# *Geometria dello Spazio Affine*

maurizio candilera

October 1, 2019

# Introduzione

D'ora in poi useremo le tecniche dell'algebra lineare sviluppate in precedenza per costruire dei modelli di spazi geometrici che generalizzano nozioni ben note della geometria del piano e dello spazio. Come si vedrà nel seguito (e nel successivo corso di Geometria II), le tecniche dell'algebra lineare ci permetteranno non solo di costruire modelli di spazi della geometria, ma soprattutto di descrivere le trasformazioni geometriche di questi spazi e degli oggetti in essi contenuti.

Il primo esempio di queste costruzioni sarà lo studio della geometria dello spazio affine, ovvero uno spazio in cui valgono le usuali proprietà di allineamento e incidenza, ma dove non si fà alcun uso di nozioni legate alla misura della distanza. Vedremo infatti che queste prime nozioni sono direttamente connaturate con la struttura degli spazi vettoriali e la loro introduzione ci permetterà di rivedere molte delle costruzioni dell'algebra lineare da un più naturale punto di vista geometrico. Vedremo poi, quando andremo a studiare lo spazio Euclideo, come la misura di distanze e angoli richiederà l'introduzione di strutture aggiuntive su uno spazio vettoriale e come queste strutture permettano di caratterizzare le trasformazioni tipiche dello spazio metrico, ovvero quelle che rispettano le distanze.

# Spazio Affine

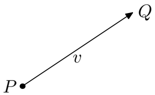
## Definizione [Spazio Affine]

Uno *Spazio Affine* sul campo $K$ è una terna $(\mathbb{A}, V, +)$ ove

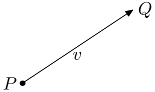
- $\mathbb{A}$ è un insieme (non vuoto), i cui elementi sono i *punti* dello spazio;
- $V$ è uno spazio vettoriale su $K$, i cui elementi sono i *vettori* dello spazio;
- $+ : \mathbb{A} \times V \to \mathbb{A}$ è un'applicazione $(P, v) \mapsto P + v$ che soddisfa alle seguenti condizioni:
  - (a) (*compatibilità con la somma di* $V$) $(P + v) + w = P + (v + w)$, per ogni $P \in \mathbb{A}$ e $v, w \in V$;
  - (b) (*fedeltà*) $P + v = P$, per qualche $P \in \mathbb{A}$ se, e solo se, $v = 0$;
  - (c) (*transitività*) per ogni coppia di punti $P$ e $Q$ in $\mathbb{A}$ esiste un vettore $v$ tale che $P + v = Q$.

Si chiama *dimensione* dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ la dimensione dello spazio vettoriale $V$ sul campo $K$.

Il risultato dell'operazione $(P, v) \mapsto P + v$ si può pensare come il punto che si ottiene applicando il vettore $v$ in $P$. Nel seguito, dati due punti $P$ e $Q$, scriveremo $Q - P$ per indicare il vettore $v$ tale che $P + v = Q$. Un tale vettore esiste per la condizione di transitività ed è unico. Se ve ne fossero 2, siano $v_1$ e $v_2$, si avrebbe $P+(v_1-v_2) = (P+v_1)-v_2 = Q-v_2 = (P+v_2)-v_2 = P+(v_2-v_2) = P$, da cui si deduce che $v_1 - v_2 = 0$ per la condizione di fedeltà.



Il risultato dell'operazione $(P, v) \mapsto P + v$ si può pensare come il punto che si ottiene applicando il vettore $v$ in $P$. Nel seguito, dati due punti $P$ e $Q$, scriveremo $Q - P$ per indicare il vettore $v$ tale che $P + v = Q$. Un tale vettore esiste per la condizione di transitività ed è unico. Se ve ne fossero 2, siano $v_1$ e $v_2$, si avrebbe
$P+(v_1-v_2) = (P+v_1)-v_2 = Q-v_2 = (P+v_2)-v_2 = P+(v_2-v_2) = P$,
da cui si deduce che $v_1 - v_2 = 0$ per la condizione di fedeltà.

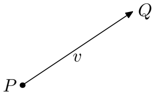



Scelto un punto $P \in \mathbb{A}$ si definiscono due applicazioni (insiemistiche)

$$\begin{aligned} \alpha_P : V &\longrightarrow \mathbb{A} \\ v &\mapsto P + v \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \beta_P : \mathbb{A} &\longrightarrow V \\ X &\mapsto X - P \end{aligned}$$

Le due applicazioni sono l'una l'inversa dell'altra e definiscono così una biiezione tra i punti e i vettori dello spazio affine. Questa identificazione dipende dalla scelta del punto $P$.

Il risultato dell'operazione $(P, v) \mapsto P + v$ si può pensare come il punto che si ottiene applicando il vettore $v$ in $P$. Nel seguito, dati due punti $P$ e $Q$, scriveremo $Q - P$ per indicare il vettore $v$ tale che $P + v = Q$. Un tale vettore esiste per la condizione di transitività ed è unico. Se ve ne fossero 2, siano $v_1$ e $v_2$, si avrebbe $P+(v_1-v_2) = (P+v_1)-v_2 = Q-v_2 = (P+v_2)-v_2 = P+(v_2-v_2) = P$, da cui si deduce che $v_1 - v_2 = 0$ per la condizione di fedeltà.




Scelto un punto $P \in \mathbb{A}$ si definiscono due applicazioni (insiemistiche)

$$\begin{aligned} \alpha_P : V &\longrightarrow \mathbb{A} \\ v &\mapsto P + v \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \beta_P : \mathbb{A} &\longrightarrow V \\ X &\mapsto X - P \end{aligned}$$

Le due applicazioni sono l'una l'inversa dell'altra e definiscono così una biiezione tra i punti e i vettori dello spazio affine. Questa identificazione dipende dalla scelta del punto $P$.

Un'altra importante biiezione tra i punti dello spazio affine è la traslazione parallela al vettore $v$. Fissato un vettore $v \in V$, si pone

$$\begin{aligned} \tau_v : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ P &\mapsto P + v \end{aligned}$$

L'applicazione inversa è $\tau_{-v}$ e più in generale si ha $\tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w = \tau_w \circ \tau_v$ per ogni coppia di vettori. La traslazione parallela al vettore nullo, $\tau_0$, è l'applicazione identica (che lascia fissi tutti i punti dello spazio affine), mentre ogni altra traslazione non ammette punti fissi; ovvero, se $v \neq 0$ allora, per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, si ha $P + v \neq P$. Dunque le traslazioni formano un sottogruppo commutativo del gruppo delle biiezioni dell'insieme $\mathbb{A}$ in sé, isomorfo al gruppo additivo dello spazio vettoriale $V$.

# Esempi

Dato uno spazio vettoriale $V$ su $K$, $\mathbb{A}(V) = (V, V, +)$ è lo spazio affine associato a $V$.
Sia i punti che i vettori sono gli elementi di $V$ e l'operazione di somma tra punti e vettori è la somma dello spazio vettoriale $V$. Si verifica facilmente che valgono le proprietà della Definizione. Si può scrivere $P_v$ per indicare l'elemento $v \in V$ pensato come punto dello spazio affine. Se in uno spazio affine qualsiasi non vi sono punti 'privilegiati' rispetto agli altri, in questo spazio invece diviene 'naturale' considerare il punto $P_0$ (corrispondente al vettore nullo) come 'origine' dello spazio affine. In questo modo, il vettore $v \in V$, pensato come punto, viene a coincidere con il vettore $v$ applicato nell'origine , ovvero $P_v = P_0 + v$.

Lo spazio affine standard di dimensione $n$ sul campo $K$ è lo spazio affine associato allo spazio vettoriale $K^n$, ovvero $\mathbb{A}^n(K) = \mathbb{A}(K^n) = (K^n, K^n, +)$.
Punti e vettori sono gli elementi di $K^n$. In questo caso, si può porre la convenzione di indicare

- con $\begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ il *punto* corrispondente alla $n$-upla $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;
- con $\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ il *vettore* corrispondente alla $n$-upla $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Queste $(n+1)$-uple sono, rispettivamente, le coordinate del punto e le coordinate del vettore corrispondente. Le operazioni di somma di un punto con un vettore o di differenza tra due punti si fanno su tutte le coordinate.

# Un ulteriore esempio di spazio affine

Diamo ora un esempio un po' meno evidente di Spazio affine la cui lettura può essere rinviata ad un momento in cui si siano già approfondite le successive proprietà.

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $K$ e sia fissato un sottospazio $W$. Sia $\mathscr{A}_W$ l'insieme dei sottospazi $U$ di $V$ tali che $V = U \oplus W$, sia $T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W)$ e definiamo un'applicazione

$$+ : \mathscr{A}_W \times T \longrightarrow \mathscr{A}_W$$
$$(U, \psi) \mapsto U_\psi$$

ponendo $U_\psi = \{\, u + \psi(\pi(u)) \mid u \in U \,\}$, ove $\pi : V \to V/W$ è la proiezione canonica. La terna $(\mathscr{A}_W, T, +)$ è uno spazio affine sul campo $K$.

# Un ulteriore esempio di spazio affine

Diamo ora un esempio un po' meno evidente di Spazio affine la cui lettura può essere rinviata ad un momento in cui si siano già approfondite le successive proprietà.

Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $K$ e sia fissato un sottospazio $W$. Sia $\mathscr{A}_W$ l'insieme dei sottospazi $U$ di $V$ tali che $V = U \oplus W$, sia $T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W)$ e definiamo un'applicazione

$$+ : \mathscr{A}_W \times T \longrightarrow \mathscr{A}_W$$
$$(U, \psi) \mapsto U_\psi$$

ponendo $U_\psi = \{\, u + \psi(\pi(u)) \mid u \in U \,\}$, ove $\pi : V \to V/W$ è la proiezione canonica. La terna $(\mathscr{A}_W, T, +)$ è uno spazio affine sul campo $K$.

Dobbiamo verificare che sono soddisfatte le tre proprietà della Definizione.

- Dati $U \in \mathscr{A}_W$, e $\psi_1, \psi_2$ in $T$, dobbiamo verificare che $(U_{\psi_1})_{\psi_2} = U_{\psi_1+\psi_2}$. Si ha

$$\begin{aligned}(U_{\psi_1})_{\psi_2} &= \{\, (u + \psi_1(\pi(u))) + \psi_2(\pi(u + \psi_1(\pi(u)))) \mid u \in U \,\} = \\ &= \{\, u + \psi_1(\pi(u)) + \psi_2(\pi(u)) \mid u \in U \,\} = U_{\psi_1+\psi_2};\end{aligned}$$

  e ciò perché, per ogni $u \in U$, $\pi(u + \psi_1(\pi(u))) = \pi(u)$ in quanto $\psi_1(\pi(u)) \in W$ e due elementi nel quoziente coincidono se i rappresentanti differiscono per un elemento di $W$.

[segue]

[continua]

- È evidente che $U_\psi = U$ se $\psi = 0$ in $T$. Viceversa, sia $\psi \in T$ e supponiamo $U_\psi = U$ con $U \in \mathscr{A}_W$. Poiché $V = U \oplus W$, indichiamo con $\pi_W^U : V \to V$ la proiezione su $W$, parallelamente al sottospazio $U$. Dato $x = u + \psi(\pi(u)) \in U_\psi$, si ha quindi $\pi_W^U(x) = \psi(\pi(u))$; ma d'altra parte $\pi_W^U(x) = 0$ perché $U_\psi = U = \ker \pi_W^U$. Se ne deduce che $\psi(\pi(u)) = 0$ per ogni $u \in U$ e quindi che $\psi = 0$ in $T$, perché, essendo $V = U \oplus W$, la proiezione canonica induce una biiezione tra $U$ e $V/W$.

[continua]

- È evidente che $U_\psi = U$ se $\psi = 0$ in $T$. Viceversa, sia $\psi \in T$ e supponiamo $U_\psi = U$ con $U \in \mathscr{A}_W$. Poiché $V = U \oplus W$, indichiamo con $\pi_W^U : V \to V$ la proiezione su $W$, parallelamente al sottospazio $U$. Dato $x = u + \psi(\pi(u)) \in U_\psi$, si ha quindi $\pi_W^U(x) = \psi(\pi(u))$; ma d'altra parte $\pi_W^U(x) = 0$ perché $U_\psi = U = \ker \pi_W^U$. Se ne deduce che $\psi(\pi(u)) = 0$ per ogni $u \in U$ e quindi che $\psi = 0$ in $T$, perché, essendo $V = U \oplus W$, la proiezione canonica induce una biiezione tra $U$ e $V/W$.
- Siano $U$ e $U'$ in $\mathscr{A}_W$ e sia $\pi_W^U : V \to V$ la proiezione su $W$, parallelamente al sottospazio $U$. Dato $x \in U'$, si ha quindi $x = \pi_U^W(x) + \pi_W^U(x)$, con $\pi_U^W(x) = u_x \in U$ e $\pi_W^U(x) = w_x \in W$. Consideriamo quindi la funzione $\psi : V/W \to W$ definita da $\psi(x + W) = \pi_W^U(x)$, ove $x \in U'$ è l'unico rappresentante in $U'$ della classe laterale $x + W$ (si ricordi l'isomorfismo tra $V/W$ e $U'$). D'altra parte, poiché $x$ e $u_x$ differiscono per un elemento di $W$, si ha $x + W = u_x + W = \pi(u_x)$ e quindi $x = u_x + \psi(\pi(u_x))$ per ogni $x \in U'$. Si conclude che $U' = U_\psi$.

[continua]

- È evidente che $U_\psi = U$ se $\psi = 0$ in $T$. Viceversa, sia $\psi \in T$ e supponiamo $U_\psi = U$ con $U \in \mathscr{A}_W$. Poiché $V = U \oplus W$, indichiamo con $\pi_W^U : V \to V$ la proiezione su $W$, parallelamente al sottospazio $U$. Dato $x = u + \psi(\pi(u)) \in U_\psi$, si ha quindi $\pi_W^U(x) = \psi(\pi(u))$; ma d'altra parte $\pi_W^U(x) = 0$ perché $U_\psi = U = \ker \pi_W^U$. Se ne deduce che $\psi(\pi(u)) = 0$ per ogni $u \in U$ e quindi che $\psi = 0$ in $T$, perché, essendo $V = U \oplus W$, la proiezione canonica induce una biiezione tra $U$ e $V/W$.
- Siano $U$ e $U'$ in $\mathscr{A}_W$ e sia $\pi_W^U : V \to V$ la proiezione su $W$, parallelamente al sottospazio $U$. Dato $x \in U'$, si ha quindi $x = \pi_U^W(x) + \pi_W^U(x)$, con $\pi_U^W(x) = u_x \in U$ e $\pi_W^U(x) = w_x \in W$. Consideriamo quindi la funzione $\psi : V/W \to W$ definita da $\psi(x + W) = \pi_W^U(x)$, ove $x \in U'$ è l'unico rappresentante in $U'$ della classe laterale $x + W$ (si ricordi l'isomorfismo tra $V/W$ e $U'$). D'altra parte, poiché $x$ e $u_x$ differiscono per un elemento di $W$, si ha $x + W = u_x + W = \pi(u_x)$ e quindi $x = u_x + \psi(\pi(u_x))$ per ogni $x \in U'$. Si conclude che $U' = U_\psi$.

In uno spazio vettoriale $V$, di dimensione $n$, possiamo considerare l'insieme $Gr_k(V)$ dei sottospazi di dimensione $k$ di $V$. Dall'esempio precedente, si vede che, fissato sottospazio, $W$, di dimensione $n-k$, l'insieme $\mathscr{A}_W$ dei complementari di $W$ è uno spazio affine sotto l'azione dello spazio vettoriale $T = \mathrm{Hom}_K(V/W, W)$ (e quindi di dimensione $(n-k)k$). Al variare del sottospazio $W$ tra i sottospazi di dimensione $n-k$ i corrispondenti insiemi $\mathscr{A}_W$ ricoprono tutto $Gr_k(V)$ (ne basterebbe un insieme finito) e si possono "incollare" le strutture di spazio affine sui vari insiemi per dare una struttura di varietà (manifold) su $Gr_k(V)$ [Ciò esula dagli scopi di queste note].

# Applicazione affine

Abbiamo visto che non c'è una sostanziale differenza tra i punti e i vettori di uno spazio affine. I due insiemi sono in corrispondenza biunivoca e le operazioni sono compatibili, ma la nuova struttura di spazio affine permette di ampliare le trasformazioni dello spazio. Questo ne cambia la geometria. Diamo quindi la definizione delle applicazioni che "rispettano la struttura" degli spazi affini.

## Definizione [applicazione affine]

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ due spazi affini. Un'applicazione (insiemistica) $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un'*applicazione affine*, se esiste un'applicazione lineare, $\phi : V \to V'$, tale che $f(P + v) = f(P) + \phi(v)$ per ogni $P \in \mathbb{A}$ e ogni $v \in V$. L'applicazione lineare $\phi$ è detta l'*applicazione lineare associata* a $f$. Un'applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un *isomorfismo affine* (*affinità*, se $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$) se esiste un'applicazione affine $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$ tale che $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ e $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{A}'}$. Scriveremo $(\mathbb{A}, V, +) \cong (\mathbb{A}', V', +)$ per indicare l'esistenza di un isomorfismo affine tra i due spazi.

Passiamo in rassegna alcune delle proprietà di queste trasformazioni.

### Proposizione

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$, $(\mathbb{A}', V', +)$ e $(\mathbb{A}", V", +)$ spazi affini su uno stesso campo $K$. Allora

(a) data un'applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$, l'applicazione lineare associata, $\phi : V \to V'$ è univocamente determinata da $f$.

(b) la composizione di due applicazioni affini $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}"$ è anch'essa un'applicazione affine.

(c) l'applicazione identica $\mathrm{id}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ è un'applicazione affine.

(Le verifiche sono immediate, ma è bene farle almeno una volta).

### Osservazione

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ due spazi affini. Un'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un'applicazione affine se, e solo se, esistono un punto $P \in \mathbb{A}$ e un'applicazione lineare $\phi : V \to V'$ tali che $f = \alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P$, ovvero è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "\beta_P"'] \arrow[rrr, bend left, "f"] & V \arrow[r, "\phi"'] & V' \arrow[r, "\alpha_{f(P)}"'] & \mathbb{A}' \end{tikzcd}$$

Facciamo la dimostrazione nella prossima slide.

*dim.* La condizione $f = \alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P$, significa che, per ogni punto $X \in \mathbb{A}$ si ha

$$f(X) = \alpha_{f(P)}(\phi(\beta_P(X))) = \alpha_{f(P)}(\phi(X - P)) = f(P) + \phi(X - P).$$

Se $f$ è affine, la condizione scritta è vera *per ogni* punto $P \in \mathbb{A}$. Supponiamo sia vera per un fissato punto $P$ e mostriamo che vale per ogni altro punto. Sia $X \in \mathbb{A}$ e sia $v \in V$, allora

$$\begin{aligned} f(X+v) &= \alpha_{f(P)}(\phi(\beta_P(X+v))) = \alpha_{f(P)}(\phi(X - P + v)) = \\ &= \alpha_{f(P)}(\phi(X-P) + \phi(v)) = f(P) + \phi(X-P) + \phi(v) = f(X) + \phi(v) \end{aligned}$$

e la tesi è verificata. □

**Corollario**

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ due spazi affini. Un'applicazione affine $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è iniettiva (risp. suriettiva) se, e solo se, l'applicazione lineare associata $\phi : V \to V'$ è iniettiva (risp. suriettiva). In particolare $f$ è un isomorfismo affine se, e solo se, $f$ è (affine e) biiettiva.

*dim.* Fissato un punto $P \in \mathbb{A}$, si ha $f = \alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P$. Dunque, essendo $\alpha_{f(P)}$ e $\beta_P$ entrambo applicazioni invertibili, $f$ è rispettivamente iniettiva, suriettiva o invertibile se, e solo se, lo è $\phi$. In particolare, per $\phi$ invertibile si ha

$$f^{-1} = (\alpha_{f(P)} \circ \phi \circ \beta_P)^{-1} = \alpha_P \circ \phi^{-1} \circ \beta_{f(P)} = \alpha_{f^{-1}(f(P))} \circ \phi^{-1} \circ \beta_{f(P)}.$$

Per l'Osservazione precedente, l'applicazione inversa $f^{-1}$ è affine e si ha un isomorfismo di spazi vettoriali. □

# Riferimento affine

Introduciamo i sistemi di riferimento e le coordinate per punti e vettori dello spazio affine (come abbiamo già visto nello spazio standard $\mathbb{A}^n(K)$).

## Definizione [Riferimento affine]

Si chiama *sistema di riferimento*, $\mathscr{R} = \{O, \mathcal{V}\}$, nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ la scelta di un punto $O$ (l'*origine* del riferimento) e di una base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio $V$.
Le *coordinate di un vettore* $v \in V$ nel riferimento $\mathscr{R}$ sono le coordinate di $v$ nella base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Le *coordinate di un punto* $P \in \mathbb{A}$ nel riferimento $\mathscr{R}$ sono le coordinate del vettore $P - O$ nello stesso riferimento.

## Proposizione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione $n$ su $K$. La scelta di un $\mathscr{R} = \{O, \mathcal{V}\}$, determina un isomorfismo affine $f_{\mathscr{R}} : \mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{A}$.

Fissato il punto $O$ e la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$, si definisce $f_{\mathscr{R}} : \mathbb{A}^n(K) \longrightarrow \mathbb{A}$, ponendo

$$f_{\mathscr{R}}{}^t(1, a_1, \dots, a_n) = O + a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n;$$

Si tratta di un'applicazione affine, che manda l'origine dello spazio affine standard in $O$ ed ha come applicazione lineare associata l'isomorfismo di spazi vettoriali $\alpha_{\mathcal{V}} : K^n \to V$ associato alla base $\mathcal{V}$. $\square$

# Matrici di applicazioni affini

Oltre a dare delle coordinate ai punti e ai vettori dello spazio affine, la scelta di riferimenti permette di associare delle matrici alle applicazioni affini.
Sia quindi $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ un'applicazione affine tra gli spazi $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$, di dimensioni $n$ e $m$, rispettivamente; e siano dati i riferimenti $\mathscr{R} = \{O, \mathcal{V}\}$, in $(\mathbb{A}, V, +)$, e $\mathscr{R}' = \{O', \mathcal{V}'\}$, in $(\mathbb{A}', V', +)$. Dato un punto $X = O + x \in \mathbb{A}$, si ha

$$\boxed{f(X) = f(O) + \phi(x) = O' + t' + \phi(x),}$$

ove $\phi : V \to V'$ è l'applicazione lineare associata a $f$ e $t' = f(O) - O'$. Dunque le coordinate del punto $f(X)$ si determinano a partire dalle coordinate del punto $f(O)$ (ovvero del vettore $t'$) e del vettore $\phi(x)$.
Siano quindi $f(O) - O' = t' = t_1 v_1' + \cdots + t_m v_m'$ e $A = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}'}(\phi) \in M_{m \times n}(K)$.
Possiamo quindi scrivere le coordinate del punto $f(X) = O' + y_1 v_1' + \cdots + y_m v_m'$ in funzione delle coordinate del punto $X = O + x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, come

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & A \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline t + Ax \end{array}\right),$$

ove $t$ indica la colonna $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}$ delle coordinate del vettore $t'$.

La matrice

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline t_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_m & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array}\right) \in M_{(m+1)\times(n+1)}(K)$$

è la *matrice dell'applicazione affine* $f$ nei riferimenti dati.

Vi è la solita relazione tra la matrice dell'applicazione composta e il prodotto delle matrici delle singole applicazioni. Date due applicazioni affini $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ e $g : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}''$ e i riferimenti $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$ e $\mathscr{R}''$ sui tre spazi, si ha

$$\boxed{\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}''}(g \circ f) = \alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}''}(g)\,\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f).}$$

Dunque, se $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & A \end{array}\right)$ e $\alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}''}(g) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline u & B \end{array}\right)$, si ha

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}''}(g \circ f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline u & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & A \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline u + Bt & BA \end{array}\right).$$

Come nel caso degli spazi vettoriali, le matrici di cambiamento di riferimento $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}'}(\mathrm{id})$ in uno spazio affine di dimensione $n$ su $K$, sono matrici invertibili e formano un sottogruppo del gruppo $\mathrm{GL}(n+1, K)$.

# Sottovarietà lineari

I sottospazi vettoriali sono i sottoinsiemi su cui lo spazio induce (per restrizione) una struttura di spazio vettoriale. In modo analogo si hanno le sottovarietà lineari dello spazio affine.

**Definizione [sottovarietà lineare]**

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine sul campo $K$. La *sottovarietà lineare* $\mathbb{L}$, passante per $P \in \mathbb{A}$, di *sottospazio direttore* $V_{\mathbb{L}}$ è il sottoinsieme di punti

$$\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}} = \{\, P + w \mid w \in V_{\mathbb{L}} \,\},$$

ove $V_{\mathbb{L}}$ è un sottospazio vettoriale di $V$. Si chiama *dimensione* della sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ la dimensione su $K$ del sottospazio direttore; ovvero $\dim \mathbb{L} = \dim_K V_{\mathbb{L}}$. L'insieme vuoto $\varnothing$ è una sottovarietà lineare e si pone $\dim \varnothing = -1$.

Se $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ è una sottovarietà lineare (non vuota) dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, allora la terna $(\mathbb{L}, V_{\mathbb{L}}, +)$ è uno spazio affine ($+ : \mathbb{L} \times V_{\mathbb{L}} \to \mathbb{L}$ è la restrizione dell'operazione dello spazio affine). Ciò giustifica il nome di *sottospazi affini* che viene dato talvolta alle sottovarietà lineari di uno spazio affine.

## Osservazione

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine e $W$ un sottospazio vettoriale di $V$. Dati due punti $P$ e $Q$ in $\mathbb{A}$, si ha $P + W = Q + W$ se, e solo se, $Q - P \in W$.

*dim.* Se $P + W = Q + W$, $Q \in P + W = \{\ P + w \mid w \in W\ \}$, quindi il vettore $w_0 = Q - P$ appartiene a $W$.
D'altra parte, se $w_0 = Q - P \in W$; dato un punto $X \in P + W$, si ha

$$X = P + w = P + (w_0 + w - w_0) = (P + w_0) + (w - w_0) = Q + (w - w_0) \in Q + W;$$

e quindi $P + W \subseteq Q + W$. Analogamente, se $Y \in Q + W$, si ha

$$Y = Q + w' = (P + w_0) + w' = P + (w_0 + w') \in P + W;$$

e quindi $Q + W \subseteq P + W$; da cui l'uguaglianza. $\square$

**Osservazione**

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine e $W$ un sottospazio vettoriale di $V$. Dati due punti $P$ e $Q$ in $\mathbb{A}$, si ha $P + W = Q + W$ se, e solo se, $Q - P \in W$.

*dim.* Se $P + W = Q + W$, $Q \in P + W = \{ P + w \mid w \in W \}$, quindi il vettore $w_0 = Q - P$ appartiene a $W$.
D'altra parte, se $w_0 = Q - P \in W$; dato un punto $X \in P + W$, si ha

$$X = P + w = P + (w_0 + w - w_0) = (P + w_0) + (w - w_0) = Q + (w - w_0) \in Q + W;$$

e quindi $P + W \subseteq Q + W$. Analogamente, se $Y \in Q + W$, si ha

$$Y = Q + w' = (P + w_0) + w' = P + (w_0 + w') \in P + W;$$

e quindi $Q + W \subseteq P + W$; da cui l'uguaglianza. $\square$

Dunque possiamo affermare che

Una sottovarietà lineare non vuota, $\mathbb{L}$, è completamente determinata dalla conoscenza di un *qualunque* suo punto e dello spazio direttore $V_{\mathbb{L}}$. Inoltre, fissato un qualsiasi punto $P \in \mathbb{L}$, il sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$ di $\mathbb{L}$ è l'insieme $V_{\mathbb{L}} = \{ X - P \mid X \in \mathbb{L} \}$.

## Definizione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione $n \geq 2$ sul campo $K$.
Si chiamano *punti* le sottovarietà lineari di dimensione $0$.
Si chiamano *rette* le sottovarietà lineari di dimensione $1$.
Si chiamano *piani* le sottovarietà lineari di dimensione $2$.
Si chiamano *iperpiani* le sottovarietà lineari di dimensione $n-1$.

### Definizione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione $n \geq 2$ sul campo $K$.
Si chiamano *punti* le sottovarietà lineari di dimensione $0$.
Si chiamano *rette* le sottovarietà lineari di dimensione $1$.
Si chiamano *piani* le sottovarietà lineari di dimensione $2$.
Si chiamano *iperpiani* le sottovarietà lineari di dimensione $n-1$.

È una generalizzazione delle usuali definizioni. Facciamo qualche puntualizzazione qui sotto.

- Stiamo estendendo la definizione precedente di punto, nel senso che identifichiamo il punto $P \in \mathbb{A}$ con la sottovarietà lineare $\{P\} = P + \langle 0 \rangle$.
- Il sottospazio direttore di una retta $r = P + \langle v \rangle$ (con $v \neq 0$) è detto la *direzione* della retta. Con abuso di linguaggio, talvolta chiameremo direzione di una retta una qualsiasi base del suo sottospazio direttore.
- Il sottospazio direttore di un piano $\pi = P + \langle v, w \rangle$ (con $v$ e $w$ linearmente indipendenti) è detto la *giacitura* del piano $\pi$.

## Definizione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione $n \geq 2$ sul campo $K$.
Si chiamano *punti* le sottovarietà lineari di dimensione $0$.
Si chiamano *rette* le sottovarietà lineari di dimensione $1$.
Si chiamano *piani* le sottovarietà lineari di dimensione $2$.
Si chiamano *iperpiani* le sottovarietà lineari di dimensione $n-1$.

È una generalizzazione delle usuali definizioni. Facciamo qualche puntualizzazione qui sotto.

- Stiamo estendendo la definizione precedente di punto, nel senso che identifichiamo il punto $P \in \mathbb{A}$ con la sottovarietà lineare $\{P\} = P + \langle 0 \rangle$.
- Il sottospazio direttore di una retta $r = P + \langle v \rangle$ (con $v \neq 0$) è detto la *direzione* della retta. Con abuso di linguaggio, talvolta chiameremo direzione di una retta una qualsiasi base del suo sottospazio direttore.
- Il sottospazio direttore di un piano $\pi = P + \langle v, w \rangle$ (con $v$ e $w$ linearmente indipendenti) è detto la *giacitura* del piano $\pi$.

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine sul campo $K$.
(*a*) Presi due punti distinti $P \neq Q$ in $\mathbb{A}$, il vettore $Q - P \neq 0$ e è univocamente determinata la retta $r = P + \langle Q - P \rangle = Q + \langle Q - P \rangle = P + \langle P - Q \rangle$. Dunque, nello spazio affine, due punti distinti generano una e una sola retta.

(*b*) Diremo che tre punti $P$, $Q$, $R$ dello spazio affine sono *allineati* se appartengono a una stessa retta. Ciò è equivalente a dire che i due vettori $Q - P$ e $R - P$ sono linearmente dipendenti.

(*c*) Dati tre punti $P$, $Q$, $R$ dello spazio affine, non allineati; i vettori $Q - P$ e $R - P$ sono linearmente indipendenti e quindi è univocamente determinato il piano $\pi = P + \langle Q - P, R - P \rangle$. Si ha $\pi = Q + \langle Q - P, R - P \rangle = Q + \langle P - Q, R - Q \rangle$, essendo $R - P = (R - Q) + (Q - P)$. Analogamente, $\pi = R + \langle P - R, Q - R \rangle$. Possiamo quindi affermare che nello spazio affine tre punti non allineati generano uno e un solo piano.

# Rappresentazione parametrica

## Definizione [rappresentazione parametrica]

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Si chiama *rappresentazione parametrica* della sottovarietà $\mathbb{L}$ la scelta di un punto $P_0 \in \mathbb{L}$ e di un sistema di generatori $w_1, \dots, w_k$ del sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$ di $\mathbb{L}$.
Ogni punto $X \in \mathbb{L}$ si scrive quindi come $X = P_0 + t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k$ per opportune costanti $(t_1, \dots, t_k) \in K^k$. Tali costanti sono *parametri* che determinano il punto $X$ nella rappresentazione data.

È chiaro che c'è corrispondenza biunivoca tra punti di $\mathbb{L}$ e $k$-uple di parametri se, e solo se, $\dim \mathbb{L} = k$, ovvero se, e solo se, i vettori $w_1, \dots, w_k$ sono una base del sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$.

# Rappresentazione parametrica

## Definizione [rappresentazione parametrica]

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Si chiama *rappresentazione parametrica* della sottovarietà $\mathbb{L}$ la scelta di un punto $P_0 \in \mathbb{L}$ e di un sistema di generatori $w_1, \dots, w_k$ del sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$ di $\mathbb{L}$.
Ogni punto $X \in \mathbb{L}$ si scrive quindi come $X = P_0 + t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k$ per opportune costanti $(t_1, \dots, t_k) \in K^k$. Tali costanti sono *parametri* che determinano il punto $X$ nella rappresentazione data.

È chiaro che c'è corrispondenza biunivoca tra punti di $\mathbb{L}$ e $k$-uple di parametri se, e solo se, $\dim \mathbb{L} = k$, ovvero se, e solo se, i vettori $w_1, \dots, w_k$ sono una base del sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$.

Esempio : Scriviamo una rappresentazione parametrica della retta $r = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right) + \left\langle \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 3 \\ -2 \end{array}\right) \right\rangle$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$. Se prendiamo il punto $P = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right)$ e il vettore $v = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 3 \\ -2 \end{array}\right)$, che è una base dello spazio direttore, ogni punto $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ della retta si scrive (in modo unico) come $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ -1 \\ 2 \end{array}\right) + t \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline 1 \\ 3 \\ -2 \end{array}\right)$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. Le coordinate del punto $X$ dipendono dal valore del parametro $t$ nel modo seguente $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$. e questa scrittura prende il nome di sistema di *equazioni parametriche* della retta $r$.

# Rappresentazione cartesiana

Una sottovarietà lineare non vuota di uno spazio affine di dimensione finita è completamente determinata dalla conoscenza di un suo punto e dell'ortogonale dello spazio direttore.

**Osservazione**

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine di dimensione finita $(\mathbb{A}, V, +)$ e siano $V_{\mathbb{L}}$ il sottospazio direttore di $\mathbb{L}$ e $V_{\mathbb{L}}^{\perp}$ il sottospazio ortogonale in $V^*$. Fissato ad arbitrio un punto $P_0$ di $\mathbb{L}$ e preso comunque $X \in \mathbb{A}$, si ha che $X \in \mathbb{L}$ se, e solo se, $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_{\mathbb{L}}^{\perp}$.

*dim.* Se $X \in \mathbb{L}$, il vettore $X - P_0$ appartiene al sottospazio direttore $V_{\mathbb{L}}$ e quindi $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_{\mathbb{L}}^{\perp}$. Viceversa, la condizione $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_{\mathbb{L}}^{\perp}$, dice che $X - P_0 \in (V_{\mathbb{L}}^{\perp})^{\perp} = V_{\mathbb{L}}$ e quindi che $X \in P_0 + V_{\mathbb{L}} = \mathbb{L}$. $\square$

# Rappresentazione cartesiana

Una sottovarietà lineare non vuota di uno spazio affine di dimensione finita è completamente determinata dalla conoscenza di un suo punto e dell'ortogonale dello spazio direttore.

**Osservazione**

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine di dimensione finita $(\mathbb{A}, V, +)$ e siano $V_\mathbb{L}$ il sottospazio direttore di $\mathbb{L}$ e $V_\mathbb{L}^\perp$ il sottospazio ortogonale in $V^*$. Fissato ad arbitrio un punto $P_0$ di $\mathbb{L}$ e preso comunque $X \in \mathbb{A}$, si ha che $X \in \mathbb{L}$ se, e solo se, $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_\mathbb{L}^\perp$.

*dim.* Se $X \in \mathbb{L}$, il vettore $X - P_0$ appartiene al sottospazio direttore $V_\mathbb{L}$ e quindi $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_\mathbb{L}^\perp$. Viceversa, la condizione $w^*(X - P_0) = 0$, per ogni $w^* \in V_\mathbb{L}^\perp$, dice che $X - P_0 \in (V_\mathbb{L}^\perp)^\perp = V_\mathbb{L}$ e quindi che $X \in P_0 + V_\mathbb{L} = \mathbb{L}$. □

**Definizione [rappresentazione cartesiana]**

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Si chiama *rappresentazione cartesiana* della sottovarietà $\mathbb{L}$ la scelta di un punto $P_0 \in \mathbb{L}$ e di un sistema di generatori $w_1^*, \dots, w_h^*$ del sottospazio $V_\mathbb{L}^\perp$; ortogonale del sottospazio direttore $V_\mathbb{L}$ di $\mathbb{L}$. Un punto $X \in \mathbb{A}$ appartiene a $\mathbb{L}$ se, e solo se, $w_1^* \circ (X - P_0) = 0, \dots, w_h^* \circ (X - P_0) = 0$. Le espressioni $w_j^* \circ (X - P_0) = 0$, per $j = 1, \dots, h$, sono un sistema di *equazioni cartesiane* della sottovarietà $\mathbb{L}$.

È chiaro che si ha un numero minimo di equazioni lineari per $\mathbb{L}$ se, e solo se, $\dim \mathbb{L} = n - h$, ovvero se, e solo se, i vettori $w_1^*, \dots, w_h^*$ sono una base del sottospazio ortogonale del sottospazio direttore $V_\mathbb{L}$.

Esempio : Consideriamo la retta di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dell'esempio precedente $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e scriviamo un sistema di equazioni cartesiane per $r$. Prendiamo di nuovo il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e una base dell'ortogonale dello spazio direttore, ovvero i vettori $v^* = (2, 0, 1)$ e $w^* = (0, 2, 3)$. Preso un generico punto $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, le condizioni $v^* \circ (X - P) = 0$ e $w^* \circ (X - P) = 0$, producono le equazioni lineari

$$(2, 0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad (0, 2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0.$$

I punti di $r$ sono gli $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano al sistema lineare $\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$.
In particolare, i vettori del sottospazio direttore di $r$ sono le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio : Consideriamo la retta di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ dell'esempio precedente $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ e scriviamo un sistema di equazioni cartesiane per $r$. Prendiamo di nuovo il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e una base dell'ortogonale dello spazio direttore, ovvero i vettori $v^* = (2, 0, 1)$ e $w^* = (0, 2, 3)$. Preso un generico punto $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, le condizioni $v^* \circ (X - P) = 0$ e $w^* \circ (X - P) = 0$, producono le equazioni lineari

$$(2, 0, 1) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad (0, 2, 3) \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0.$$

I punti di $r$ sono gli $X = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ le cui coordinate soddisfano al sistema lineare $\begin{cases} 2x + z = 2 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$.
In particolare, i vettori del sottospazio direttore di $r$ sono le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio : In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ il sistema lineare $\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ ha come soluzioni i punti del piano

$$\pi = O + 3e_1 + 2e_4 + \langle 3e_1 + 2e_3, 2e_2 - e_4 \rangle \quad \text{ovvero} \quad \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle;$$

che è una rappresentazione parametrica del piano.

Riassumendo

Una rappresentazione parametrica di una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ di $\mathbb{A}^n(K)$, è data dalla scelta di un punto $P = O + p_1e_1 + \cdots + p_ne_n$ e di generatori $w_1, \dots, w_k$ del sottospazio $V_{\mathbb{L}}$, ove $w_j = y_{1j}e_1 + \cdots + y_{nj}e_n$ per $j = 1, \dots, k$. Allora

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L} \iff \mathbb{L} : \begin{cases} x_1 = p_1 + t_1y_{11} + \cdots + t_ky_{1k} \\ \dots\dots \\ x_n = p_n + t_1y_{n1} + \cdots + t_ky_{nk} \end{cases}$$

al variare dei parametri $(t_1, \dots, t_k) \in K^k$ e questo è un sistema di equazioni parametriche per $\mathbb{L}$.

## Riassumendo

Una rappresentazione parametrica di una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ di $\mathbb{A}^n(K)$, è data dalla scelta di un punto $P = O + p_1 e_1 + \cdots + p_n e_n$ e di generatori $w_1, \dots, w_k$ del sottospazio $V_{\mathbb{L}}$, ove $w_j = y_{1j} e_1 + \cdots + y_{nj} e_n$ per $j = 1, \dots, k$. Allora

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L} \iff \mathbb{L} : \begin{cases} x_1 = p_1 + t_1 y_{11} + \cdots + t_k y_{1k} \\ \dots\dots \\ x_n = p_n + t_1 y_{n1} + \cdots + t_k y_{nk} \end{cases}$$

al variare dei parametri $(t_1, \dots, t_k) \in K^k$ e questo è un sistema di equazioni parametriche per $\mathbb{L}$.

Una rappresentazione cartesiana di una sottovarietà lineare $\mathbb{L}$ di $\mathbb{A}^n(K)$ è data dalla scelta di un punto $P = O + p_1 e_1 + \cdots + p_n e_n$ e di generatori $w_1^*, \dots, w_h^*$ del sottospazio $V_{\mathbb{L}}^{\perp}$, ove $w_i^* = a_{i1} e_1^* + \cdots + a_{in} e_n^*$, per $i = 1, \dots, h$; allora

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{L} \iff \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \dots\dots \\ a_{h1} x_1 + \cdots + a_{hn} x_n = b_h \end{cases} ;$$

ove $b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$, per $i = 1, \dots, h$. Questo è un sistema di equazioni cartesiane per $\mathbb{L}$ e le soluzioni del sistema omogeneo associato sono i vettori di $V_{\mathbb{L}}$.

Possiamo riassumere le osservazioni fatte sulle equazioni cartesiane nella seguente Proposizione che dà un'interpretazione geometrica del Teorema di Rouché-Capelli.

**Proposizione [Rouché-Capelli]**

Sia $\Sigma : Ax = b$ un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite, a coefficienti nel campo $K$. Allora

(a) Le soluzioni del sistema lineare $Ax = b$ sono i punti di una sottovarietà lineare, $\mathbb{L}$, dello spazio affine $\mathbb{A}^n(K)$. In particolare, se $\mathbb{L} \neq \varnothing$, le soluzioni del sistema omogeneo associato sono i vettori del sottospazio direttore di $\mathbb{L}$.

(b) $\mathbb{L} = \varnothing$ se, e solo se, $\operatorname{rk} A \neq \operatorname{rk}(A|b)$. Inoltre, se $\mathbb{L} \neq \varnothing$, allora $\dim \mathbb{L} = n - \operatorname{rk} A$.

(c) $\mathbb{L}$ è un iperpiano se, e solo se, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|b) = 1$; ovvero se, e solo se, può essere descritto da un'unica equazione lineare. In particolare, ogni sottovarietà lineare di $\mathbb{A}^n(K)$ è intersezione di un numero finito di iperpiani.

Quanto detto sulle equazioni parametriche e cartesiane in $\mathbb{A}^n(K)$ si trasporta dallo spazio affine standard a un qualunque spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, di dimensione finita su $K$, su cui sia stato fissato un riferimento $\mathscr{R}$.

# Intersezione, sottovarietà generata

Osserviamo che l'intersezione di due sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ è una sottovarietà lineare. Infatti, se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$, non c'è nulla da dimostrare; se invece $P \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, detti $V_{\mathbb{L}}$ e $V_{\mathbb{M}}$ i sottospazi direttori delle due sottovarietà, si ha $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = P + (V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}})$.

In generale, non è vero che l'unione di due sottovarietà lineari sia una sottovarietà lineare. Ciò accade se, e solo se, una è contenuta nell'altra.

## Proposizione

Sia $S$ un sottoinsieme non vuoto di punti dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Presi comunque due punti $P$ e $Q$ in $S$, si considerino i sottoinsiemi di vettori

$$H_P = \{\, X - P \mid X \in S \,\} \qquad \text{e} \qquad H_Q = \{\, Y - Q \mid Y \in S \,\}.$$

Allora, $\langle H_P \rangle = \langle H_Q \rangle$ e $P + \langle H_P \rangle = Q + \langle H_Q \rangle$ (*sottovarietà generata da $S$*).

*dim.* Sia $v_0 = Q - P$; allora $v_0 \in H_P$ e $-v_0 \in H_Q$. Preso un qualsiasi punto $X \in S$, si ha $X - P = (X - Q) + (Q - P) = (X - Q) + v_0$; da cui si deduce che $H_P \subseteq \langle H_Q \rangle$ e quindi $\langle H_P \rangle \subseteq \langle H_Q \rangle$. Analogamente, qualunque sia $Y \in S$, si ha $Y - Q = (Y - P) + (P - Q) = (Y - P) - v_0$; e quindi $\langle H_Q \rangle \subseteq \langle H_P \rangle$, da cui discende la prima delle due uguaglianze. Infine, poiché $Q - P \in \langle H_P \rangle = \langle H_Q \rangle$ si conclude che $P + \langle H_P \rangle = Q + \langle H_Q \rangle$. $\square$

## Definizione [sottovarietà generata]

Dato un insieme $S$ di punti dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, si chiama *sottovarietà lineare generata* da $S$ la più piccola sottovarietà lineare di $(\mathbb{A}, V, +)$ contenente $S$. Ovvero, il vuoto, se $S = \emptyset$, oppure la sottovarietà lineare $P + \langle H_P \rangle$ descritta nella Proposizione precedente.
Date due sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ di $(\mathbb{A}, V, +)$, indicheremo con $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ la sottovarietà lineare generata dall'insieme $\mathbb{L} \cup \mathbb{M}$.

Possiamo descrivere in modo più esplicito la sottovarietà $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

### Definizione [sottovarietà generata]

Dato un insieme $S$ di punti dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, si chiama *sottovarietà lineare generata* da $S$ la più piccola sottovarietà lineare di $(\mathbb{A}, V, +)$ contenente $S$. Ovvero, il vuoto, se $S = \varnothing$, oppure la sottovarietà lineare $P + \langle H_P \rangle$ descritta nella Proposizione precedente.
Date due sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ di $(\mathbb{A}, V, +)$, indicheremo con $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ la sottovarietà lineare generata dall'insieme $\mathbb{L} \cup \mathbb{M}$.

Possiamo descrivere in modo più esplicito la sottovarietà $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

### Lemma (tecnico)

Siano $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = Q + V_{\mathbb{M}}$ due sottovarietà lineari non vuote dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Allora

(a) $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \varnothing$ se, e solo se, $Q - P \in V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$.

(b) $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = P + (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}} + \langle Q - P \rangle)$.

*dim.* (*a*) Se $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, allora $\mathbb{L} = P_0 + V_{\mathbb{L}}$ e $\mathbb{M} = P_0 + V_{\mathbb{M}}$ e quindi $P = P_0 + u$ e $Q = P_0 + w$ per opportuni $u \in V_{\mathbb{L}}$ e $w \in V_{\mathbb{M}}$. Dunque, $Q - P = w - u \in V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$.
Viceversa, se $Q - P = u_0 + w_0$ con $u_0 \in V_{\mathbb{L}}$ e $w_0 \in V_{\mathbb{M}}$, allora, applicando $Q - P$ in $P$, si ha $Q = P + (Q - P) = P + (u_0 + w_0)$ e sommando a entrambo i membri dell'uguaglianza il vettore $-w_0$, si ottiene $Q - w_0 = P + u_0$ che è quindi un punto in $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$.
(*b*) $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ è la sottovarietà lineare generata dall'unione $\mathbb{L} \cup \mathbb{M}$. Dato un punto $X \in \mathbb{L} \cup \mathbb{M}$, si ha che $X - P$ è un vettore di $V_{\mathbb{L}}$ se $X \in \mathbb{L}$; oppure è un vettore del sottoinsieme $(Q - P) + V_{\mathbb{M}}$ se $X \in \mathbb{M}$ (e $X - P = (Q - P) + (X - Q)$). Dunque il sottospazio direttore di $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ è il sottospazio generato da $V_{\mathbb{L}}$ e $(Q - P) + V_{\mathbb{M}}$, ovvero $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}} + \langle Q - P \rangle$ e ciò permette di concludere. □

Diamo ora un nome ad alcune posizioni reciproche in cui possono trovarsi due sottovarietà lineari non vuote.

### Definizione [posizioni reciproche]

Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari non vuote dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e siano $V_{\mathbb{L}}$ e $V_{\mathbb{M}}$ i rispettivi sottospazi direttori.

(a) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *incidenti* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \varnothing$.

(b) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *parallele* se $V_{\mathbb{L}} \subseteq V_{\mathbb{M}}$ oppure $V_{\mathbb{M}} \subseteq V_{\mathbb{L}}$.

(c) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *sghembe* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ e $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle 0 \rangle$.

Diamo ora un nome ad alcune posizioni reciproche in cui possono trovarsi due sottovarietà lineari non vuote.

### Definizione [posizioni reciproche]

Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari non vuote dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e siano $V_{\mathbb{L}}$ e $V_{\mathbb{M}}$ i rispettivi sottospazi direttori.

(a) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *incidenti* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \varnothing$.

(b) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *parallele* se $V_{\mathbb{L}} \subseteq V_{\mathbb{M}}$ oppure $V_{\mathbb{M}} \subseteq V_{\mathbb{L}}$.

(c) $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono *sghembe* se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ e $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle 0 \rangle$.

N.B. Le posizioni descritte non sono mutuamente esclusive (ad es. due sottovarietà sono simultaneamente parallele e incidenti, se una è contenuta nell'altra; oppure due punti distinti sono simultaneamente paralleli e sghembi) e non esauriscono tutte le possibilità (anche se ciò è vero nello spazio tridimensionale).

Esempio : In $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$, i due piani

$$\pi = O + \langle e_1, e_2 \rangle : \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \tau = O + e_3 + \langle e_2, e_4 \rangle : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

non sono né incidenti, né paralleli, né sghembi.
Infatti, $\pi \cap \tau = \varnothing$, per cui non sono incidenti, e $V_\pi \cap V_\tau = \langle e_2 \rangle$, per cui i sottospazi direttori non hanno intersezione banale, ma non sono contenuti l'uno nell'altro.

# Formula di Grassmann affine

**Proposizione [formula di Grassmann affine]**

Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari dello spazio affine. Allora

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M});$$

ove vale il segno di uguaglianza se una delle due è vuota oppure se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti o sghembe.

# Formula di Grassmann affine

**Proposizione [formula di Grassmann affine]**

Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ due sottovarietà lineari dello spazio affine. Allora

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M});$$

ove vale il segno di uguaglianza se una delle due è vuota oppure se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti o sghembe.

*dim.* Se $\mathbb{M} = \varnothing$, si ha $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = \mathbb{L}$ e $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ e la verifica della formula è immediata.
Se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono incidenti e $P_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. Abbiamo visto che

$$\mathbb{L} = P_0 + V_{\mathbb{L}}, \quad \mathbb{M} = P_0 + V_{\mathbb{M}}, \quad \mathbb{L} \cap \mathbb{M} = P_0 + (V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}}), \quad \mathbb{L} \vee \mathbb{M} = P_0 + (V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}).$$

Dunque, il risultato discende (con il segno di uguaglianza) dalla Formula di Grassmann per i sottospazi vettoriali.
Supponiamo allora che $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \varnothing$ e quindi $\dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M}) = -1$. Per quanto visto nel Lemma tecnico, il vettore $Q - P$ non appartiene a $V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}$ e quindi

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = \dim_K(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}} + \langle Q - P \rangle) = \dim_K(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) + 1$$

e, sempre applicando la formula di Grassmann per i sottospazi vettoriali, si conclude che

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = \dim_K(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) + 1 \leq \dim_K V_{\mathbb{L}} + \dim_K V_{\mathbb{M}} + 1 = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M});$$

e vale l'uguaglianza se, e solo se, $\dim_K(V_{\mathbb{L}} + V_{\mathbb{M}}) = \dim_K V_{\mathbb{L}} + \dim_K V_{\mathbb{M}}$; ovvero $V_{\mathbb{L}} \cap V_{\mathbb{M}} = \langle 0 \rangle$; cioè se $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sono sghembe. □

La rappresentazione cartesiana e il Teorema di Rouché-Capelli ci danno uno strumento per determinare la posizione reciproca di due sottovarietà lineari.

### Proposizione

Siano $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ due sottovarietà lineari di $\mathbb{A}^n(K)$, di dimensioni $h_1$ e $h_2$ rispettivamente, definite dai sistemi di equazioni cartesiane $A_1x = b_1$ e $A_2x = b_2$. Allora si ha

(a) $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ sono incidenti se, e solo se, $\operatorname{rk}\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) = \operatorname{rk}\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = r$. In tal caso, $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ è una sottovarietà lineare di dimensione $n - r$.

(b) $\mathbb{L}_1$ e $\mathbb{L}_2$ sono sghembe se, e solo se, $\operatorname{rk}\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) > \operatorname{rk}\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = n$.

(c) Infine, se si ha $\operatorname{rk}\left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right) > \operatorname{rk}\left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline A_2 \end{array}\right) = r < n$, allora $\mathbb{L}_1$ (risp. $\mathbb{L}_2$) contiene una sottovarietà lineare di dimensione $n - r$ parallela a $\mathbb{L}_2$ (risp. $\mathbb{L}_1$).

*dim.* (*a*) È chiaro che $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \neq \varnothing$ se, e solo se, il sistema lineare $\left(\begin{smallmatrix} A_1 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right) x = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$ ha soluzione, e ciò accade se, e solo se, la matrice completa e quella dei coefficienti hanno lo stesso rango.

(*b*) La disuguaglianza tra i ranghi dice che $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$, mentre il rango massimo della matrice incompleta dice che l'intersezione dei sottospazi direttori si riduce al sottospazio banale $\langle 0 \rangle$.

(*c*) Di nuovo, le condizioni sui ranghi dicono che $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 = \varnothing$, mentre $V_{\mathbb{L}_1} \cap V_{\mathbb{L}_2} = W$, di dimensione $n - r > 0$. Preso un qualsiasi punto $P \in \mathbb{L}_1$, la sottovarietà lineare $P + W$ è contenuta in $\mathbb{L}_1$, ha dimensione $n - r$ ed è parallela a $\mathbb{L}_2$. Analogo discorso si può fare per $Q + W$, con $Q \in \mathbb{L}_2$. $\square$

Esempio : Nello spazio tridimensionale $\mathbb{A}^3(K)$ (qualunque sia il campo) due piani distinti o sono paralleli oppure si intersecano in una retta (essendo entrambi definiti da un sistema di rango $1$). In $\mathbb{A}^4(K)$, due piani possono intersecarsi in un punto, come $\pi = O + \langle e_1, e_2\rangle$ e $\tau = O + \langle e_3, e_4\rangle$, ma non possono esserci due piani sghembi, perché in tal caso, per la formula di Grassmann, lo spazio generato dovrebbe avere dimensione $5$. Due piani sghembi in $\mathbb{A}^5(K)$ possono essere, ad esempio, $O + \langle e_1, e_2\rangle$ e $O + e_5 + \langle e_3, e_4\rangle$.
In ogni spazio affine di dimensione $\geq 3$, due rette distinte, o sono incidenti, o sono parallele, o sono sghembe.
In particolare, due rette sghembe $r = P + \langle v\rangle$, $s = Q + \langle w\rangle$ generano uno spazio tridimensionale, $r \vee s = P + \langle v, w, Q - P\rangle$, mentre due rette incidenti o parallele generano un piano (rette complanari).

**Esempio**: Nello spazio tridimensionale $\mathbb{A}^3(K)$ (qualunque sia il campo) due piani distinti o sono paralleli oppure si intersecano in una retta (essendo entrambi definiti da un sistema di rango 1). In $\mathbb{A}^4(K)$, due piani possono intersecarsi in un punto, come $\pi = O + \langle e_1, e_2 \rangle$ e $\tau = O + \langle e_3, e_4 \rangle$, ma non possono esserci due piani sghembi, perché in tal caso, per la formula di Grassmann, lo spazio generato dovrebbe avere dimensione 5. Due piani sghembi in $\mathbb{A}^5(K)$ possono essere, ad esempio, $O + \langle e_1, e_2 \rangle$ e $O + e_5 + \langle e_3, e_4 \rangle$.
In ogni spazio affine di dimensione $\geq 3$, due rette distinte, o sono incidenti, o sono parallele, o sono sghembe.
In particolare, due rette sghembe $r = P + \langle v \rangle$, $s = Q + \langle w \rangle$ generano uno spazio tridimensionale, $r \vee s = P + \langle v, w, Q - P \rangle$, mentre due rette incidenti o parallele generano un piano (rette complanari).

**Esempio**: In $\mathbb{A}^5(K)$, siano dati i piani $\pi_1$ e $\pi_2$, definiti dai sistemi di equazioni cartesiane $\pi_1 : A_1 x = b_1$ e $\pi_2 : A_2 x = b_2$ (con $\mathrm{rk}\, A_i = \mathrm{rk}(A_i|b_i) = 3$ per $i = 1, 2$). Le reciproche posizioni dei due piani sono legate ai ranghi del sistema lineare $\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{pmatrix}$ nel modo descritto nella seguente tabella:

| $\mathrm{rk}\begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}$ | $\mathrm{rk}\left(\begin{array}{c\|c} A_1 & b_1 \\ \hline A_2 & b_2 \end{array}\right)$ | posizione reciproca |
|---|---|---|
| 3 | 3 | $\pi_1 = \pi_2$ |
| 3 | 4 | $\pi_1 \parallel \pi_2$ (paralleli e distinti) |
| 4 | 4 | $\pi_1 \cap \pi_2 = r$ retta |
| 4 | 5 | $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$ e una direzione in comune |
| 5 | 5 | $\pi_1 \cap \pi_2 = \{P\}$ punto |
| 5 | 6 | $\pi_1$ e $\pi_2$ sghembi |

Si osservi che i sistemi incompleti non possono avere rango maggiore di 5, essendo questo il numero di incognite (ovvero la dimensione di $\mathbb{A}^5(K)$). Non sono quindi possibili altri casi.

Vediamo ora qualche altra costruzione, partendo da degli esempi.

Esercizio : Nello spazio tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ si consideri la retta $r : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$.

(a) Si determini il piano $\pi$ contenente $r$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si determini il piano $\tau$ contenente $r$ e parallelo al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vediamo ora qualche altra costruzione, partendo da degli esempi.

**Esercizio**: Nello spazio tridimensionale $\mathbb{A}^3(\mathbb{Q})$ si consideri la retta $r : \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$.

(a) Si determini il piano $\pi$ contenente $r$ e passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Si determini il piano $\tau$ contenente $r$ e parallelo al vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Svolg.:* L'equazione di un qualunque piano contenente la retta $r$, aggiunta al sistema che definisce la retta, non modifica l'insieme delle soluzioni, quindi deve essere della forma

$$\boxed{a(x - 3y + 2z - 1) + b(2y - z - 3) = 0, \quad \text{al variare dei parametri omogenei } (a, b);}$$

ove la locuzione parametri omogenei sta a indicare che $(a, b) \neq (0, 0)$ e che due tali coppie, $(a, b)$ e $(a', b')$, individuano lo stesso piano se si ottengono l'una dall'altra moltiplicando i termini per una costante non nulla; ovvero $(a', b') = c(a, b)$, per qualche $c \neq 0$. L'equazione nel riquadro è chiamata l'equazione del fascio (pencil) di piani di asse $r$.

(*a*) Imponendo che le coordinate del punto $P$ siano soluzione dell'equazione del fascio, si trova $a + 2b = 0$, e quindi $\pi : 2x - 8y + 5z + 1 = 0$.

(*b*) Imponendo che le coordinate del vettore $v$ siano soluzione dell'equazione omogenea associata all'equazione del fascio, si trova $4a - b = 0$, e quindi $\tau : x + 5y - 2z = 13$. □

**N.B.** Utilizzando la rappresentazione parametrica $r = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ della retta, è facile verificare che tutti i punti di $r$ sono contenuti nei due piani che abbiamo trovato e, ovviamente, in tutti i piani del fascio.

Esercizio : Nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ e $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(a) Si verifichi che sono sghembe.

(b) Si determini, se esiste, una retta $t$, complanare con entrambe le rette e passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Esercizio** : Nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ e $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(a) Si verifichi che sono sghembe.

(b) Si determini, se esiste, una retta $t$, complanare con entrambe le rette e passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Svolg.:* (*a*) Un generico punto della retta $s$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 2+2\alpha \\ -\alpha \\ 1+3\alpha \end{pmatrix}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Sostituendo nelle equazioni della retta $r$, si trova che $r \cap s = \varnothing$. Ugualmente, sostituendo un generico vettore dello spazio direttore di $s$ nel sistema omogeneo associato alle equazioni di $r$, si conclude che l'intersezione tra gli spazi direttori è banale, ovvero le due rette sono sghembe.

**Esercizio** : Nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ e $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(a) Si verifichi che sono sghembe.

(b) Si determini, se esiste, una retta $t$, complanare con entrambe le rette e passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Svolg.:* (*a*) Un generico punto della retta $s$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 2+2\alpha \\ -\alpha \\ 1+3\alpha \end{pmatrix}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Sostituendo nelle equazioni della retta $r$, si trova che $r \cap s = \emptyset$. Ugualmente, sostituendo un generico vettore dello spazio direttore di $s$ nel sistema omogeneo associato alle equazioni di $r$, si conclude che l'intersezione tra gli spazi direttori è banale, ovvero le due rette sono sghembe.
(*b*) Il punto $P$ non appartiene né a $r$, né a $s$; dunque la retta cercata può essere unicamente l'intersezione tra il piano $\rho = r \vee P$ ed il piano $\sigma = s \vee P$. Infatti i due piani sono distinti (perché contengono rette sghembe) e incidenti (perché contengono entrambi il punto $P$); dunque devono intersecarsi in una retta (si applichi ad esempio la formula di Grassmann affine).

**Esercizio**: Nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} x+y=3 \\ 2y+z=4 \end{cases}$ e $s = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

(a) Si verifichi che sono sghembe.

(b) Si determini, se esiste, una retta $t$, complanare con entrambe le rette e passante per $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Svolg.:* (*a*) Un generico punto della retta $s$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 2+2\alpha \\ -\alpha \\ 1+3\alpha \end{pmatrix}$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Sostituendo nelle equazioni della retta $r$, si trova che $r \cap s = \emptyset$. Ugualmente, sostituendo un generico vettore dello spazio direttore di $s$ nel sistema omogeneo associato alle equazioni di $r$, si conclude che l'intersezione tra gli spazi direttori è banale, ovvero le due rette sono sghembe.
(*b*) Il punto $P$ non appartiene né a $r$, né a $s$; dunque la retta cercata può essere unicamente l'intersezione tra il piano $\rho = r \vee P$ ed il piano $\sigma = s \vee P$. Infatti i due piani sono distinti (perché contengono rette sghembe) e incidenti (perché contengono entrambi il punto $P$); dunque devono intersecarsi in una retta (si applichi ad esempio la formula di Grassmann affine).

Un sistema di equazioni cartesiane per $s$ è $\begin{cases} x+2y=2 \\ 3y+z=1 \end{cases}$, per cui le equazioni dei fasci di piani di asse $r$ e $s$ sono, rispettivamente $a(x+y-3)+b(2y+z-4)=0$ e $c(x+2y-2)+d(3y+z-1)=0$ al variare dei parametri omogenei $(a,b)$ e $(c,d)$. Imponendo le condizioni di passaggio per il punto $P$ si ricava $\rho : 2x-z=2$ e $\sigma : 2x+y-z=3$ e dunque

$$\rho \cap \sigma = t : \begin{cases} 2x-z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases} .$$

In particolare, $t$ è incidente con entrambe le rette e $r \cap t = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e $s \cap t = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$, come si ottiene con calcoli diretti.

# Stelle di iperpiani

Generalizziamo parzialmente la costruzione dei fasci di piani a spazi affini di dimensioni qualsiasi.

**Definizione [stelle di iperpiani]**

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, e sia $\dim \mathbb{L} = k < n = \dim_K V$. Chiameremo *stella di iperpiani* di centro $\mathbb{L}$ l'insieme formato da tutti gli iperpiani contenenti $\mathbb{L}$.

# Stelle di iperpiani

Generalizziamo parzialmente la costruzione dei fasci di piani a spazi affini di dimensioni qualsiasi.

## Definizione [stelle di iperpiani]

Sia $\mathbb{L}$ una sottovarietà lineare dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, e sia $\dim \mathbb{L} = k < n = \dim_K V$. Chiameremo *stella di iperpiani* di centro $\mathbb{L}$ l'insieme formato da tutti gli iperpiani contenenti $\mathbb{L}$.

**N.B.** Più in generale, fissato $r$, con $k \leq r \leq n$, si potrebbe parlare della *stella di sottovarietà lineari $r$-dimensionali* di centro $\mathbb{L}$; ovvero l'insieme di tutte le sottovarietà lineari di dimensione $r$ contenenti $\mathbb{L}$. Qui parleremo solo di stelle di iperpiani.

Tramite una rappresentazione cartesiana di $\mathbb{L}$ si può descrivere facilmente la stella di iperpiani di centro $\mathbb{L}$. Sia $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ e sia $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_{n-k}^*\}$ una base di $V_{\mathbb{L}}^{\perp} \subseteq V^*$. C'è corrispondenza biunivoca tra iperpiani contenenti $\mathbb{L}$ e sottospazi di dimensione 1 di $V_{\mathbb{L}}^{\perp}$; ovvero ogni iperpiano della stella si scrive come

$$\left\{ X \in \mathbb{A} \mid (a_1 w_1^* + \cdots + a_{n-k} w_{n-k}^*) \circ (X - P) = 0 \right\}$$ al variare dei *parametri omogenei* $(a_1, \dots, a_{n-k})$.

Come per i fasci, la locuzione 'parametri omogenei' sta a indicare che $(a_1, \dots, a_{n-k}) \neq (0, \dots, 0)$ e che due tali $(n-k)$-uple, $(a_1, \dots, a_{n-k})$ e $(b_1, \dots, b_{n-k})$, individuano lo stesso iperpiano se si ottengono l'una dall'altra moltiplicando i termini per una costante non nulla; ovvero $(b_1, \dots, b_{n-k}) = c(a_1, \dots, a_{n-k})$, con $0 \neq c \in K$.

Oltre agli iperpiani che contengono i punti di una sottovarietà data, possiamo considerare quelli paralleli a delle fissate direzioni

**Definizione [stelle improprie di iperpiani]**

Sia $W$ un sottospazio vettoriale di dimensione $k$ di vettori dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $K$. La *stella (impropria) di iperpiani* paralleli a $W$, è l'insieme di tutti gli iperpiani di $(\mathbb{A}, V, +)$ il cui spazio direttore contiene $W$.

Oltre agli iperpiani che contengono i punti di una sottovarietà data, possiamo considerare quelli paralleli a delle fissate direzioni

**Definizione [stelle improprie di iperpiani]**

Sia $W$ un sottospazio vettoriale di dimensione $k$ di vettori dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $K$. La *stella (impropria) di iperpiani* paralleli a $W$, è l'insieme di tutti gli iperpiani di $(\mathbb{A}, V, +)$ il cui spazio direttore contiene $W$.

Come nel caso precedente, sia $k = \dim_K W$; fissata una base $\mathcal{W}^* = \{w_1^*, \dots, w_{n-k}^*\}$ di $W^\perp \subseteq V^*$ e un punto *qualsiasi* dello spazio, $O$, ogni iperpiano della stella si scrive come

$$\boxed{\left\{ X \in \mathbb{A} \mid (a_1 w_1^* + \cdots + a_{n-k} w_{n-k}^*) \circ (X - O) = b \right\} \text{ al variare dei } \textit{parametri omogenei } (a_1, \dots, a_{n-k}, b).}$$

Si noti che è necessario un parametro in più rispetto al caso precedente, essendo individuato solo lo spazio direttore e non il punto di passaggio.

**Esempio** : Nello spazio $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ si consideri la retta $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle : \begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$.

(a) La stella di iperpiani di centro $r$ non è altro che il fascio di piani di equazione $a_1(2x - y + 3z - 5) + a_2(x - y - z) = 0$, al variare dei parametri omogenei $(a_1, a_2)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) La stella impropria di iperpiani paralleli a $r$ è la famiglia di piani di equazione $a_1(2x - y + 3z) + a_2(x - y - z) = b$, al variare dei parametri omogenei $(a_1, a_2, b)$ in $\mathbb{R}^3$ (e non è un fascio).

**Esercizio** : Nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $\mathbb{Q}$, sia fissato il riferimento $\mathscr{R} = \{ O; v_1, \dots, v_4 \}$ e si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

(a) Si determinino dimensioni e posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$. Si calcolino le dimensioni di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

(b) Si verifichi che la retta $r = O - v_1 + \langle v_2 - v_3 \rangle$ è sghemba sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$ e si determini l'equazione cartesiana di un iperpiano $\mathbb{H}$, contenente $\mathbb{L}$ e parallelo ad $r$. Un tale iperpiano è unico?

(c) Si determinino le equazioni cartesiane di un piano $\pi$ tale che $\dim(\mathbb{L} \vee \pi) = 3 = \dim(\mathbb{M} \vee \pi)$. Un tale piano è unico?

(d) Si determini la matrice in un sistema di riferimento a scelta di un'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f(\mathbb{M}) = \mathbb{L}$ e $f$ abbia un unico punto unito.

Esercizio : Nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $\mathbb{Q}$, sia fissato il riferimento $\mathscr{R} = \{ O; v_1, \dots, v_4 \}$ e si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

(a) Si determinino dimensioni e posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$. Si calcolino le dimensioni di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

(b) Si verifichi che la retta $r = O - v_1 + \langle v_2 - v_3 \rangle$ è sghemba sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$ e si determini l'equazione cartesiana di un iperpiano $\mathbb{H}$, contenente $\mathbb{L}$ e parallelo ad $r$. Un tale iperpiano è unico?

(c) Si determinino le equazioni cartesiane di un piano $\pi$ tale che $\dim(\mathbb{L} \vee \pi) = 3 = \dim(\mathbb{M} \vee \pi)$. Un tale piano è unico?

(d) Si determini la matrice in un sistema di riferimento a scelta di un'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f(\mathbb{M}) = \mathbb{L}$ e $f$ abbia un unico punto unito.

*Svolg.:* (*a*) Lo spazio ha dimensione $4$ e i due sistemi lineari hanno entrambi rango $2$ (sia completo che incompleto). Dunque $\dim \mathbb{L} = 2 = \dim \mathbb{M}$ e, mettendo assieme le quattro equazioni, si ricava un sistema risolubile di rango $4$, per cui $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \{ O + v_4 \}$ ha dimensione $0$. Per la formula di Grassmann $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ ha dimensione $4$ ed è quindi tutto lo spazio.

Esercizio : Nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $\mathbb{Q}$, sia fissato il riferimento $\mathscr{R} = \{ O; v_1, \dots, v_4 \}$ e si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} .$$

(a) Si determinino dimensioni e posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$. Si calcolino le dimensioni di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

(b) Si verifichi che la retta $r = O - v_1 + \langle v_2 - v_3 \rangle$ è sghemba sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$ e si determini l'equazione cartesiana di un iperpiano $\mathbb{H}$, contenente $\mathbb{L}$ e parallelo ad $r$. Un tale iperpiano è unico?

(c) Si determinino le equazioni cartesiane di un piano $\pi$ tale che $\dim(\mathbb{L} \vee \pi) = 3 = \dim(\mathbb{M} \vee \pi)$. Un tale piano è unico?

(d) Si determini la matrice in un sistema di riferimento a scelta di un'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f(\mathbb{M}) = \mathbb{L}$ e $f$ abbia un unico punto unito.

*Svolg.:* (*a*) Lo spazio ha dimensione $4$ e i due sistemi lineari hanno entrambi rango $2$ (sia completo che incompleto). Dunque $\dim \mathbb{L} = 2 = \dim \mathbb{M}$ e, mettendo assieme le quattro equazioni, si ricava un sistema risolubile di rango $4$, per cui $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \{ O + v_4 \}$ ha dimensione $0$. Per la formula di Grassmann $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ ha dimensione $4$ ed è quindi tutto lo spazio.

(*b*) Un generico punto della retta $r$ ha coordinate $X_t = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix}$, al variare di $t \in \mathbb{Q}$. Andando a sostituire nei sistemi che definiscono $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ si ricava che $\mathbb{L} \cap r = \varnothing = \mathbb{M} \cap r$. Inoltre, il vettore direttore $v_2 - v_3$ di $r$ non appartiene a nessuno dei due sottospazi direttori, per cui $V_{\mathbb{L}} \cap \langle v_2 - v_3 \rangle = \langle 0 \rangle = V_{\mathbb{M}} \cap \langle v_2 - v_3 \rangle$ e la retta $r$ è sghemba con entrambi i piani.
L'iperpiano $\mathbb{H}$ deve appartenere alla stella di centro $\mathbb{L}$, i cui elementi hanno equazione $ax_2 + b(x_3 + 2x_4 - 2) = 0$, al variare dei parametri omogenei $(a, b)$. Imponendo la condizione che sia parallelo a $r$, si trova $a - b = 0$ e quindi $\mathbb{H} : x_2 + x_3 + 2x_4 = 2$ è l'unico iperpiano che soddisfa alla condizione richiesta.

[segue]

[continua]

$(c)$ Perché si abbia $\dim(\mathbb{L} \vee \pi) = 3$ per un piano $\pi$ è necessario che $\pi$ sia o parallelo e distinto da $\mathbb{L}$, oppure che $\mathbb{L} \cap \pi$ sia una retta. Poiché $\pi$ deve soddisfare queste condizioni sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$, deve necessariamente passare per il punto $P = O + v_4$ di intersezione tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ e tagliare una retta su ciascuno dei due piani. Un tale piano non è unico (ve ne sono infiniti) e due possibili scelte distinte sono $\tau = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ ($P + \langle v_1 \rangle \subset \mathbb{L}$ e $P + \langle v_2 \rangle \subset \mathbb{M}$) e $\tau' = P + \langle 2v_3 - v_4, 3v_1 - v_3 \rangle$ ($P + \langle 2v_3 - v_4 \rangle \subset \mathbb{L}$ e $P + \langle 3v_1 - v_3 \rangle \subset \mathbb{M}$).

[continua]
(*c*) Perché si abbia $\dim(\mathbb{L} \vee \pi) = 3$ per un piano $\pi$ è necessario che $\pi$ sia o parallelo e distinto da $\mathbb{L}$, oppure che $\mathbb{L} \cap \pi$ sia una retta. Poiché $\pi$ deve soddisfare queste condizioni sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$, deve necessariamente passare per il punto $P = O + v_4$ di intersezione tra $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ e tagliare una retta su ciascuno dei due piani. Un tale piano non è unico (ve ne sono infiniti) e due possibili scelte distinte sono $\tau = P + \langle v_1, v_2 \rangle$ ($P + \langle v_1 \rangle \subset \mathbb{L}$ e $P + \langle v_2 \rangle \subset \mathbb{M}$) e $\tau' = P + \langle 2v_3 - v_4, 3v_1 - v_3 \rangle$ ($P + \langle 2v_3 - v_4 \rangle \subset \mathbb{L}$ e $P + \langle 3v_1 - v_3 \rangle \subset \mathbb{M}$).

(*d*) Sia $P = O + v_4$ il punto di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ e si considerino i vettori

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = 2v_3 - v_4, \quad w_3 = v_2, \quad w_4 = 3v_1 - v_3.$$

Allora $\mathscr{R}' = \{ P; w_1, \dots, w_4 \}$ è un riferimento nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e si ha $\mathbb{L} = P + \langle w_1, w_2 \rangle$, $\mathbb{M} = P + \langle w_3, w_4 \rangle$. Per soddisfare alle condizioni $f(\mathbb{L}) = \mathbb{M}$ e $f(\mathbb{M}) = \mathbb{L}$, dobbiamo prendere un'affinità $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ tale che $f(P) = P$. Affinché $P$ sia l'unico punto unito possiamo scegliere l'applicazione lineare soggiacente $\phi : V \to V$ definita da

$$\phi(w_1) = w_3, \quad \phi(w_2) = w_4, \quad \phi(w_3) = 2w_1, \quad \phi(w_4) = 2w_2.$$

Non è certo l'unica scelta possibile, ma questa affinità soddisfa tutte le condizioni richieste e

$$\alpha_{\mathscr{R}',\mathscr{R}'}(f) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Il lettore ne scriva qualcun'altra (. . . o scriva la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$). □

**Esercizio** : Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{Q}^4)$, sia fissato il riferimento $\mathscr{R} = \{ O; e_1, \dots, e_4 \}$ e si consideri il piano $\pi$, di equazioni $\pi : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ .

(a) Si determini la proiezione di $\pi$ sull'iperpiano $\mathbb{L} : x_1 + x_2 + x_3 = 0$, lungo la direzione $\langle e_2 + e_4 \rangle$.

(b) Si determinino, se esistono, tutte le affinità $f : \mathbb{A}(\mathbb{Q}^4) \to \mathbb{A}(\mathbb{Q}^4)$, tali che $f(P) = P$ per ogni $P \in \mathbb{L}$ e $O + 2e_2 \in f(\pi)$. Se ne scriva la matrice associata in un riferimento a scelta.

*Svolg.:* (*a*) La proiezione si può ottenere intersecando con $\mathbb{L}$ l'iperpiano $\mathbb{M}$, contenente $\pi$ e parallelo al vettore $e_2 + e_4$. Un tale $\mathbb{M}$ appartiene al fascio di iperpiani di asse $\pi$, di equazioni $a(x_1 + x_3 - 1) + bx_2 = 0$, al variare dei parametri omogenei $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ e si trova ponendo $b = 0$; ovvero $\mathbb{M} = x_1 + x_3 = 1$ e la proiezione cercata è

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{M} : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

(*b*) Possiamo prendere come origine il punto $O \in \mathbb{L}$ e una base dello spazio direttore di $\mathbb{L}$ come primi vettori del riferimento, ad esempio $v_1 = e_1 - e_3$, $v_2 = e_4$, $v_3 = e_1 - e_2$ e completare la base con il vettore $v_4 = e_2$. Se indichiamo con $f$ l'affinità cercata e con $\phi$ l'applicazione lineare soggiacente, si ha $f(O) = O$ e $\phi(v_i) = v_i$, per $i = 1, 2, 3$. Resta quindi da determinare $\phi(v_4)$ imponendo la condizione del testo.
Si osservi che $\pi = O + v_3 + v_4 + \langle v_1, v_2 \rangle$, per cui $2v_4$ deve essere uguale all'immagine tramite $\phi$ di un vettore del tipo $v_3 + v_4 + av_1 + bv_2$, con $(a, b)$ in $\mathbb{Q}^2$; ovvero $\phi(v_4) = -av_1 - bv_2 - v_3 + 2v_4$ con $(a, b)$ in $\mathbb{Q}^2$. Dunque, nel riferimento $\mathscr{R}' = \{ O; v_1, \dots, v_4 \}$, le matrici cercate sono

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right), \text{ al variare di } (a, b) \text{ in } \mathbb{Q}^2. \qquad \square$$

# Combinazioni baricentriche

Nello spazio affine è possibile dar senso a particolari "combinazioni lineari" di punti dello spazio che permettono di esprimere in modo suggestivo relazioni di allineamento o, nel caso reale, la "convessità" di particolari sottoinsiemi.

**Proposizione**

Sia $n \geq 1$ un intero e siano dati dei punti $P_1, \dots, P_n$ nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Presi comunque $c_1, \dots, c_n$ in $K$, tali che $c_1 + \cdots + c_n = 1$, e fissato comunque un punto $Q$ in $\mathbb{A}$, il punto

$$P = Q + c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q)$$

non dipende dalla scelta del punto $Q \in \mathbb{A}$.

# Combinazioni baricentriche

Nello spazio affine è possibile dar senso a particolari "combinazioni lineari" di punti dello spazio che permettono di esprimere in modo suggestivo relazioni di allineamento o, nel caso reale, la "convessità" di particolari sottoinsiemi.

## Proposizione

Sia $n \geq 1$ un intero e siano dati dei punti $P_1, \dots, P_n$ nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$. Presi comunque $c_1, \dots, c_n$ in $K$, tali che $c_1 + \cdots + c_n = 1$, e fissato comunque un punto $Q$ in $\mathbb{A}$, il punto

$$P = Q + c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q)$$

non dipende dalla scelta del punto $Q \in \mathbb{A}$.

*dim.* Fissato un punto $Q \in \mathbb{A}$, è univocamente determinato il vettore $v = c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q)$ e quindi il punto $P = Q + v$. Dobbiamo quindi vedere che il punto così determinato non dipende dalla scelta di $Q$. Sia quindi $Q' \in \mathbb{A}$ un punto e osserviamo che, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha $P_i - Q = (Q' - Q) + (P_i - Q')$ (come si vede applicando i due membri dell'uguaglianza in $Q$). Dunque

$$\begin{aligned} P &= Q + c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q) = \\ &= Q + (c_1 + \cdots + c_n)(Q' - Q) + c_1(P_1 - Q') + \cdots + c_n(P_n - Q') = \\ &= Q' + c_1(P_1 - Q') + \cdots + c_n(P_n - Q'); \end{aligned}$$

perché $c_1 + \cdots + c_n = 1$ e $Q + (Q' - Q) = Q'$. □

Possiamo quindi dare la seguente

**Definizione**

Dati i punti $P_1, \dots, P_n$ nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $K$ e gli scalari $c_1, \dots, c_n$ in $K$, con $c_1 + \cdots + c_n = 1$, la *combinazione baricentrica* $c_1 P_1 + \cdots + c_n P_n$ indica il punto $P = Q + c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q)$, per una qualsiasi scelta del punto $Q \in \mathbb{A}$.

Il nome viene dalla Fisica dove, presi $n$ punti materiali $P_1, \dots, P_n$, di masse $m_1, \dots, m_n$, si pone $c_i = \frac{m_i}{M}$, per $i = 1, \dots, n$, ove $M = m_1 + \cdots + m_n$, e il punto $G = c_1 P_1 + \cdots + c_n P_n$ è il *baricentro* (o centro di massa) del sistema.

Possiamo quindi dare la seguente

**Definizione**

Dati i punti $P_1, \dots, P_n$ nello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $K$ e gli scalari $c_1, \dots, c_n$ in $K$, con $c_1 + \cdots + c_n = 1$, la *combinazione baricentrica* $c_1P_1 + \cdots + c_nP_n$ indica il punto $P = Q + c_1(P_1 - Q) + \cdots + c_n(P_n - Q)$, per una qualsiasi scelta del punto $Q \in \mathbb{A}$.

Il nome viene dalla Fisica dove, presi $n$ punti materiali $P_1, \dots, P_n$, di masse $m_1, \dots, m_n$, si pone $c_i = \frac{m_i}{M}$, per $i = 1, \dots, n$, ove $M = m_1 + \cdots + m_n$, e il punto $G = c_1P_1 + \cdots + c_nP_n$ è il *baricentro* (o centro di massa) del sistema.

Dati i punti $P_0, \dots, P_n$ ogni combinazione baricentrica di questi punti si può scrivere prendendo come "punto base" $P_0$ e si ha

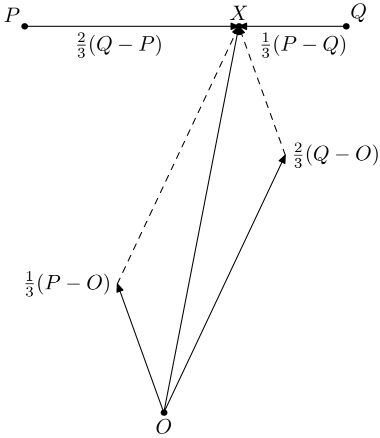
$$P = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n = P_0 + c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_n(P_n - P_0).$$

ed osservare così che il punto $P$ appartiene alla sottovarietà lineare $P_0 \vee \cdots \vee P_n = P_0 + \langle P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0 \rangle$, generata dai punti $P_0, \dots, P_n$.
Viceversa, dato $P = P_0 + c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_n(P_n - P_0) \in P_0 \vee \cdots \vee P_n$, e posto $c_0 = 1 - (c_1 + \cdots + c_n)$, si ha $P = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$ e si conclude quindi che l'insieme delle combinazioni baricentriche dei punti $P_0, \dots, P_n$ è precisamente la sottovarietà lineare $P_0 \vee \cdots \vee P_n$.

Nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ possiamo considerare due punti $P$ e $Q$ e la loro combinazione baricentrica $X = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}Q$. Diamo una rappresentazione grafica dei tre punti e delle loro relazioni, ricordando che, in base alle definizioni,

$$\begin{aligned} X &= P + \frac{2}{3}(Q-P) \\ &= Q + \frac{1}{3}(P-Q) \\ &= O + \frac{1}{3}(P-O) + \frac{2}{3}(Q-O) \end{aligned}$$

ove $O$ è un qualunque punto del piano.



### Proposizione

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ spazi affini sul campo $K$.

(a) Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{A}$ è una sottovarietà lineare se, e solo se, $S$ è chiuso per combinazioni baricentriche.

(b) Un'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un'applicazione affine se, e solo se, $f$ rispetta le combinazioni baricentriche.

*dim.* (*a*) Per quanto visto sopra ogni sottovarietà lineare è chiusa per combinazioni baricentriche. Viceversa, sia $S$ chiuso per combinazioni baricentriche. Dato $P_0 \in S$, dobbiamo mostrare che il sottoinsieme $W = \{ X - P_0 \mid X \in S \}$ è un sottospazio vettoriale di $V$, ovvero che è chiuso per combinazioni lineari. Se $P_1, P_2 \in S$ e $c_1, c_2 \in K$, allora, posto $c_0 = 1 - c_1 - c_2$, si ha

$$c_1(P_1 - P_0) + c_2(P_2 - P_0) = (c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2) - P_0 \in W.$$

Infatti $c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 \in S$ perché $S$ è chiuso per combinazioni baricentriche e inoltre si verifica facilmente l'uguaglianza dei due vettori applicandoli entrambi nel punto $P_0$.

## Proposizione

Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ spazi affini sul campo $K$.

(a) Un sottoinsieme non vuoto $S \subseteq \mathbb{A}$ è una sottovarietà lineare se, e solo se, $S$ è chiuso per combinazioni baricentriche.

(b) Un'applicazione $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è un'applicazione affine se, e solo se, $f$ rispetta le combinazioni baricentriche.

*dim.* (*a*) Per quanto visto sopra ogni sottovarietà lineare è chiusa per combinazioni baricentriche. Viceversa, sia $S$ chiuso per combinazioni baricentriche. Dato $P_0 \in S$, dobbiamo mostrare che il sottoinsieme $W = \{ X - P_0 \mid X \in S \}$ è un sottospazio vettoriale di $V$, ovvero che è chiuso per combinazioni lineari. Se $P_1, P_2 \in S$ e $c_1, c_2 \in K$, allora, posto $c_0 = 1 - c_1 - c_2$, si ha

$$c_1(P_1 - P_0) + c_2(P_2 - P_0) = (c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2) - P_0 \in W.$$

Infatti $c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 \in S$ perché $S$ è chiuso per combinazioni baricentriche e inoltre si verifica facilmente l'uguaglianza dei due vettori applicandoli entrambi nel punto $P_0$.

(*b*) Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}'$ è affine, allora esiste un'applicazione lineare soggiacente, $\phi : V \to V'$, tale che $f(P + v) = f(P) + \phi(v)$. per ogni $P \in \mathbb{A}$ ed ogni $v \in V$. Data la combinazione baricentrica $P = c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$, con $c_0 + \cdots + c_n = 1$, si ha

$$f(P) = f(P_0 + c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_n(P_n - P_0)) = f(P_0) + c_1\phi(P_1 - P_0) + \cdots + c_n\phi(P_n - P_0) =$$
$$= f(P_0) + c_1(f(P_1) - f(P_0)) + \cdots + c_n(f(P_n) - f(P_0)) = c_0f(P_0) + \cdots + c_nf(P_n).$$

[segue]

[continua]
Viceversa, supponiamo che $f$ conservi le combinazioni baricentriche. Fissato $P_0 \in \mathbb{A}$, definiamo l'applicazione $\phi : V \to V'$, ponendo $\phi(v) = f(P_0 + v) - f(P_0)$, e mostriamo che $\phi$ è lineare.
Siano $v_1$, $v_2$ in $V$, $a_1$, $a_2$ in $K$ e poniamo $P_1 = P_0 + v_1$, $P_2 = P_0 + v_2$ e $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Allora

$$P_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 = P_0 + a_1(P_1 - P_0) + a_2(P_2 - P_0) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2;$$

da cui si deduce che

$$\begin{aligned}
\phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= f(P_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2) - f(P_0) = \\
&= f(a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2) - f(P_0) = \\
&= (a_0 f(P_0) + a_1 f(P_1) + a_2 f(P_2)) - f(P_0) = \\
&= a_1(f(P_1) - f(P_0)) + a_2(f(P_2) - f(P_0)) = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2).
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

[continua]
Viceversa, supponiamo che $f$ conservi le combinazioni baricentriche. Fissato $P_0 \in \mathbb{A}$, definiamo l'applicazione $\phi : V \to V'$, ponendo $\phi(v) = f(P_0 + v) - f(P_0)$, e mostriamo che $\phi$ è lineare.
Siano $v_1$, $v_2$ in $V$, $a_1$, $a_2$ in $K$ e poniamo $P_1 = P_0 + v_1$, $P_2 = P_0 + v_2$ e $a_0 = 1 - a_1 - a_2$. Allora

$$P_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 = P_0 + a_1(P_1 - P_0) + a_2(P_2 - P_0) = a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2;$$

da cui si deduce che

$$\begin{aligned} \phi(a_1 v_1 + a_2 v_2) &= f(P_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2) - f(P_0) = \\ &= f(a_0 P_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2) - f(P_0) = \\ &= (a_0 f(P_0) + a_1 f(P_1) + a_2 f(P_2)) - f(P_0) = \\ &= a_1(f(P_1) - f(P_0)) + a_2(f(P_2) - f(P_0)) = a_1 \phi(v_1) + a_2 \phi(v_2). \end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

### Definizione [posizione generale]

I punti $P_0, P_1, \dots, P_r$ dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, sono *in posizione generale* se i vettori dell'insieme $\{\, P_i - P_0 \mid i = 1, \dots, r \,\}$ sono linearmente indipendenti.

- Due punti $P_0$, $P_1$ sono in posizione generale se, e solo se, $P_0 \neq P_1$.
- Tre punti $P_0$, $P_1$, $P_2$ sono in posizione generale se, e solo se, $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ sono linearmente indipendenti; ovvero se, e solo se, i tre punti non sono allineati.
- Più in generale, i punti $P_0$, $P_1$, ..., $P_r$ sono in posizione generale se, e solo se, la sottovarietà lineare generata, $P_0 \vee \cdots \vee P_r = P_0 + \langle P_i - P_0 \mid i = 1, \dots, r \rangle$, ha dimensione $r$.

# Coordinate baricentriche

## Osservazione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine su $K$ e siano $P_0, \dots, P_n$ punti $\mathbb{A}$ in posizione generale. Allora ogni punto $P \in P_0 \vee \cdots \vee P_n$ si scrive *in modo unico* $P = c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n$ come combinazione baricentrica dei punti dati. I coefficenti $(c_0, \dots, c_n) \in K^{n+1}$ così determinati sono le *coordinate baricentriche* del punto $P$ rispetto ai punti $P_0, \dots, P_n$.

*dim.* Si osservi che $P = c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n \iff P - P_0 = c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_n(P_n - P_0)$ e i coefficenti $c_1, \dots, c_n$ sono univocamente determinati perché i vettori $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ sono linearmente indipendenti. Poiché $c_0 + c_1 + \cdots + c_n = 1$, tutti i coefficenti sono univocamente determinati da $P$. $\square$

# Coordinate baricentriche

## Osservazione

Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine su $K$ e siano $P_0, \dots, P_n$ punti $\mathbb{A}$ in posizione generale. Allora ogni punto $P \in P_0 \vee \cdots \vee P_n$ si scrive *in modo unico* $P = c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n$ come combinazione baricentrica dei punti dati. I coefficenti $(c_0, \dots, c_n) \in K^{n+1}$ così determinati sono le *coordinate baricentriche* del punto $P$ rispetto ai punti $P_0, \dots, P_n$.

*dim.* Si osservi che $P = c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n \iff P - P_0 = c_1(P_1 - P_0) + \cdots + c_n(P_n - P_0)$ e i coefficenti $c_1, \dots, c_n$ sono univocamente determinati perché i vettori $P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0$ sono linearmente indipendenti. Poiché $c_0 + c_1 + \cdots + c_n = 1$, tutti i coefficenti sono univocamente determinati da $P$. $\square$

Osservazione : Dati $P_0, \dots, P_n$, punti di uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ sul campo $K$ e presi comunque $b_0, \dots, b_n$ in $K$, con $b_0 + \cdots + b_n = 0$, è ben definito il vettore

$$v = b_0 P_0 + \cdots + b_n P_n := b_0(P_0 - Q) + \cdots + b_n(P_n - Q),$$

e non dipende dalla scelta del punto $Q$ di $\mathbb{A}$. Preso allora $Q = P_0$, si ha $v = b_1(P_1 - P_0) + \cdots + b_n(P_n - P_0)$, da cui si vede che $v \in \langle P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0 \rangle$, sottospazio direttore di $P_0 \vee \cdots \vee P_n$, e che tutti i vettori di quel sottospazio si possono scrivere in questo modo. Se i punti $P_0, \dots, P_n$ sono in posizione generale, allora vi è corrispondenza biunivoca tra vettori $v$ di $\langle P_1 - P_0, \dots, P_n - P_0 \rangle$ e $(n+1)$-uple $(b_0, \dots, b_n)$ con $b_0 + \cdots + b_n = 0$ e si parla di coordinate baricentriche del vettore $v$ rispetto ai punti $P_0, \dots, P_n$.
Naturalmente, se $X = a_0 P_0 + \cdots + a_n P_n$ è un punto $(a_0 + \cdots + a_n = 1)$ e $v = b_0 P_0 + \cdots + b_n P_n$ è un vettore $(b_0 + \cdots + b_n = 0)$, allora si ha $X + v = (a_0 + b_0) P_0 + \cdots + (a_n + b_n) P_n$.

# Equazioni delle rette in coordinate baricentriche

In uno spazio affine, $(\mathbb{A}, V, +)$ (di dimensione $\geq 2$ su $K$), fissiamo tre punti in posizione generale, $P_0$, $P_1$, $P_2$, e nel piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ utilizziamo coordinate baricentriche riferite a questa terna di punti.

## Proposizione

Dati due punti (distinti) $P$ e $Q$ del piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$, siano $P = p_0P_0 + p_1P_1 + p_2P_2$ e $Q = q_0P_0 + q_1P_1 + q_2P_2$, ove $p_0 + p_1 + p_2 = 1 = q_0 + q_1 + q_2$, le coordinate baricentriche $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ di un punto della retta $P \vee Q$ sono tutte e sole le terne $x \in K^3$ che sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \end{cases}$$

equazioni della retta $P \vee Q$ in coordinate baricentriche

ove $\langle (c_0, c_1, c_2) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right\rangle^{\perp}$.

*dim.* Le terne di coordinate sono colonne di $K^3$ e l'applicazione $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_0 + x_1 + x_2$ è una forma lineare su $K^3$, che indicheremo con $\varepsilon = (1, 1, 1)$. Le due terne $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali $(P \neq Q)$, per cui generano un sottospazio di dimensione $2$ di $K^3$. Il suo ortogonale ha dimensione $1$ e la riga $c = (c_0, c_1, c_2) \notin \langle \varepsilon \rangle$ è quindi determinata a meno della moltiplicazione per una costante non nulla.
Se un punto $X = x_0 P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2$ appartiene alla retta $P \vee Q$, le sue coordinate baricentriche sono $x = (1 - a)p + aq$, per qualche $a \in K$, e quindi soddisfano ad entrambo le equazioni. Viceversa, se una terna, $x$, soddisfa alle due equazioni, allora è una terna di coordinate baricentriche $(\varepsilon \circ x = 1)$ e $x = ap + bq$, per opportuni $a$ e $b$ in $K$, perché $x$ è ortogonale a $c$ $(c \circ x = 0)$. Si ha inoltre,

$$1 = \varepsilon \circ x = a(\varepsilon \circ p) + b(\varepsilon \circ q) = a + b$$

e quindi $X = x_0 P_0 + x_1 P_1 + x_2 P_2$ è una combinazione baricentrica di $P$ e $Q$; ovvero sta in $P \vee Q$. $\square$

*dim.* Le terne di coordinate sono colonne di $K^3$ e l'applicazione $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_0 + x_1 + x_2$ è una forma lineare su $K^3$, che indicheremo con $\varepsilon = (1, 1, 1)$. Le due terne $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ e $q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali $(P \neq Q)$, per cui generano un sottospazio di dimensione 2 di $K^3$. Il suo ortogonale ha dimensione 1 e la riga $c = (c_0, c_1, c_2) \notin \langle\varepsilon\rangle$ è quindi determinata a meno della moltiplicazione per una costante non nulla.
Se un punto $X = x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2$ appartiene alla retta $P \vee Q$, le sue coordinate baricentriche sono $x = (1 - a)p + aq$, per qualche $a \in K$, e quindi soddisfano ad entrambo le equazioni. Viceversa, se una terna, $x$, soddisfa alle due equazioni, allora è una terna di coordinate baricentriche $(\varepsilon \circ x = 1)$ e $x = ap + bq$, per opportuni $a$ e $b$ in $K$, perché $x$ è ortogonale a $c$ $(c \circ x = 0)$. Si ha inoltre,

$$1 = \varepsilon \circ x = a(\varepsilon \circ p) + b(\varepsilon \circ q) = a + b$$

e quindi $X = x_0P_0 + x_1P_1 + x_2P_2$ è una combinazione baricentrica di $P$ e $Q$; ovvero sta in $P \vee Q$. □

Anche in questo caso, il sottospazio direttore della retta è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo associato. Quindi le equazioni di ogni retta parallela a $P \vee Q$ si ottengono sostituendo alla riga $c$ che compare nell'equazione di $P \vee Q$, una riga del tipo $c + a\varepsilon$, al variare di $a \in K$. Se $v = b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2$ è un vettore $(\varepsilon \circ b = 0)$, la retta per i punti $P' = P + v$ e $Q' = Q + v$ ha equazioni $\begin{cases} \varepsilon \circ x = 1 \\ (c + a\varepsilon) \circ x = 0 \end{cases}$, ove $a = -c \circ b$ (e non cambia se si aggiunge ad $v$ un vettore parallelo alla retta $P \vee Q$).

Possiamo quindi dimostrare la seguente condizione di allineamento tra punti e di concorrenza tra rette.

Tramite le coordinate baricentriche possiamo esprimere in un modo molto simmetrico la condizione di allineamento tra punti e la condizione di appartenenza ad un fascio (proprio o improprio) per le rette del piano.

### Proposizione

Siano $P_0$, $P_1$, $P_2$ tre punti in posizione generale di un piano affine sul campo $K$.

(a) I tre punti $P$, $Q$, $R$, di coordinate baricentriche

$$P = p_0P_0 + p_1P_1 + p_2P_2, \qquad Q = q_0P_0 + q_1P_1 + q_2P_2, \qquad R = r_0P_0 + r_1P_1 + r_2P_2,$$

sono allineati se, e solo se, $\det\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 0.$

(b) Le tre rette $r$, $s$ , $t$, di equazioni (in coordinate baricentriche)

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0 \end{cases} \qquad t : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \end{cases}$$

sono parallele o concorrono in un punto se, e solo se, $\det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$

*dim.* (*a*) è immediato per quanto visto nella proposizione precedente. Per quanto riguarda (*b*) , basta osservare che se tre rette concorrono ad uno stesso punto $X$, di coordinate baricentriche $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, il sottospazio $\langle x \rangle$ è contenuto nel nucleo della matrice e ha dimensione positiva, perché $x_0 + x_1 + x_2 = 1$. Se invece sono parallele, allora le tre righe della matrice appartengono tutte al sottospazio generato da una di queste e da $\varepsilon$ e quindi la matrice ha rango due. In entrambo i casi si annulla il determinante.

Viceversa, se il determinante della matrice si annulla, esiste una terna $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ contenuta nel nucleo della matrice. Se $\varepsilon \circ x = a \neq 0$, posso dividere per $a$ le entrate della terna e trovare le coordinate baricentriche di un punto che appartiene a tutte e tre le rette. Se invece, $\varepsilon \circ x = 0$; le entrate della terna sono le coordinate baricentriche di un vettore, non nullo, contenuto nei sottospazi direttori delle tre rette, che sono perciò parallele. $\square$

Dalla Proposizione precedente si possono dedurre con un calcolo diretto i Teoremi di Ceva e Menelao. Iniziamo ricordando un classico invariante della geometria affine (già visto nel piano complesso)

**Definizione [rapporto semplice]**

Il *rapporto semplice* tra tre punti allineati, $A$, $B$, $C$, dello spazio affine, con $A \neq B$, è lo scalare $[A, B, C] = c \in K$ per cui si ha $C - A = c(B - A)$. Con un abuso di linguaggio (che segue una lunga tradizione) scriveremo anche $[A, B, C] = \frac{C-A}{B-A}$.

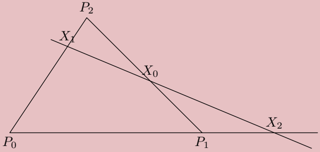
# Teoremi di Ceva e Menelao

**Teorema**

Siano $P_0, P_1, P_2$ i vertici di un triangolo non degenere, ovvero tre punti in posizione generale di uno spazio affine; e siano dati i punti $X_0 \in P_1 \vee P_2$, $X_1 \in P_2 \vee P_0$, $X_2 \in P_0 \vee P_1$, distinti dai vertici del triangolo.

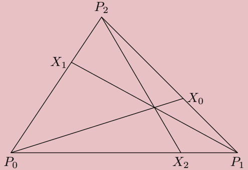
(a) [Teorema di Menelao] I punti $X_0$, $X_1$, $X_2$, sono allineati se, e solo se,

$$[X_0, P_1, P_2][X_1, P_2, P_0][X_2, P_0, P_1] = 1.$$




(b) [Teorema di Ceva] Le rette $X_0 \vee P_0$, $X_1 \vee P_1$, $X_2 \vee P_2$, sono parallele o concorrono ad uno stesso punto se, e solo se,

$$[X_0, P_1, P_2][X_1, P_2, P_0][X_2, P_0, P_1] = -1.$$



*dim.* In entrambo i casi sia $[X_0, P_1, P_2] = a$, $[X_1, P_2, P_0] = b$ e $[X_2, P_0, P_1] = c$, ove $a, b, c \notin \{0, 1\}$. Da $P_2 - X_0 = a(P_1 - X_0)$, applicando i vettori in $X_0$, si ricava $P_2 = X_0 + a(P_1 - X_0)$ e quindi $P_2 = aP_1 + (1 - a)X_0$. Usando $P_2$ come punto base, si ricava $a(P_1 - P_2) + (1 - a)(X_0 - P_2) = 0$, e quindi $X_0 - P_2 = \frac{a}{a-1}(P_1 - P_2)$. Possiamo quindi scrivere, in coordinate baricentriche,

$$X_0 = \frac{a}{a-1}P_1 - \frac{1}{a-1}P_2 \quad \text{e analogamente} \quad X_1 = \frac{b}{b-1}P_2 - \frac{1}{b-1}P_0, \quad X_2 = \frac{c}{c-1}P_0 - \frac{1}{c-1}P_1.$$

*dim.* In entrambo i casi sia $[X_0, P_1, P_2] = a$, $[X_1, P_2, P_0] = b$ e $[X_2, P_0, P_1] = c$, ove $a, b, c \notin \{0, 1\}$. Da $P_2 - X_0 = a(P_1 - X_0)$, applicando i vettori in $X_0$, si ricava $P_2 = X_0 + a(P_1 - X_0)$ e quindi $P_2 = aP_1 + (1-a)X_0$. Usando $P_2$ come punto base, si ricava $a(P_1 - P_2) + (1-a)(X_0 - P_2) = 0$, e quindi $X_0 - P_2 = \frac{a}{a-1}(P_1 - P_2)$. Possiamo quindi scrivere, in coordinate baricentriche,

$$X_0 = \frac{a}{a-1}P_1 - \frac{1}{a-1}P_2 \quad \text{e analogamente} \quad X_1 = \frac{b}{b-1}P_2 - \frac{1}{b-1}P_0, \quad X_2 = \frac{c}{c-1}P_0 - \frac{1}{c-1}P_1.$$

(*a*) Per quanto visto nella Proposizione precedente, i tre punti sono allineati se, e solo se,

$$0 = \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{a-1} & -\frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{b-1} & 0 & \frac{b}{b-1} \\ \frac{c}{c-1} & -\frac{1}{c-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)};$$

e quindi se, e solo se, $abc = 1$.

*dim.* In entrambo i casi sia $[X_0, P_1, P_2] = a$, $[X_1, P_2, P_0] = b$ e $[X_2, P_0, P_1] = c$, ove $a, b, c \notin \{0, 1\}$. Da $P_2 - X_0 = a(P_1 - X_0)$, applicando i vettori in $X_0$, si ricava $P_2 = X_0 + a(P_1 - X_0)$ e quindi $P_2 = aP_1 + (1-a)X_0$. Usando $P_2$ come punto base, si ricava $a(P_1 - P_2) + (1-a)(X_0 - P_2) = 0$, e quindi $X_0 - P_2 = \frac{a}{a-1}(P_1 - P_2)$. Possiamo quindi scrivere, in coordinate baricentriche,

$$X_0 = \frac{a}{a-1}P_1 - \frac{1}{a-1}P_2 \quad \text{e analogamente} \quad X_1 = \frac{b}{b-1}P_2 - \frac{1}{b-1}P_0, \quad X_2 = \frac{c}{c-1}P_0 - \frac{1}{c-1}P_1.$$

(*a*) Per quanto visto nella Proposizione precedente, i tre punti sono allineati se, e solo se,

$$0 = \det\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{a-1} & -\frac{1}{a-1} \\ -\frac{1}{b-1} & 0 & \frac{b}{b-1} \\ \frac{c}{c-1} & -\frac{1}{c-1} & 0 \end{pmatrix} = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)};$$

e quindi se, e solo se, $abc = 1$.

(*b*) Le tre rette, $P_0 \vee X_0$, $P_1 \vee X_1$, $P_2 \vee X_2$, hanno equazioni (in coordinate baricentriche)

$$P_0 \vee X_0 : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = 0 \end{cases}, \quad P_1 \vee X_1 : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ bx_0 + x_2 = 0 \end{cases}, \quad P_2 \vee X_2 : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 1 \\ x_0 + cx_1 = 0 \end{cases}.$$

Per quanto visto nel punto (b) della Proposizione precedente, le tre rette sono parallele o concorrenti se, e solo se,

$$0 = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & c & 0 \end{pmatrix} = 1 + abc;$$

e quindi se, e solo se, $abc = -1$. □

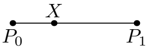
# Combinazioni baricentriche e convessità (cenni)

Le combinazioni baricentriche $c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$ $(c_0 + \cdots + c_n = 1)$ descrivono tutti e soli i punti della sottovarietà lineare $P_0 \vee \cdots \vee P_n$ dello spazio affine. Nel caso di uno spazio affine sul campo reale (o, più in generale, su un campo ordinato), i segni dei coefficienti della combinazione baricentrica che lo descrive danno informazioni sulla posizione del punto $P$ rispetto ai punti $P_0, \ldots, P_n$.

# Combinazioni baricentriche e convessità (cenni)

Le combinazioni baricentriche $c_0P_0 + \cdots + c_nP_n$ $(c_0 + \cdots + c_n = 1)$ descrivono tutti e soli i punti della sottovarietà lineare $P_0 \vee \cdots \vee P_n$ dello spazio affine. Nel caso di uno spazio affine sul campo reale (o, più in generale, su un campo ordinato), i segni dei coefficienti della combinazione baricentrica che lo descrive danno informazioni sulla posizione del punto $P$ rispetto ai punti $P_0, \dots, P_n$.

Esempio : Dati due punti distinti, $P_0 \neq P_1$, di uno spazio affine reale, $X = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t(P_1 - P_0)$, al variare di $t \in [0,1]$, descrivono il segmento di estremi $P_0$ e $P_1$ (e sono tutti e soli i punti della retta $P_0 \vee P_1$ per cui sono positive entrambe le coordinate baricentriche)

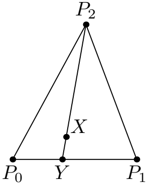



Dati tre punti in posizione generale, $P_0$, $P_1$, $P_2$, sia

$$T = \{\ X = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 \mid c_0 + c_1 + c_2 = 1,\ c_i \geq 0, \text{per } i = 0,1,2\ \}.$$

Dato $X \in T$, si ha $1 - c_2 = c_0 + c_1$ e quindi, se $X \neq P_2$, si ha

$$X = c_0P_0 + c_1P_1 + c_2P_2 = (1-c_2)\left(\frac{c_0}{c_0+c_1}P_0 + \frac{c_1}{c_0+c_1}P_1\right) + c_2P_2.$$




ovvero $X$ appartiene al segmento che congiunge $P_2$ con il punto $Y = \frac{c_0}{c_0+c_1}P_0 + \frac{c_1}{c_0+c_1}P_1$ che, per quanto visto sopra, appartiene al segmento $P_0P_1$. Dunque i punti di $T$ sono tutti e soli i punti interni al triangolo di vertici $P_0$, $P_1$, $P_2$.

**N.B.** : Al di fuori di uno spazio affine su un campo ordinato, la nozione di *segmento* tra due punti perde di significato, così come la nozione di *punti interni* al triangolo. Ad esempio, nella retta affine sul campo $\mathbb{F}_3$, vi sono solo tre punti e ciascuno è il punto medio degli altri $2$.

**N.B.** : Al di fuori di uno spazio affine su un campo ordinato, la nozione di *segmento* tra due punti perde di significato, così come la nozione di *punti interni* al triangolo. Ad esempio, nella retta affine sul campo $\mathbb{F}_3$, vi sono solo tre punti e ciascuno è il punto medio degli altri $2$.

Gli esempi fatti si generalizzano a dimensioni superiori e possiamo dare la seguente definizione.

### Definizione [inviluppo convesso, simplesso]

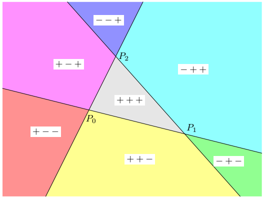
Dati $n+1$ punti di uno spazio affine reale, $P_0, \dots, P_n$, l'insieme

$$\Delta = \{\, X = c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n \mid c_0 + \cdots + c_n = 1,\ c_i \geq 0, \text{per } i = 0, \dots, n \,\}$$

è *l'inviluppo convesso* dei punti dati. Se i punti sono in posizione generale, si parla del *simplesso* $n$-dimensionale di vertici $P_0, \dots, P_n$.

Generalizzando quanto visto nell'esempio, si può fare ricorrenza su $n$ e vedere che la costruzione dei punti di $\Delta$ si ottiene iterando la costruzione di segmenti tra due punti. In particolare $\Delta$ è un insieme convesso, ovvero, se $P$ e $Q$ sono in $\Delta$, allora tutti i punti del segmento tra $P$ e $Q$ sono anch'essi in $\Delta$.

**Esempio** : Dati $P_0, \dots, P_n$ in posizione generale, i segni delle coordinate baricentriche $c_0 P_0 + \cdots + c_n P_n$ non solo definiscono i punti interni al simplesso (quando i coefficienti sono tutti positivi), ma permettono di suddividere lo spazio in differenti regioni.
Ad esempio, nel piano abbiamo le sette $(2^3 - 1)$ regioni rappresentate nella figura qui a fianco; ove, con il simbolo $\boxed{+--}$ è stata evidenziata la regione (in rosso) costituita dai punti $c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2$, per cui $c_0 + c_1 + c_2 = 1$, e i segni dei coefficienti sono $c_0 > 0$, $c_1 < 0$, $c_2 < 0$. In modo analogo si descrivono le altre.




Il Lettore può provare a generalizzare le costruzioni e distinguere le analoghe regioni determinate dai segni delle coordinate baricentriche di 4 punti in posizione generale nello spazio affine tridimensionale.

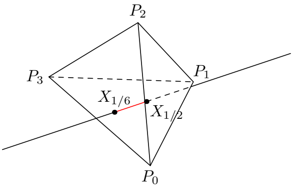
**Esercizio** : Nello spazio affine $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$, si consideri il simplesso (tetraedro) di vertici

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e la retta, $r$, di equazioni cartesiane $r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - 8z = 3 \end{cases}$. Vogliamo determinare i punti di intersezione tra il simplesso e la retta.

*Svolg.:* Le coordinate di un generico punto della retta $r$ si possono scrivere come $X_t = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ (2t-3)/8 \end{pmatrix}$, al variare di $t$ in $\mathbb{R}$; quindi le sue coordinate baricentriche, $X_t = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3$, si trovano risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} c_0 + c_1 - c_3 = t \\ 2c_1 + 2c_2 = 2t \\ -2c_0 + 2c_2 + c_3 = \frac{2t-3}{8} \\ c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} c_0 = \frac{5-6t}{8} \\ c_1 = \frac{12t-2}{8} \\ c_2 = \frac{2-4t}{8} \\ c_3 = \frac{3-2t}{8} \end{cases} .$$




La retta interseca il tetraedro in punti in cui le quattro coordinate baricentriche sono tutte non-negative, e quindi, per $t \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$. Quindi, supponendo la retta $r$ percorsa nel verso delle $t$ crescenti, possiamo dire che la retta 'entra' nel tetraedro nel punto $X_{1/6}$ (nella faccia di vertici $P_0$, $P_2$, $P_3$) ed 'esce' dal punto $X_{1/2}$ (nella faccia di vertici $P_0$, $P_1$, $P_3$); precisamente

$$X_{1/6} = \tfrac{1}{2} P_0 + \tfrac{1}{6} P_2 + \tfrac{1}{3} P_3 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad X_{1/2} = \tfrac{1}{4} P_0 + \tfrac{1}{2} P_1 + \tfrac{1}{4} P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

Si veda la figura a fianco per una realizzazione grafica; ove si è evidenziato in rosso il segmento di retta all'interno del tetraedro. □

# Proiezioni e simmetrie

Se $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ è una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$, complementare a $V_{\mathbb{L}}$, $(V = V_{\mathbb{L}} \oplus W)$, siano $\pi^W_{V_{\mathbb{L}}} : V \to V$ e $\sigma^W_{V_{\mathbb{L}}} : V \to V$ gli endomorfismi di proiezione e simmetria associati alla decomposizione $V = V_{\mathbb{L}} \oplus W$. Si definiscono le seguenti applicazioni affini

- la *proiezione su* $\mathbb{L}$ *parallelamente a* $W$, $p^W_{\mathbb{L}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, ove $p^W_{\mathbb{L}}(X) = P + \pi^W_{V_{\mathbb{L}}}(X - P)$ per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$;
- la *simmetria di asse* $\mathbb{L}$ *e direzione* $W$, $s^W_{\mathbb{L}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, ove $s^W_{\mathbb{L}}(X) = P + \sigma^W_{V_{\mathbb{L}}}(X - P)$, per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$.

# Proiezioni e simmetrie

Se $\mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$ è una sottovarietà lineare non vuota dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e $W$ è un sottospazio vettoriale di $V$, complementare a $V_{\mathbb{L}}$, $(V = V_{\mathbb{L}} \oplus W)$, siano $\pi^W_{V_{\mathbb{L}}} : V \to V$ e $\sigma^W_{V_{\mathbb{L}}} : V \to V$ gli endomorfismi di proiezione e simmetria associati alla decomposizione $V = V_{\mathbb{L}} \oplus W$. Si definiscono le seguenti applicazioni affini

- la *proiezione su* $\mathbb{L}$ *parallelamente a* $W$, $p^W_{\mathbb{L}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, ove $p^W_{\mathbb{L}}(X) = P + \pi^W_{V_{\mathbb{L}}}(X - P)$ per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$;
- la *simmetria di asse* $\mathbb{L}$ *e direzione* $W$, $s^W_{\mathbb{L}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, ove $s^W_{\mathbb{L}}(X) = P + \sigma^W_{V_{\mathbb{L}}}(X - P)$, per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$.

Esempio : Se $(\mathbb{A}, V+)$ ha dimensione $4$ e $\mathbb{L}$ e $W$ hanno entrambi dimensione $2$, possiamo prendere un riferimento $\mathscr{R} = \{ O; v_1, \dots, v_4 \}$ per cui $\mathbb{L} = O + \langle v_1, v_2 \rangle$ e $W = \langle v_3, v_4 \rangle$. In questo riferimento le matrici di proiezione e simmetria sono, rispettivamente,

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(p^W_{\mathbb{L}}) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(s^W_{\mathbb{L}}) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si può di mostrare che, per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$, $p_{\mathbb{L}}^{W}(X)$ è l'unico punto $Y$ di $\mathbb{L}$ tale che $Y - X \in W$.
Analogamente, per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$, $s_{\mathbb{L}}^{W}(X)$ è l'unico punto $Y$ di $\mathbb{A}$ tale che $\frac{X+Y}{2} \in \mathbb{L}$ e $Y - X \in W$.
Inoltre, per ogni punto $X$ di $\mathbb{A}$, si ha $s_{\mathbb{L}}^{W}(X) = 2p_{\mathbb{L}}^{W}(X) - X$ (combinazione baricentrica). Come per le analoghe applicazioni lineari, si ha $p_{\mathbb{L}} \circ p_{\mathbb{L}} = p_{\mathbb{L}}$ e $s_{\mathbb{L}} \circ s_{\mathbb{L}} = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ e quindi la simmetria è un'affinità (isomorfismo affine).

Esempio : Nello spazio $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ col riferimento canonico $\mathscr{R} = \{ O; \mathcal{E} \}$, si considerino la sottovarietà lineare $\mathbb{L} : \begin{cases} x_1 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$ e il sottospazio vettoriale $W = \langle 2e_1 + e_3, e_2 - 2e_4 \rangle$. Si scrivano nel riferimento dato la matrice della proiezione su $\mathbb{L}$ parallelamente a $W$ e la matrice della simmetria di asse $\mathbb{L}$ e direzione $W$.

*Svolg.:* Dalle equazioni cartesiane si ricava $\mathbb{L} = O + 2e_1 + e_2 + \langle 3e_1 + e_3, e_2 - e_4 \rangle$ e si verifica facilmente che $V_{\mathbb{L}} \oplus W = \mathbb{Q}^4$. Dato un punto $X \in \mathbb{A}$, dobbiamo trovare il vettore $w = a(2e_1 + e_3) + b(e_2 - 2e_4)$ tale che $X - w \in \mathbb{L}$. Si ha

$$p_{\mathbb{L}}^{W}(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 - 2a \\ x_2 - b \\ x_3 - a \\ x_4 + 2b \end{pmatrix} \in \mathbb{L} \iff \begin{cases} (x_1 - 2a) - 3(x_3 - a) = 2 \\ (x_2 - b) + (x_4 + 2b) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 - x_1 + 3x_3 \\ b = 1 - x_2 - x_4 \end{cases}.$$

Dunque
$p_{\mathbb{L}}^{W}(X) = O + (3x_1 - 6x_3 - 4)e_1 + (2x_2 + x_4 - 1)e_2 + (x_1 - 2x_3 - 2)e_3 + (-2x_2 - x_4 + 2)e_4$;
quindi

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(p_{\mathbb{L}}^{W}) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -4 & 3 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(s_{\mathbb{L}}^{W}) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & 5 & 0 & -6 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

# Omotetie

## Definizione [omotetia]

Fissato un punto $P$ dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ su $K$ e uno scalare $\alpha \in K \smallsetminus \{0\}$, si chiama omotetia di centro $P$ e fattore $\alpha$ l'applicazione $\omega_{P,\alpha} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$, definita da

$$\omega_{P,\alpha}(X) = P + \alpha(X - P) = (1-\alpha)P + \alpha X, \quad \text{per ogni } X \in \mathbb{A}.$$

La funzione è invertibile, perché $\omega_{P,1/\alpha} = \omega_{P,\alpha}^{-1}$, ed è un'applicazione affine perché rispetta le combinazioni baricentriche. Infatti

$$\begin{aligned}\omega_{P,\alpha}(bX + (1-b)Y) &= (1-\alpha)P + \alpha bX + \alpha(1-b)Y = \\ &= b((1-\alpha)P + \alpha X) + (1-b)((1-\alpha)P + \alpha Y) = b\omega_{P,\alpha}(X) + (1-b)\omega_{P,\alpha}(Y).\end{aligned}$$

Dunque si tratta di affinità. Qualunque sia $P$, $\omega_{P,1} = \mathrm{id}_{\mathbb{A}}$ e $\omega_{P,\alpha} \circ \omega_{P,\beta} = \omega_{P,\alpha\beta}$; quindi le omotetie con un centro $P$ fissato formano un sottogruppo del gruppo delle Affinità, isomorfo al gruppo moltiplicativo $K^{\times}$.
Se $\alpha \neq 1$, $P$ è l'unico punto unito di $\omega_{P,\alpha}$ e tutte le sottovarietà lineari passanti per $P$ sono (globalmente) unite.
In un qualunque riferimento $\mathscr{R} = \{O; \mathcal{V}\}$ la matrice di un'omotetia di fattore $\alpha \neq 1$ è $A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & \alpha\mathbf{1} \end{array}\right)$,

ove il centro dell'omotetia è il punto di coordinate $\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline \frac{1}{1-\alpha}t \end{array}\right)$ nel riferimento $\mathscr{R}$.

Componendo due omotetie si ha “quasi sempre” un’omotetia; precisamente

- Se $\alpha\beta \neq 1$, allora $\omega_{P_1,\beta} \circ \omega_{P_0,\alpha} = \omega_{Q,\beta\alpha}$, ove $Q = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} P_1 + \frac{\beta-\alpha\beta}{1-\alpha\beta} P_0$.
- Se $\alpha\beta = 1$, allora $\omega_{P_1,\beta} \circ \omega_{P_0,\alpha} = \tau_v$ è la traslazione di vettore $v = \frac{\alpha-1}{\alpha}(P_1 - P_0)$ .

Componendo due omotetie si ha "quasi sempre" un'omotetia; precisamente

- Se $\alpha\beta \neq 1$, allora $\omega_{P_1,\beta} \circ \omega_{P_0,\alpha} = \omega_{Q,\beta\alpha}$, ove $Q = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} P_1 + \frac{\beta-\alpha\beta}{1-\alpha\beta} P_0$.
- Se $\alpha\beta = 1$, allora $\omega_{P_1,\beta} \circ \omega_{P_0,\alpha} = \tau_v$ è la traslazione di vettore $v = \frac{\alpha-1}{\alpha}(P_1 - P_0)$ .

Esercizio : Mostrare che tutte le affinità della retta affine su $K$ sono omotetie oppure traslazioni e che un'affinità della retta, priva di punti uniti, è una traslazione.

*Svolg.:* Fissato un riferimento $\mathscr{R} = \{O; \{v\}\}$, la matrice di un'affinità $f$ ha la forma $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & a \end{array}\right)$, con $a \neq 0$ (perché dev'essere invertibile). Ciò significa che $f(O + tv) = O + bv + atv$, per ogni $t \in K$ e quindi $f$ si ottiene componendo l'omotetia $\omega_{O,a}$, seguita dalla traslazione $\tau_{bv}$.

$\boxed{\text{Se } a = 1}$, $\omega_{O,1} = \mathrm{id}$ e quindi si ha la sola traslazione di vettore $bv$.

$\boxed{\text{Se } a \neq 1}$, sia $P = O + \frac{b}{1-a} v$ e si ha

$$f(P + tv) = f(O + \frac{b}{a-1} v + tv) = O + bv + \frac{ab}{a-1} v + atv = O + \frac{b}{a-1} v + atv = P + atv;$$

dunque $f$ è l'omotetia $\omega_{P,a}$ di centro $P$ e fattore $a$.
L'identità può essere pensata sia come un omotetia (centro qualsiasi e fattore $1$) che come una traslazione (di vettore 0). Si osservi che tutte le omotetie hanno il centro come punto unito, mentre le traslazioni (di vettore non nullo) non hanno punti uniti. □

Esercizio : Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ un piano affine sul campo $K$ e sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità che ammette due rette unite distinte.

(a) Se le due rette sono incidenti in un punto $P$, è vero che tutte le rette del fascio di centro $P$ sono unite?

(b) Se le due rette sono parallele, è vero che sono unite tutte le rette del fascio improprio contenente le due rette?

*Svolg.:* (*a*) Siano $r = P + \langle v \rangle$, e $s = P + \langle w \rangle$ le due rette unite e osserviamo che $\{P\} = r \cap s$ è un punto unito. Poiché le rette sono distinte, i vettori $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, poiché le rette sono unite, i due vettori sono anche autovettori per l'applicazione lineare $\phi : V \to V$, soggiacente a $f$. Dunque, nel riferimento $\mathscr{R} = \{\, P; v, w \,\}$, la matrice di $f$ è

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Se $a \neq b$, non vi sono altre rette unite. Se, invece $a = b$, allora $f$ è l'omotetia $\omega_{P,a}$ e tutte le rette per $P$ sono unite.
(*b*) Siano $r = P + \langle v \rangle$ e $s = P + w + \langle v \rangle$ le due rette unite. Poiché le rette sono distinte, i vettori $v$ e $w$ sono linearmente indipendenti. Inoltre, si ha $f(P) = P + av \in r$ e, detta $\phi : V \to V$ l'applicazione lineare soggiacente a $f$, si ha $\phi(v) = bv$ e $\phi(w) = w + cv$ per opportuni scalari $a$, $b$, $c$. Dunque, nel riferimento $\mathscr{R} = \{\, P; v, w \,\}$, la matrice di $f$ è

$$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Tutte le rette parallele a $r$, ovvero le rette $r_k = P + kw + \langle v \rangle$, al variare di $k \in K$, sono rette unite per $f$. Infatti, $f(P + kw + tv) = P + kw + (a + kc + bt)v \in r_k$, per ogni $k \in K$. $\square$

Esercizio : Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{Q}^4)$ dotato del riferimento canonico $\mathscr{R} = \{ O; e_1, \dots, e_4 \}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L}_\alpha : \begin{cases} x_1 - \alpha x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \mathbb{M} = O + e_3 + \langle e_1 + e_2, e_2 - e_4 \rangle \,.$$

(a) Si calcolino le dimensioni di $\mathbb{L}_\alpha$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathbb{M}$ e $\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M}$ e si determini la posizione reciproca al variare di $\alpha$. Si determini, se esiste, una retta $s$ sghemba simultanemente con $\mathbb{M}$ e con tutte le $\mathbb{L}_\alpha$. In caso affermativo si dia un esempio.

(b) Posto $\alpha = 0$, si determini, se esiste, un piano $\pi$, passante per $P = O + e_2$ e che tagli una retta sia su $\mathbb{L}_0$ che su $\mathbb{M}$. In caso affermativo, si determinino tutti i piani con tale proprietà.

(c) Si scriva la matrice nel riferimento $\mathscr{R}$ della proiezione su $\mathbb{L}_0$ parallelamente al sottospazio direttore di $\mathbb{M}$.

*Svolg.:* (a) Si osservi che $\mathbb{L}_\alpha = O + e_1 - e_2 + \langle \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle$, quindi $\dim \mathbb{L}_\alpha = 2 = \dim \mathbb{M}$. Sostituendo la rappresentazione parametrica di $\mathbb{M}$ nelle equazioni di $\mathbb{L}_\alpha$ si ricava che $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathbb{M} = \{O + e_3 + (\alpha + 1)(e_1 + e_4)\}$ ha dimensione 0 e, per la formula di Grassmann affine, $\dim (\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M}) = 4$. Dunque i due piani si intersecano in un punto, che varia al variare di $\alpha$. L'origine non appartiene né a $\mathbb{M}$, né a nessuno degli $\mathbb{L}_\alpha$; allora una retta $s = O + \langle u \rangle$ è sghemba con tutti i piani se, e solo se, $\dim (\mathbb{L}_\alpha \vee s) = \dim \langle u, e_1 - e_2, \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle = 4 =$
$\dim (\mathbb{M} \vee s) \dim \langle u, e_3, e_1 + e_2, e_2 - e_4 \rangle$; ovvero, posto $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, deve aversi

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \alpha & 0 \\ x_2 & -1 & -\alpha & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(x_1 + x_2 + x_4) \neq 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + x_4 \neq 0.$$

Ad esempio, si poteva prendere $s = O + \langle e_1 \rangle$, oppure $s = O + \langle e_4 \rangle$.

*Svolg.:* (*a*) Si osservi che $\mathbb{L}_\alpha = O + e_1 - e_2 + \langle \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle$, quindi $\dim \mathbb{L}_\alpha = 2 = \dim \mathbb{M}$. Sostituendo la rappresentazione parametrica di $\mathbb{M}$ nelle equazioni di $\mathbb{L}_\alpha$ si ricava che $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathbb{M} = \{O + e_3 + (\alpha + 1)(e_1 + e_4)\}$ ha dimensione $0$ e, per la formula di Grassmann affine, $\dim (\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M}) = 4$. Dunque i due piani si intersecano in un punto, che varia al variare di $\alpha$. L'origine non appartiene né a $\mathbb{M}$, né a nessuno degli $\mathbb{L}_\alpha$; allora una retta $s = O + \langle u \rangle$ è sghemba con tutti i piani se, e solo se, $\dim (\mathbb{L}_\alpha \vee s) = \dim \langle u, e_1 - e_2, \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle = 4 =$ $\dim (\mathbb{M} \vee s) \dim \langle u, e_3, e_1 + e_2, e_2 - e_4 \rangle$; ovvero, posto $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4$, deve aversi

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \alpha & 0 \\ x_2 & -1 & -\alpha & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(x_1 + x_2 + x_4) \neq 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + x_4 \neq 0.$$

Ad esempio, si poteva prendere $s = O + \langle e_1 \rangle$, oppure $s = O + \langle e_4 \rangle$.

(*b*) Due piani si intersecano in una retta se non sono paralleli e generano uno spazio tridimensionale. Poiché il punto $P = O + e_2$ non appartiene né a $\mathbb{L}_0$ né a $\mathbb{M}$, l'unico piano che possa soddisfare alla condizione richiesta è $\pi = (\mathbb{L} \vee P) \cap (\mathbb{M} \vee P) = O + e_2 + \langle e_1 - e_3 + 2e_4, e_2 - 2e_3 + e_4 \rangle$, che interseca ciascuno dei due piani in una retta.

*Svolg.:* (*a*) Si osservi che $\mathbb{L}_\alpha = O + e_1 - e_2 + \langle \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle$, quindi $\dim \mathbb{L}_\alpha = 2 = \dim \mathbb{M}$. Sostituendo la rappresentazione parametrica di $\mathbb{M}$ nelle equazioni di $\mathbb{L}_\alpha$ si ricava che $\mathbb{L}_\alpha \cap \mathbb{M} = \{O + e_3 + (\alpha + 1)(e_1 + e_4)\}$ ha dimensione 0 e, per la formula di Grassmann affine, $\dim(\mathbb{L}_\alpha \vee \mathbb{M}) = 4$. Dunque i due piani si intersecano in un punto, che varia al variare di $\alpha$. L'origine non appartiene né a $\mathbb{M}$, né a nessuno degli $\mathbb{L}_\alpha$; allora una retta $s = O + \langle u \rangle$ è sghemba con tutti i piani se, e solo se, $\dim(\mathbb{L}_\alpha \vee s) = \dim \langle u, e_1 - e_2, \alpha(e_1 - e_2) + e_3, e_2 + e_4 \rangle = 4 =$ $\dim(\mathbb{M} \vee s) \dim \langle u, e_3, e_1 + e_2, e_2 - e_4 \rangle$; ovvero, posto $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, deve aversi

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & 1 & \alpha & 0 \\ x_2 & -1 & -\alpha & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -(x_1 + x_2 + x_4) \neq 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + x_4 \neq 0.$$

Ad esempio, si poteva prendere $s = O + \langle e_1 \rangle$, oppure $s = O + \langle e_4 \rangle$.
(*b*) Due piani si intersecano in una retta se non sono paralleli e generano uno spazio tridimensionale. Poiché il punto $P = O + e_2$ non appartiene né a $\mathbb{L}_0$ né a $\mathbb{M}$, l'unico piano che possa soddisfare alla condizione richiesta è $\pi = (\mathbb{L} \vee P) \cap (\mathbb{M} \vee P) = O + e_2 + \langle e_1 - e_3 + 2e_4, e_2 - 2e_3 + e_4 \rangle$, che interseca ciascuno dei due piani in una retta.
(*c*) Indichiamo con $pr$ la proiezione cercata. Allora per ogni punto $X = O + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$, si ha

$$pr \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - a \\ x_2 - a - b \\ x_3 \\ x_4 + b \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - a = 1 \\ (x_1 - a) + (x_2 - a - b) - (x_4 + b) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = x_1 - 1 \\ b = 1 - \frac{x_1 - x_2 +}{2} \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere la matrice cercata

$$A = \alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(pr) = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

e concludere l'esercizio.

# Equazione dei punti uniti

In uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, una traslazione $\tau_v$ di vettore $v \neq 0$ non ha punti uniti (è l'assioma di "fedeltà" dell'azione dei vettori sui punti dello spazio affine). Sono però unite tutte le sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ parallele alla direzione di traslazione. Infatti, se $X \in \mathbb{L}$ e $v$ appartiene allo spazio direttore $V_{\mathbb{L}}$, allora $\tau_v(X) = X + v \in \mathbb{L}$.

Un'omotetia $\omega_{P,\alpha}$, con $\alpha \neq 1$, ha il punto $P$ come unico punto unito (infatti, $\omega_{P,\alpha}(X) = X$ se, e solo se, $X - P = \alpha(X - P)$; e ciò accade se, e solo se, $X = P$, poiché $\alpha \neq 1$). Sono però unite tutte le sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ contenenti il punto $P$. Infatti, se $X \in \mathbb{L} = P + V_{\mathbb{L}}$, allora $\omega_{P,\alpha}(X) = P + \alpha(X - P) \in \mathbb{L}$.

## Proposizione [punti uniti di un'affinità]

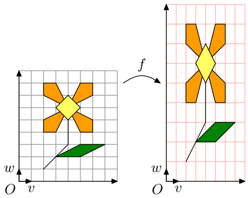
Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità dello spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, con applicazione lineare associata $\phi : V \to V$. Fissato un punto $O \in \mathbb{A}$ e posto $t_0 = f(O) - O$, sia ha che un punto $X = O + v$ è unito se, e solo se, $v \in (\phi - \mathrm{id})^{-1}(t_0)$.

In particolare, se $\mathscr{R} = \{O; \mathcal{V}\}$ è un riferimento e $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline t & A \end{array}\right)$, i punti uniti di $f$ formano la sottovarietà lineare definita dal sistema lineare $(A - \mathbf{1})x = -t$.

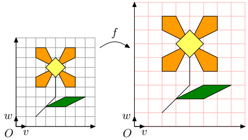
*dim.* Se $X = O + v$, allora $f(X) = f(O) + \phi(v) = O + t_0 + \phi(v)$. Dunque, $f(x) = X$ se, e solo se, $\phi(v) - v = -t_0$, come richiesto nell'enunciato. Scritto in termini di coordinate nel sistema di riferimento $\mathscr{R}$, diventa il il sistema lineare $(A - \mathbf{1})x = -t$ (equazione dei punti uniti). $\square$

Chiudiamo con una rapida carrellata sulle sottovarietà lineari unite per le affinità del piano, nell'ipotesi che queste siano tutte triangolarizzabili; ovvero che esista un sistema di riferimento affine rispetto a cui si abbia una matrice triangolare (inferiore).
Sia dunque $(\mathbb{A}, V, +)$ un piano affine e sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ un'affinità, con applicazione lineare associata $\phi : V \to V$.

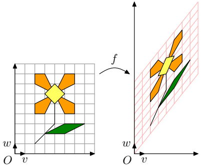
Supponiamo che vi sia un punto unito per $f$ e prendiamolo come origine, $O$, di un riferimento. Se $\phi$ è diagonalizzabile, con due autovalori distinti, $\alpha \neq \beta$, indichiamo con $v$ e $w$ due autovettori ad essi relativi. Nel riferimento $\mathscr{R} = \{O; v, w\}$, l'affinità $f$ ha matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$. Vi è dunque il punto unito $O$ e le due rette unite $r = O + \langle v \rangle$ e $s = O + \langle w \rangle$. Se uno degli autovalori è uguale a 1, allora la retta parallela al relativo autovettore è una retta di punti uniti; altrimenti $O$ è l'unico punto unito. Qui a fianco una rappresentazione grafica della trasformazione.



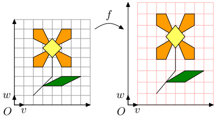

Nelle ipotesi generali dell'esempio precedente, supponiamo stavolta che $\phi$ abbia un'unico autovalore , $\alpha \neq 1$, con molteplicità algebrica e geometria 2 e indichiamo con $v$ e $w$ di autovettori per $\phi$. Dunque $f$ è un'omotetia (di centro $O$ e fattore $\alpha$) e, nel riferimento $\mathscr{R} = \{O; v, w\}$, $f$ ha matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$. Vi è dunque l'unico punto unito $O$, così come sono unite tutte le rette del fascio di centro $O$, $r_{(a,b)} = O + \langle av + bw \rangle$, al variare dei parametri omogenei $(a, b)$. . Qui a fianco una rappresentazione grafica della trasformazione.



Supponiamo sempre che vi sia un punto unito, $O$, per $f$ e che $\phi$ abbia un unico autovalore $\alpha$, ma non sia diagonalizzabile e indichiamo con $v$ e $w$ una base di $V$ rispetto a cui $\phi$ abbia una matrice trangolare inferiore ovvero che nel riferimento $\mathscr{R} = \{O; v, w\}$, l'affinità $f$ abbia matrice
$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$. Vi è dunque il punto unito $O$ e la retta unita $r = O + \langle w \rangle$ che è una retta di punti uniti quando $\alpha = 1$. Qui a fianco una rappresentazione grafica della trasformazione.




Supponiamo ora che non vi siano punti uniti per $f$ e che $\phi$ sia diagonalizzabile con due autovalori distinti, $\alpha \neq 1$. Vi è dunque un riferimento $\mathscr{R} = \{O; v, w\}$, per cui $f$ ha matrice
$\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array}\right)$. La retta $r = O + \langle v \rangle$ è unita e le rette parallele a $r$ sono trasformate in rette parallele a $r$. Se $\alpha = 1$, $f$ è una traslazione e soo unite le rette del fascio (improprio) di parallele a $r$. Qui a fianco una rappresentazione grafica della trasformazione.




Quando non siamo in uno dei casi precedenti, vi è un riferimento
$\mathscr{R} = \{O; v, w\}$ per cui $f$ ha matrice $\alpha_{\mathscr{R},\mathscr{R}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$
(la matrice di $f$ è un blocco di Jordan). In questo caso non vi sono né punti, né rette unite. Qui a fianco una rappresentazione grafica della trasformazione.