

Prodotto tensoriale e algebra multilineare

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K . All'interno del corso abbiamo definito il prodotto tensoriale $w \otimes v^*$ di un vettore $w \in W$ e di una forma lineare $v^* \in V^*$ come l'applicazione lineare $w \otimes v^* : V \rightarrow W$ che manda ogni vettore $x \in V$ sul vettore $w(v^* \circ x)$ di W . Sono di immediata verifica le seguenti proprietà

$$w_1 \otimes v^* + w_2 \otimes v^* = (w_1 + w_2) \otimes v^*, \quad w \otimes v_1^* + w \otimes v_2^* = w \otimes (v_1^* + v_2^*), \quad (cw) \otimes v^* = c(w \otimes v^*) = w \otimes (cv^*),$$

qualunque siano $w, w_1, w_2 \in W$, $v^*, v_1^*, v_2^* \in V^*$ e $c \in K$. Abbiamo definito poi $W \otimes_K V^*$ come il sottospazio vettoriale di $\text{Hom}_K(V, W)$ generato dagli omomorfismi $w \otimes v^*$ al variare di $w \in W$ e di $v^* \in V^*$, e osservato che, in realtà,

$$\boxed{W \otimes_K V^* \cong \text{Hom}_K(V, W)}$$

come si vede facilmente, fissando una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e una base $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W , e osservando che $\{w_i \otimes v_j^* \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ è una base di $\text{Hom}_K(V, W)$, corrispondente alla base canonica di $M_{m \times n}(K)$ tramite l'isomorfismo $\alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M_{m \times n}(K)$. Infatti, $\alpha_{\mathcal{V}, \mathcal{W}}(w_i \otimes v_j^*) = \varepsilon(i, j)$, perché $w_i \otimes v_j^*$ è proprio la funzione che manda il vettore v_j su w_i e manda a zero tutti gli altri vettori della base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$. In particolare, ciò implica

$$\boxed{\dim_K(W \otimes_K V^*) = (\dim_K W)(\dim_K V) = (\dim_K W)(\dim_K V^*)};$$

ovvero, la dimensione del prodotto tensoriale di due spazi vettoriali è il prodotto delle dimensioni dei fattori. Possiamo trasferire al prodotto tensoriale la nozione di *rango* ovvero, il rango di un elemento $\tau \in W \otimes_K V^*$ è il minimo intero r tale che $\tau = \sum_{i=1}^r w_i \otimes \zeta_i$, per opportuni $w_i \in W$ e $\zeta_i \in V^*$. Il lettore può (e dovrebbe) verificare che coincide con l'usuale nozione di rango di un omomorfismo.

Ricordando la dualità degli spazi vettoriali di dimensione finita e il fatto che il duale del duale, V^{**} , è canonicamente isomorfo allo spazio vettoriale V , si possono definire in modo analogo gli spazi vettoriali $W \otimes_K V \cong \text{Hom}_K(V^*, W)$ e $V \otimes_K W \cong \text{Hom}_K(W^*, V)$. L'isomorfismo definito da $w \otimes v \mapsto v \otimes w$, per ogni coppia di vettori $v \in V$ e $w \in W$, corrisponde alla trasposizione di applicazioni lineari (o di matrici). Infatti, per ogni $w^* \in W^*$ e ogni $v^* \in V^*$, si ha

$$w^* \circ (w \otimes v)(v^*) = (w^* \circ w)(v \circ v^*) = (v \otimes w)(w^*) \circ v^*;$$

e quindi si hanno gli isomorfismi

$$\boxed{V \otimes_K W \cong \text{Hom}_K(W^*, V) \cong \text{Hom}_K(V^*, W) \cong W \otimes_K V}$$

ove l'isomorfismo centrale è quello che associa ogni applicazione lineare alla sua trasposta.

Naturalmente, $V^* \otimes_K W^* \cong (V \otimes_K W)^* = \text{Hom}_K(V \otimes_K W, K)$, ove l'isomorfismo discende dall'esistenza dell'applicazione bilineare, non degenera, $(v^* \otimes w^*, v \otimes w) \mapsto (v^* \circ v)(w^* \circ w)$ [cfr. *Proposizione 2.6.16* del libro].

Possiamo estendere il discorso ad applicazioni bilineari tra spazi vettoriali. Ricordiamo che (cf. Definizione 7.1.1 del libro) dati tre spazi vettoriali U, V, W sul campo K , un'applicazione bilineare $g : U \times V \rightarrow W$ è un'applicazione insiemistica che soddisfa le seguenti proprietà

$$g(a_1 u_1 + a_2 u_2, v) = a_1 g(u_1, v) + a_2 g(u_2, v), \quad g(u, b_1 v_1 + b_2 v_2) = b_1 g(u, v_1) + b_2 g(u, v_2),$$

qualunque siano $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$. Ad esempio, dati due spazi vettoriali di dimensione finita su K , V e W , l'applicazione $\tau : V \times W \rightarrow V \otimes_K W$ definita da $\tau(v, w) = v \otimes w$, è un'applicazione bilineare, che è detta l'*applicazione bilineare canonica* del prodotto tensoriale. Indicheremo con $2 - \text{Lin}(U \times V, W)$ l'insieme (spazio vettoriale, in realtà) di tutte le applicazioni bilineari di $U \times V$ su W .

Se $g : U \times V \rightarrow W$ è un'applicazione bilineare, per ogni fissato vettore $u \in U$, l'applicazione $v \mapsto g(u, v)$ è in $\text{Hom}_K(V, W)$ e in questo modo g determina un omomorfismo $\Phi_g : U \rightarrow \text{Hom}_K(V, W)$; analogamente, per ogni fissato vettore $v \in V$, l'applicazione $u \mapsto g(u, v)$ è in $\text{Hom}_K(U, W)$ e in questo modo g determina un omomorfismo $\Psi_g : V \rightarrow \text{Hom}_K(U, W)$. È chiaro che ciascuno degli omomorfismi Φ_g e Ψ_g determina univocamente g . Le corrispondenze $\Psi_g \mapsto g \mapsto \Phi_g$ sono, in realtà, isomorfismi di spazi vettoriali, ovvero

$$\text{Hom}_K(V, \text{Hom}_K(U, W)) \cong 2 - \text{Lin}(U \times V, W) \cong \text{Hom}_K(U, \text{Hom}_K(V, W)).$$

Possiamo finalmente giustificare il titolo di queste pagine e collegare il prodotto tensoriale con le applicazioni bilineari. Cominciamo con una prima osservazione che possiamo chiamare *proprietà associativa* del prodotto tensoriale. Utilizzando gli isomorfismi stabiliti sopra, possiamo scrivere (il lettore dovrebbe riconoscere quali isomorfismi abbiamo utilizzato in ciascun passaggio)

$$\begin{aligned} U \otimes_K (V \otimes_K W) &\cong \text{Hom}_K((V \otimes_K W)^*, U) \cong \text{Hom}_K(U^*, V \otimes_K W) \cong \text{Hom}_K(U^*, \text{Hom}_K(W^*, V)) \cong \\ &\cong 2 - \text{Lin}(U^* \times W^*, V) \cong \text{Hom}_K(W^*, \text{Hom}_K(U^*, V)) \cong \text{Hom}_K(W^*, \text{Hom}_K(V^*, U)) \cong \\ &\cong \text{Hom}_K(W^*, U \otimes_K V) \cong (U \otimes_K V) \otimes_K W. \end{aligned}$$

Oltre a poter utilizzare questo isomorfismo per poter scrivere senza pericolo di ambiguità il prodotto tensoriale di un qualsiasi numero finito di spazi vettoriali, possiamo ottenere una prima ulteriore conseguenza di queste identificazioni. Dati U, V e W come sopra, si ha

$$\begin{aligned} 2 - \text{Lin}(U \times V, W) &\cong \text{Hom}_K(V, \text{Hom}_K(U, W)) \cong \text{Hom}_K(V, W \otimes_K U^*) \\ &\cong (W \otimes_K U^*) \otimes_K V^* \cong W \otimes_K (U^* \otimes_K V^*) \cong W \otimes_K (U \otimes_K V)^* \\ &\cong \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W). \end{aligned}$$

Mettendo insieme i due estremi della catena di isomorfismi scritta sopra, possiamo enunciare la seguente

Proposizione (Proprietà universale del prodotto tensoriale). *Siano U, V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K . Presa comunque un'applicazione bilineare $\lambda : U \times V \rightarrow W$, esiste un unico omomorfismo $\phi_\lambda : U \otimes_K V \rightarrow W$ tale da rendere commutativo il seguente diagramma*

$$\begin{array}{ccc} U \times V & \xrightarrow{\lambda} & W, \\ \tau \downarrow & \nearrow \phi_\lambda & \\ U \otimes_K V & & \end{array}$$

ove $\tau : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$ è l'applicazione bilineare canonica.

dim. La dimostrazione consiste nell'osservare che l'isomorfismo $2 - \text{Lin}(U \times V, W) \cong \text{Hom}_K(U \otimes_K V, W)$ definito sopra, associa all'applicazione bilineare $\lambda : U \times V \rightarrow W$ l'omomorfismo $\phi_\lambda : U \otimes_K V \rightarrow W$, definito ponendo $\phi_\lambda(u \otimes v) = \lambda(u, v)$ ed estendendo la definizione per linearità. **CVD** \square

Dunque il prodotto tensoriale permette di "linearizzare" le applicazioni bilineari, ovvero ogni applicazione bilineare da $U \times V$ verso un qualsiasi altro spazio vettoriale W , si ottiene a partire dall'applicazione bilineare canonica $\tau : U \times V \rightarrow U \otimes_K V$, componendola con un'applicazione lineare di $U \otimes_K V$ su W .

Passare dalle applicazioni bilineari alle applicazioni multilineari (cf. Definizione 4.1.1 del libro) è un facile argomento induttivo. Come le applicazioni bilineari su $U \times V$ sono omomorfismi da U verso le applicazioni lineari su V (le applicazioni 1-lineari), le applicazioni $r+1$ -lineari da $V_1 \times \dots \times V_{r+1}$ a W sono omomorfismi da uno dei fattori (ad esempio l'ultimo) verso lo spazio vettoriale delle applicazioni r -lineari sui rimanenti fattori, ovvero, per ogni $r \geq 2$, si ha

$$(r+1) - \text{Lin}(V_1 \times \dots \times V_{r+1}, W) \cong \text{Hom}_K(V_{r+1}, r - \text{Lin}(V_1 \times \dots \times V_r, W)).$$

Ricordando la proprietà associativa del prodotto tensoriale, si ha l'applicazione r -lineare canonica $\tau : V_1 \times \cdots \times V_r \rightarrow V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_r$ definita da $\tau(v_1, \dots, v_r) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, qualunque siano i vettori $v_i \in V_i$, per $i = 1, \dots, r$. La proprietà universale del prodotto tensoriale si generalizza e si ha

$$\boxed{r - \text{Lin}(V_1 \times \cdots \times V_r, W) \cong \text{Hom}_K(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_r, W)}$$

Per $r = 2$ questa è proprio la proprietà universale dimostrata sopra. Possiamo quindi supporre vera la tesi per un certo valore di r e dimostrare che da ciò discende la validità per $r + 1$. Infatti,

$$\begin{aligned} (r+1) - \text{Lin}(V_1 \times \cdots \times V_{r+1}, W) &\cong \text{Hom}_K(V_{r+1}, r - \text{Lin}(V_1 \times \cdots \times V_r, W)) \\ &\cong \text{Hom}_K(V_{r+1}, \text{Hom}_K(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_r, W)) \\ &\cong \text{Hom}_K(V_{r+1}, W \otimes_K (V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_r)^*) \\ &\cong W \otimes_K V_1^* \otimes_K \cdots \otimes_K V_r^* \otimes_K V_{r+1} \\ &\cong \text{Hom}_K(V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_{r+1}, W). \end{aligned}$$

Come nel caso delle applicazioni bilineari, ciò significa che ogni applicazione r -lineare da $V_1 \times \cdots \times V_r$ su W , si ottiene dalla applicazione r -lineare canonica componendo con un omomorfismo dello spazio vettoriale $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_r$ su W .

Applicazioni. Vogliamo segnalare alcune facili conseguenze delle definizioni precedenti. La prima è

$$W \otimes_K \text{Hom}_K(U, V) \cong W \otimes_K (V \otimes_K U^*) \cong (W \otimes_K V) \otimes_K U^* \cong \text{Hom}_K(U, W \otimes_K V);$$

e quindi, in un certo senso, possiamo “portare il prodotto tensoriale” all’interno del simbolo di omomorfismo.

La seconda osservazione è più concettuale e riguarda gli endomorfismi. Dato uno spazio vettoriale V , di dimensione finita su K , si ha

$$\text{End}_K V = \text{Hom}_K(V, V) \cong V \otimes_K V^*.$$

Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, la dualità canonica $\circ : V \times V^* \rightarrow K$, determina un'unica applicazione lineare $t : V \otimes_K V^* \rightarrow K$, definita da $t(v \otimes v^*) = v \circ v^*$, per ogni $v \in V$ e ogni $v^* \in V^*$. La composizione delle due applicazioni determina un omomorfismo di K -spazi vettoriali, $\text{Tr} : \text{Hom}_K(V, V) \rightarrow K$ che associa a un endomorfismo $\phi \in \text{Hom}_K(V, V)$ la sua *traccia*, $\text{Tr}\phi$. Infatti, se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base

di V , allora ϕ si identifica con $\sum_{j=1}^n \phi(v_j) \otimes v_j^* \in V \otimes_K V^*$, e si ha

$$\text{Tr}\phi = t \left(\sum_{j=1}^n \phi(v_j) \otimes v_j^* \right) = \sum_{j=1}^n \phi(v_j) \circ v_j^* = \sum_{j=1}^n a_{jj},$$

ove si ponga $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$, per $j = 1, \dots, n$; e quindi coincide con l'usuale definizione di traccia di un endomorfismo. Si può dare un'analoga descrizione del determinante di un endomorfismo come

$$\det\phi = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (\text{sgn}\sigma) \prod_{j=1}^n \phi(v_j) \circ v_{\sigma(j)}^*,$$

ma dovremmo introdurre l'algebra esterna per evidenziarne meglio le proprietà fondamentali. Come descrivere analogamente i minori di ϕ ?

Prodotto tensoriale di omomorfismi. Possiamo parlare di *prodotto tensoriale di omomorfismi* nel modo seguente: date due applicazioni lineari $\phi_1 : V_1 \rightarrow W_1$ e $\phi_2 : V_2 \rightarrow W_2$ tra spazi vettoriali sul campo K , sia $\tau' : W_1 \times W_2 \rightarrow W_1 \otimes_K W_2$ l'applicazione bilineare canonica. Allora si definisce un'applicazione K -bilineare

$g : V_1 \times V_2 \rightarrow W_1 \otimes_K W_2$, ponendo $g(v_1, v_2) = \phi_1(v_1) \otimes \phi_2(v_2)$ per ogni coppia $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale, esiste un'unica applicazione lineare

$$\phi_1 \otimes \phi_2 : V_1 \otimes_K V_2 \rightarrow W_1 \otimes_K W_2,$$

tale che $\phi_1 \otimes \phi_2(v_1 \otimes v_2) = g(v_1, v_2) = \phi_1(v_1) \otimes \phi_2(v_2)$ per ogni coppia $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$. Questa applicazione lineare è il *prodotto tensoriale* degli omomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 . Il lettore è invitato a fissare delle basi degli spazi in questione ed esplicitare le relazioni tra le matrici dei due omomorfismi ϕ_1 e ϕ_2 e la matrice di $\phi_1 \otimes \phi_2$ (prodotto di Kronecker tra matrici).

Cambiamento di base. Da ultimo diamo un'altra applicazione del prodotto tensoriale di spazi vettoriali: il *cambiamento di base*. Sia K un campo e L una sua estensione (finita), ovvero un L è un campo e $K \subset L$ o, meglio, è dato un omomorfismo iniettivo $j : K \rightarrow L$; in tal modo L diviene uno spazio vettoriale su K e supponiamo che sia di dimensione finita n (ad esempio, questo è il caso di \mathbb{R} e \mathbb{C}). Dato uno spazio vettoriale W su L di $\dim_L W = m$, questo è naturalmente uno spazio vettoriale anche su K , di dimensione il prodotto $mn = (\dim_L W)(\dim_K L)$. Infatti, se $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ è una base di W su L e $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ è una base di L su K , i prodotti $x_i w_j$ per $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ formano una base di W su K . Viceversa, dato uno spazio vettoriale V su K , di dimensione k , possiamo considerare il prodotto tensoriale $V_L = L \otimes_K V$ e osservare che si tratta di uno spazio vettoriale su L , tramite il prodotto $y(x \otimes v) = (yx) \otimes v$, per ogni $x, y \in L$ e $v \in V$. Se $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ è una base di V su K , gli elementi $1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_k$ sono una base di V_L su L ($1 = 1_L$ è l'unità del campo L). Riassumendo, possiamo concludere che abbiamo modo di associare a ogni spazio vettoriale su L uno spazio vettoriale su K e, tramite il prodotto tensoriale, ad ogni spazio vettoriale su K uno spazio vettoriale su L ; osserviamo che, per ogni spazio vettoriale V su K e W su L , si ha

$$\boxed{\text{Hom}_L(L \otimes_K V, W) \cong \text{Hom}_K(V, W_K)},$$

ove W_K indica lo spazio W come spazio vettoriale sul campo K . Infatti, fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$ di V su K , e la corrispondente base $\{1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_k\}$ di $L \otimes_K V$ su L , in entrambi i casi, per dare un omomorfismo è necessario e sufficiente scegliere in W le immagini dei k vettori di base.

Commenti. Abbiamo visto come sia facile definire il prodotto tensoriale tra spazi vettoriali, facendo uso della dualità e del teorema di struttura, e come la nozione di prodotto tensoriale sia stata utile per descrivere le applicazioni multilineari tramite omomorfismi tra opportuni spazi vettoriali. Volendo estendere queste costruzioni dagli spazi vettoriali ai moduli su un anello (commutativo), si incontrano immediatamente delle difficoltà.

Ricordiamo che, dato un anello (commutativo, con unità) A , un *modulo* su A è un gruppo abeliano M dotato di un'operazione di prodotto $\cdot : A \times M \rightarrow M$, con le seguenti proprietà

$$a(m + m') = am + am' \text{ e } (a + a')m = am + a'm, \text{ per ogni } a, a' \in A \text{ e ogni } m, m' \in M;$$

$$a(a'm) = (aa')m, \text{ per ogni } a, a' \in A \text{ e ogni } m \in M;$$

$$1m = m \text{ per ogni } m \in M.$$

Come si può notare, sono le stesse proprietà che definiscono uno spazio vettoriale, salvo che ora A è solamente un anello e non più un campo. Ciò porta immediatamente a notevoli differenze: ad esempio, non è più vero che $am = 0$ con $a \in A$ e $m \in M$, implichi che uno dei due fattori deve essere nullo. Si pensi a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ come modulo su \mathbb{Z} e al fatto che, per $x \neq 0$ in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, si ha $3x = 0$. Quindi non si può più parlare di indipendenza lineare per gli elementi di un generico modulo. Un omomorfismo di A -moduli, $\phi : M \rightarrow N$, come nel caso degli spazi vettoriali, deve soddisfare alla condizione $\phi(am + a'm') = a\phi(m) + a'\phi(m')$, per ogni $a, a' \in A$ e ogni $m, m' \in M$. Si può quindi parlare anche in questo caso di nucleo e immagine di un omomorfismo.

Non vogliamo addentrarci nella teoria dei moduli (che dipende, ovviamente, dalle proprietà dell'anello A su cui sono definiti) ma vogliamo comunque rassicurare il lettore che è possibile generalizzare la definizione di prodotto tensoriale ai moduli su un anello in modo che valga un'analoga proprietà universale (anche nel caso di anelli non-commutativi). Non avendosi più, in generale, una nozione di dualità efficiente come per gli spazi vettoriali, non c'è una descrizione del prodotto tensoriale di due elementi come di un opportuno omomorfismo.

Il prodotto tensoriale permette di mettere in evidenza una particolare classe di moduli, i moduli *piatti*. Diamo solo la definizione, lasciando al lettore interessato la possibilità di rivolgersi verso i necessari approfondimenti (ad esempio il fascicolo di Bourbaki, ad essi dedicato). Ricordiamo che una sequenza di omomorfismi $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ è una *sequenza esatta (breve)* se per ciascuno dei moduli M' , M , M'' , l'immagine dell'omomorfismo entrante coincide con il nucleo dell'omomorfismo uscente; ovvero α è iniettivo, β è suriettivo, e $\text{im}\alpha = \ker\beta$. Un A -modulo P si dice *piatto* se, per ogni sequenza esatta breve $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ la sequenza

$$0 \rightarrow M' \otimes_A P \xrightarrow{\alpha \otimes \text{id}} M \otimes_A P \xrightarrow{\beta \otimes \text{id}} M'' \otimes_A P \rightarrow 0$$

è ancora esatta. È immediato osservare che tutti gli spazi vettoriali sono piatti (e quindi che la nozione non ha alcun interesse in quel contesto); in generale, il problema sorge per l'iniettività dell'omomorfismo $\alpha \otimes \text{id}$. Ad esempio, se si considera la sequenza esatta di omomorfismi di \mathbb{Z} -moduli,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{3\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

e si fa il prodotto tensoriale $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ di tutti i suoi termini, si ottiene la sequenza

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

che NON è esatta perché il morfismo nullo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ non è iniettivo.