e quindi una base di W, che ha perciò dimensione 3. Infine, usando la rappresentazione parametrica dei vettori di W in questa base, si ottiene facilmente un'equazione cartesiana che determina il sottospazio W, ovvero $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$. □