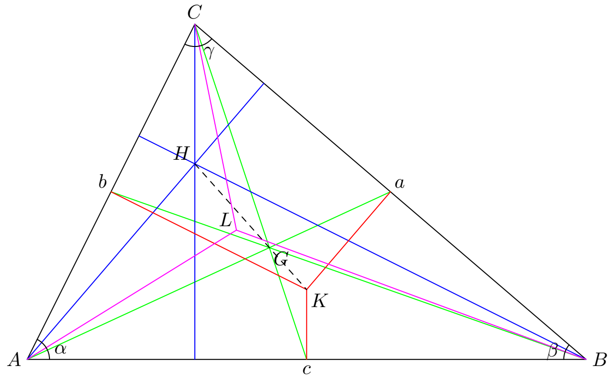
punti notevoli dei triangoli

Vogliamo presentare rapidamente alcuni fatti ben noti sui punti notevoli dei triangoli nello spazio euclideo e qualche applicazione delle coordinate baricentriche, senza alcuna pretesa né di completezza né di generalità. Si tratta quindi di una scelta arbitraria che vorrebbe provare ad illustrare come le tecniche descritte nel corso possano permettere di ridurre ad esercizi (più o meno complicati) celebri risultati sulla geometria dei triangoli.

Sia ABC un triangolo non degenere nel piano euclideo ed indichiamo con A, B, C i suoi vertici, con a, b, c le lunghezze dei lati opposti e con α, β, γ, le misure degli angoli interni (cf. la figura qui a fianco). Ricordiamo alcuni tra i punti notevoli del triangolo. Il punto, G, di intersezione tra le *mediane* del triangolo [in verde nel disegno] è detto il *baricentro* del triangolo. Il punto, K, di intersezione degli *assi* del triangolo (ovvero le perpendicolari ai lati, passanti per il punto medio, in rosso nel disegno) è detto il *circocentro* del triangolo, anche perché è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. Il punto, H, di intersezione delle altezze del triangolo [in blu nel disegno] è detto l'*ortocentro* del triangolo. Infine, il punto, L, di intersezione delle *bisettrici* del triangolo [in viola nel disegno] è detto l'*incentro* del triangolo, anche perché è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo ABC. Se due tra questi punti vengono a coincidere, allora il triangolo è equilatero e tutti e quattro i punti coincidono (esercizio).



Come prima cosa vogliamo verificare il fatto ben noto (e visibile dal disegno a lato) che è stato dimostrato da Eulero (cf. L. Eulero *Solutio facilis problematum quondam geometricorum difficillimorum*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanae 11 (1767), pp.103–123)[(*)]

Proposizione. *Notazioni come sopra. Il baricentro, l'ortocentro e il circocentro di un triangolo sono allineati. La retta che li contiene è detta la retta di Eulero del triangolo.*

dim. Possiamo fare un calcolo esplicito, utilizzando un opportuno sistema di riferimento ortonormale. Prendiamo come origine il vertice A e supponiamo che B stia sull'asse delle ascisse ed abbia quindi coordinate $B = (c, 0)$. Il vertice C avrà quindi coordinate $C = (b\cos\alpha, b\sin\alpha)$. Possiamo calcolare esplicitamente le coordinate dei punti notevoli, che sono

$$G = \left(\frac{c + b\cos\alpha}{3}, \frac{b\sin\alpha}{3}\right), \qquad H = \left(b\cos\alpha, \frac{-b\cos^2\alpha + c\cos\alpha}{\sin\alpha}\right), \qquad K = \left(\frac{c}{2}, \frac{b - c\cos\alpha}{2\sin\alpha}\right).$$

I tre punti sono allineati perché $\sin\alpha \neq 0$ e

$$\sin\alpha \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b\cos\alpha & c & c + b\cos\alpha \\ \frac{-b\cos^2\alpha + c\cos\alpha}{\sin\alpha} & \frac{b - c\cos\alpha}{\sin\alpha} & b\sin\alpha \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b\cos\alpha & c & c + b\cos\alpha \\ -b\cos^2\alpha + c\cos\alpha & b - c\cos\alpha & b\sin^2\alpha \end{pmatrix} = 0$$

in quanto l'ultima colonna è la somma delle prime due. **CVD** □

I tre vertici A, B, C, non sono allineati e perciò formano un riferimento affine nel piano che contiene il triangolo; possiamo utilizzare coordinate baricentriche in tale riferimento. Ad esempio il baricentro del triangolo A, B, C è il punto di coordinate baricentriche

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C.$$

Ricordiamo ora una proprietà "geometrica" delle coordinate baricentriche di un punto.

(*) Si tratta dell'opera 325 nell'archivio completo delle opere di Eulero, disponibile online al sito `www.math.dartmouth.edu/~euler/` del Dartmouth College (Hanover, New Hampshire). Nell'articolo, Eulero studia inoltre il triangolo formato dai quattro punti H, K, G, L ed il modo di "ricostruire" il triangolo di partenza a partire da quest'ultimo.

Lemma. *Siano A, B, C tre punti non allineati e $P = a_0A + b_0B + c_0C$ un punto del piano euclideo, ove $a_0 + b_0 + c_0 = 1$. Allora*

$$a_0 = \frac{\mathrm{Area}(PBC)}{\mathrm{Area}(ABC)}, \qquad b_0 = \frac{\mathrm{Area}(APC)}{\mathrm{Area}(ABC)}, \qquad c_0 = \frac{\mathrm{Area}(ABP)}{\mathrm{Area}(ABC)}.$$

dim. Si noti che, trattandosi di un rapporto di aree, la relazione è vera già nello spazio affine, quando si calcolino tutte le aree rispetto ad una stessa base dei vettori del piano.

Si ha

$$\begin{aligned} A - P = (A - C) - (P - C) &= (1 - a_0)(A - C) - b_0(B - C),\\ B - P = (B - C) - (P - C) &= -a_0(A - C) + (1 - b_0)(B - C). \end{aligned}$$

Quindi, indicata con D un'applicazione bilineare, alternante, non nulla sui vettori del piano, si ha

$$\frac{\mathrm{Area}(ABP)}{\mathrm{Area}(ABC)} = \frac{D(A - P, B - P)}{D(A - C, B - C)} = \det\begin{pmatrix} 1 - a_0 & -b_0 \\ -a_0 & 1 - b_0 \end{pmatrix} = 1 - a_0 - b_0 = c_0;$$

ed analogamente si calcolano gli altri coefficienti. **CVD** □

Utilizzando come riferimento i vertici del triangolo, è facile ricordare le coordinate baricentriche dei punti notevoli.

Osservazione. *Siano A, B, C tre punti non allineati ed indichiamo con a, b, c ed α, β, γ i lati e gli angoli interni del triangolo di vertici ABC, come illustrato nel disegno precedente. Siano $p = a + b + c$ il perimetro del triangolo, $s = \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$ e $t = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\gamma$; allora si ha*

$$\begin{aligned} &\text{(ortocentro)} \qquad H = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{t}A + \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{t}B + \frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{t}C;\\ &\text{(circocentro)} \qquad K = \frac{\sin 2\alpha}{s}A + \frac{\sin 2\beta}{s}B + \frac{\sin 2\gamma}{s}C;\\ &\text{(incentro)} \qquad L = \frac{a}{p}A + \frac{b}{p}B + \frac{c}{p}C. \end{aligned}$$

dim. Cominciamo dal fondo. Per calcolare le coordinate baricentriche di L, possiamo usare il Lemma precedente e osservare che, trattandosi del centro della circonferenza inscritta nel triangolo, ovvero del punto equidistante dai tre lati, l'area del triangolo ABL è uguale al prodotto di metà del raggio di questa circonferenza per il lato AB.

Analogamente, per calcolare le coordinate baricentriche di K, possiamo usare il Lemma precedente e osservare che, trattandosi del centro della circonferenza circoscritta al triangolo, l'area del triangolo ABK è uguale al prodotto di metà del quadrato del raggio di questa circonferenza per il seno dell'angolo al centro, che è il doppio del corrispondente angolo alla circonferenza, ovvero di α.

Infine per l'intersezione delle altezze, possiamo usare un calcolo diretto. Se H è il punto dell'enunciato, basta verificare che il vettore $H - A$ è ortogonale a $B - C$, ed analogamente per gli altri due vertici. Si ha

$$\begin{aligned} t(H - A) \cdot (B - C) &= (\mathrm{tg}\,\beta(B - A) + \mathrm{tg}\,\gamma(C - A)) \cdot (B - C) =\\ &= \sin\beta\|B - A\|\|B - C\| - \sin\gamma\|C - A\|\|C - B\| = 0; \end{aligned}$$

che è quanto dovevamo verificare. **CVD** □

Utilizzando le coordinate baricentriche calcolate sopra , il fatto che baricentro, circocentro e ortocentro di un triangolo siano allineati corrisponde all'annullarsi del determinante della matrice che ha come righe (o colonne) le coordinate baricentriche dei tre punti in questione. Questo fatto si poteva verificare direttamente, ovvero

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin 2\alpha & \sin 2\beta & \sin 2\gamma \\ \mathrm{tg}\,\alpha & \mathrm{tg}\,\beta & \mathrm{tg}\,\gamma \end{pmatrix} = \mathrm{tg}\,\alpha(\sin 2\gamma - \sin 2\beta) + \mathrm{tg}\,\beta(\sin 2\alpha - \sin 2\gamma) + \mathrm{tg}\,\gamma(\sin 2\beta - \sin 2\alpha);$$

e ricordando che $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ e la formula di prostaferesi $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}$, l'espressione a destra diventa uguale a

$$-2\sin\alpha\sin(\gamma-\beta) - 2\sin\beta\sin(\alpha-\gamma) - 2\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)$$

che è uguale a 0, perché, sempre per le formule di prostaferesi, si ha $-2\sin x\,\sin y = \cos(x+y)-\cos(x-y)$, per ogni coppia di numeri reali, x, y.

Dalle considerazioni precedenti si ricavano facilmente le equazioni della retta di Eulero nelle coordinate baricentriche riferite ai vertici del triangolo (scriverla!). Inoltre, si può osservare dalla costruzione che il circocentro, K, del triangolo ABC è l'ortocentro del triangolo che ha come vertici i punti medi dei lati del triangolo ABC e che i due triangoli hanno lo stesso baricentro, essendo

$$\frac{1}{3}\frac{A+B}{2}+\frac{1}{3}\frac{B+C}{2}+\frac{1}{3}\frac{C+A}{2}=\frac{A+B+C}{3}=G.$$

Quindi, per similitudine, la distanza $\|H-G\|$ deve essere il doppio della distanza $\|K-G\|$.

Da ultimo vogliamo verificare come l'appartenenza dell'incentro, L, alla retta di Eulero implichi necessariamente il fatto che il triangolo ABC sia isoscele. Questo fatto è evidente (...o quasi) nel caso di un triangolo rettangolo. Infatti, se il triangolo ABC è rettangolo in C, allora $C=H$, ovvero il vertice C è il punto di intersezione tra le altezze, e $K=\frac{A+B}{2}$, ovvero il centro della circonferenza circoscritta è il punto medio dell'ipotenusa. Quindi la retta di Eulero è la mediana uscente da C e deve coincidere con la bisettrice quando contenga il punto L. Ne consegue che il triangolo è isoscele (farsi la verifica!).

Resta quindi da verificare che il fatto che G, L ed H siano allineati implica che il triangolo sia necessariamente isoscele. Dobbiamo quindi considerare l'annullarsi del determinante

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{tg}\beta & \operatorname{tg}\gamma\end{pmatrix}$$

ed è perciò che abbiamo visto separatamente il caso di un triangolo rettangolo. Per prima cosa vogliamo esprimere le tangenti degli angoli come funzioni delle lunghezze dei lati. In base al Teorema dei seni, per ogni triangolo si ha $\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{2D}{abc}$ ove D indica l'area del triangolo ABC. In base al Teorema di Carnot, si ha $\cos\alpha=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$ ed analoghe espressioni coinvolgenti gli altri lati e quindi possiamo scrivere

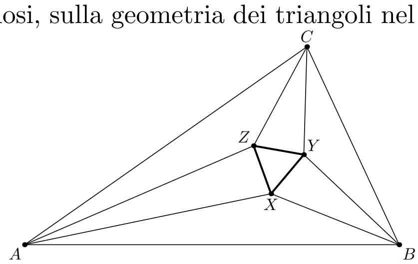
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{4D}{-a^2+b^2+c^2},\qquad \operatorname{tg}\beta=\frac{4D}{a^2-b^2+c^2},\qquad \operatorname{tg}\gamma=\frac{4D}{a^2+b^2-c^2}.$$

Possiamo quindi sostituire le espressioni nel determinante e lanciarci in un calcolo esplicito, ovvero

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ \frac{1}{-a^2+b^2+c^2} & \frac{1}{a^2-b^2+c^2} & \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\end{pmatrix}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2}{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}.$$

Il calcolo ci mostra come l'annullarsi del determinante implichi necessariamente l'uguaglianza delle lunghezze di due lati del triangolo.

È facile reperire in rete una gran messe di risultati, più o meno famosi, sulla geometria dei triangoli nel piano euclideo e vi sono svariati punti "notevoli" di un triangolo che hanno relazioni con la retta retta di Eulero o con i punti fondamentali descritti qui. Nella maggior parte dei casi, quei risultati si riducono a (più o meno complicate) applicazioni delle proprietà dello spazio vettoriale reale e del prodotto scalare, anche sotto forma di identità tra funzioni trigonometriche. Al lettore interessato proponiamo di cimentarsi con il noto Teorema di Morley (cf. la figura a fianco).



Proposizione. [Morley, 1899] *Sia dato un triangolo ABC e, per ogni angolo, si considerino i segmenti che lo dividono in tre parti uguali (trisettrici). Detti X, Y, Z i punti di intersezione tra le coppie di trisettrici adiacenti ad ogni lato, il triangolo XYZ è un triangolo equilatero.*