Due chiacchere sulle trasvezioni

Questo argomento (le trasvezioni) può considerarsi un po' difficile e se ne consiglia la lettura a chi abbia ben chiare le nozioni di base. Il suo contenuto dovrebbe essere più evidente alla luce del successivo corso di Geometria 2, ma a questo punto del corso non manca nulla per poterlo introdurre (se non, forse, le motivazioni, che appariranno più chiare con lo studio della geometria proiettiva). Cominciamo, come di consueto, con una definizione.

Definizione. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C e sia H un iperpiano di V. Una *trasvezione* relativa ad H è un'applicazione lineare $\phi : V \to V$ tale che $\phi(x) = x$ per ogni vettore $x \in H$ e $\phi(v) - v \in H$ per ogni vettore $v \in V$. In particolare, dato un vettore $v_0 \in H$ ed una forma lineare $\xi : V \to C$, tale che $H = \langle \xi \rangle^\perp$, chiamiamo *trasvezione determinata da* ξ *e* v_0, l'applicazione lineare $\phi : V \to V$ definita da $\phi(t) = t + \xi(t)v_0$(†).

Osserviamo subito che l'identità è una trasvezione relativa a qualsiasi iperpiano (ed è determinata da qualsiasi forma lineare, ξ, e dal vettore $v_0 = 0$). Inoltre, ogni trasvezione, $\phi \neq \mathrm{id}$, è determinata da una forma lineare ξ e da un opportuno vettore $v_0 \neq 0$. Infatti, indicato con H l'iperpiano unito per ϕ, sia $\xi \in V^*$, tale che $H = \langle \xi \rangle^\perp$. Fissato un vettore u tale che $V = H \oplus \langle u \rangle$, ogni vettore $t \in V$ si scrive nella forma $t = x + au$, con $x \in H$ e quindi

$$\phi(t) = \phi(x + au) = x + a\phi(u) = t + a(\phi(u) - u) = t + \xi(t)v_0, \qquad \text{ove } v_0 = \frac{1}{\xi(u)}\Big(\phi(u) - u\Big),$$

essendo $\xi(t) = \xi(x + au) = a\xi(u)$, per ogni $t \in V$. Una trasvezione, ϕ, è un'applicazione lineare invertibile, essendo $\phi^{-1}(t) = t - \xi(t)v_0$, la trasvezione determinata da ξ e $-v_0$. L'iperpiano $H = \langle \xi \rangle^\perp$ è contenuto nel sottospazio dei vettori lasciati fissi da ϕ, ovvero nel sottospazio degli autovettori relativi all'autovalore 1. Se $v_0 \neq 0$, tale sottospazio è proprio uguale ad H e il polinomio minimo di ϕ è uguale a $(X - 1)^2$, avendosi $\xi(v_0) = 0$ (ovvero, $(\phi - \mathrm{id})^2$ è l'endomorfismo nullo di V e $\phi \neq \mathrm{id}$). Quindi (Teorema di Hamilton-Cayley) il polinomio caratteristico di una trasvezione è $(X - 1)^n$ ($n = \dim V$) da cui si deduce $\det \phi = 1$. Quest'ultimo fatto si poteva verificare direttamente, prendendo una base $v_1, \dots, v_n$ di V, tale che $H = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ ed osservando che, per qualsiasi applicazione n-lineare alternante e non-nulla, D, su V, si ha

$$D(\phi(v_1), \phi(v_2), \dots, \phi(v_n)) = D(v_1 + \xi(v_1)v_0, v_2, \dots, v_n) = D(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

perché $v_0 \in H = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$.

Esercizio 1. Sia fissato un iperpiano H di V. Si dimostri che le trasvezioni di V che lasciano fissi i vettori di H formano un sottogruppo commutativo di $\mathrm{GL}(V)$ (identificabile con H). □

Esercizio 2.
(a) Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$ e l'iperpiano $H = \langle e_2, e_3 \rangle$. Se ϕ è una trasvezione relativa ad H, allora $\phi(e_1) = e_1 + ae_2 + be_3$ (perché?). Scrivere la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$. Determinare una forma lineare ξ ed un vettore v_0 che determinano ϕ.
(b) Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^3$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$ e l'iperpiano H di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Si consideri l'applicazione lineare, $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che lascia invariati i vettori di H e manda e_1 su $4e_1 + 2e_3$. Si scriva la matrice $\alpha_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(\phi)$ e si dica se è una trasvezione. In caso positivo, si scrivano una forma lineare ξ ed un vettore v_0 che determinano ϕ.
(c) Sia $\phi : V \to V$ una trasvezione, determinata da una fomra lineare ξ ed un vettore v_0, e sia $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V. Si determinino le relazioni esistenti tra la matrice $\alpha_{\mathcal{V},\mathcal{V}}(\phi)$, le coordinate del vettore v_0 nella base $\mathcal{V}$ e le coordinate della forma lineare ξ nella base duale di V^*. □

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su C e sia fissato un iperpiano H. Sia fissato un vettore v_0 tale che $V = H \oplus \langle v_0 \rangle$ e, per ogni $c \in C^\times$, si consideri l'applicazione lineare (invertibile) $\sigma_c : V \to V$, definita da $\sigma_c(av_0 + x) = cav_0 + x$, al variare di $x \in H$ ed $a \in C$.
(a) Si verifichi che $\sigma_c\sigma_{c'} = \sigma_{cc'}$ e $\sigma_c^{-1} = \sigma_{c^{-1}}$ per ogni $c, c' \in C^\times$.
(b) Sia $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ un'applicazione lineare invertibile su V. Si mostri che esiste un'applicazione lineare invertibile, σ_c, tale che $\sigma_c \circ \phi \in \mathrm{SL}(V)$. □

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale su C e sia fissato un iperpiano H. Fissata una forma lineare $\xi \in V^*$ ed un vettore $w \in \langle \xi \rangle^\perp = H$, indichiamo con $\tau_{\xi,w}$ la trasvezione determinata da ξ e w. Si consideri l'applicazione lineare (invertibile) $\sigma_c : V \to V$, definita nell'esercizio precedente. Si verifichi che $\sigma_c^{-1} \circ \tau_{\xi,w} \circ \sigma_c$ è ancora una trasvezione. Determinarne la forma

---

(†) Dati $v_0 \in V$ e $\xi \in V^*$, con $\xi(v_0) = 0$, si sarebbe potuto scrivere $\phi = \mathrm{id}_V + v_0 \otimes \xi$. Non useremo questa notazione, ma non ci sentiamo di sconsigliarla a chi abbia qualche conoscenza del prodotto tensoriale.

lineare ed il vettore. Si osservi che, nonostante la definizione di σ_c dipenda dalla scelta di un vettore $v_0 \notin H$, la trasvezione coniugata non dipenda da tale scelta. $\square$

Esercizio 5. Sia fissato un iperpiano H di V ed un vettore $w \notin H$. Data una trasvezione $\sigma : H \to H$ si dimostri che esiste un'unica trasvezione $\phi : V \to V$ tale che $\phi(v) = \sigma(v)$ per ogni $v \in H$ e $\phi(w) = w$. $\square$

Per quanto visto, le trasvezioni appartengono tutte al sottogruppo $\mathrm{SL}(V)$ di $\mathrm{GL}(V)$ formato dalle applicazioni lineari di determinante 1 su V.[‡]. Nel seguito di questa breve nota vogliamo mostrare il seguente

Teorema. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo C. Le trasvezioni generano il gruppo $\mathrm{SL}(V)$; ovvero ogni elemento di $\mathrm{SL}(V)$ si ottiene come composizione di un numero finito di trasvezioni.*

La dimostrazione si farà per induzione su $n = \dim V$, osservando che, per $n = 1$, la tesi è certamente vera visto che, in tal caso, $\mathrm{SL}(V) = \{\mathrm{id}\}$ e l'identità è una trasvezione.

Nel caso generale ci serviremo dei seguenti Lemmi.

Lemma 1. *Sia $v_0 \in V$ un vettore non nullo e siano dati due iperpiani distinti, H_1 ed H_2, tali che $v_0 \notin H_1 \cup H_2$. Allora esiste una trasvezione, $\phi : V \to V$, tale che $\phi(v_0) = v_0$ e $\phi(H_1) = H_2$.*

dim. Fissiamo due forme lineari, $\xi_1, \xi_2 \in V^*$, tali che $\langle \xi_1 \rangle^\perp = H_1$ e $\langle \xi_2 \rangle^\perp = H_2$ e siano $a_1 = \xi_1(v_0) \neq 0 \neq \xi_2(v_0) = a_2$. La forma lineare $\xi = \frac{1}{a_1}\xi_1 - \frac{1}{a_2}\xi_2$ ha come nucleo l'iperpiano $H = (H_1 \cap H_2) + \langle v_0 \rangle$ e si indichi con ϕ la trasvezione determinata da ξ e v_0. Poiché $v_0 \notin H_1 \cup H_2$, si ha $v_0 = w_1 + w_2$ con $H_i = \langle w_i \rangle \oplus (H_1 \cap H_2)$ per $i = 1, 2$. Quindi, poiché ϕ induce l'identità su $H_1 \cap H_2$ e su $\langle v_0 \rangle$, è sufficiente verificare che $\phi(w_1) \in H_2$ per concludere. Infatti, si ha

$$\phi(w_1) = w_1 + \xi(w_1)v_0 = w_1 - \frac{1}{a_2}\xi_2(w_1)(w_1 + w_2) = w_1 - \frac{1}{a_2}\xi_2(v_0)(w_1 + w_2) = -w_2$$

e la dimostrazione è completa. *QED* $\square$

Lemma 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ e siano v e w due vettori distinti in $V \smallsetminus \{0\}$. Esiste un'applicazione lineare invertibile $\phi : V \to V$, composizione di non più di due trasvezioni, tale che $\phi(v) = w$.*

dim. Supponiamo dapprima $\langle v \rangle \neq \langle w \rangle$ e sia $v_0 = v - w$. Fissata un forma lineare, $\xi : V \to C$, tale che $\xi(v) = \xi(w) = 1$ (perché esiste?) e presa la trasvezione definita da $\phi(t) = t - \xi(t)v_0$, si ha $\phi(v) = v - \xi(v)(v - w) = w$.

Se ora $\langle v \rangle = \langle w \rangle$, si consideri un vettore $u \notin \langle v \rangle$ e siano ϕ_1 e ϕ_2 trasvezioni tali che $\phi_1(v) = u$ e $\phi_2(u) = w$. Allora $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ è l'applicazione lineare cercata. *QED* $\square$

Possiamo quindi concludere la dimostrazione del Teorema.

Sia $\dim V = n \geq 2$ e supponiamo vero il risultato su ogni spazio vettoriale di dimensione $n - 1$. Dato $\alpha \in \mathrm{SL}(V)$ e fissato un vettore $w \neq 0$, consideriamo $v = \alpha(w)$. Se $w \neq v$, per il Lemma 2, esistono trasvezioni, ψ_1 e ψ_2, tali che $\psi_2(\psi_1(v)) = w$ e quindi $\beta = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \alpha$ lascia unito il vettore w. Sia H_2 un iperpiano complementare a $\langle w \rangle$ e sia H_1 l'immagine di H_2 tramite β; si osservi che $w \notin H_1 \cup H_2$. Se $H_1 = H_2$, $\beta_{|H_2}$ è un elemento di $\mathrm{SL}H_2$ e si pone $\gamma = \beta$; altrimenti, se i due iperpiani sono distinti, allora, per il Lemma 1, esiste una trasvezione ψ_3, tale che $\psi_3(w) = w$ e $\psi_3(H_1) = H_2$. Quindi, posto $\gamma = \psi_3 \circ \beta$, si ha $\gamma(w) = w$ e $\gamma_{|H_2}$ è un elemento di $\mathrm{SL}H_2$.

Per l'ipotesi induttiva, esiste un numero finito di trasvezioni $\phi'_4, \dots, \phi'_k$ sul sottospazio H_2, tali che $\gamma_{|H_2} = \phi'_4 \circ \cdots \circ \phi'_k$. Ciascuna delle ϕ'_j si estende (in modo unico) ad una trasvezione $\phi_j : V \to V$ tale che $\phi_j(w) = w$ da cui si conclude che $\gamma = \phi_4 \circ \cdots \circ \phi_k$, essendo $V = \langle w \rangle \oplus H_2$. Infine, posto $\phi_i = \psi_i^{-1}$ per $i = 1, 2, 3$, si conclude che $\alpha = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_k$ come si doveva dimostrare.

[‡] Nel successivo corso di Geometria 2, il lettore imparerà che ad ogni elemento di $\mathrm{GL}(V)$ resta associata una proiettività dello spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$. In particolare, una trasvezione ϕ determina un'*omologia speciale* avente come asse l'iperpiano σH. Una tale proiettività determina una traslazione di direzione parallela al vettore v_0 nello spazio affine formato dai punti di $\mathbb{P}(V)$ non appartenenti ad H. Da ciò deriva il nome di trasvezione (*transvection* in inglese e in francese, dal latino *transvectio*) ovvero di trasformazione lineare tra vettori che induce una traslazione.