Forme multilineari alternanti e volume

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo C. In un foglio precedente avevamo descritto con qualche dettaglio lo spazio $A^k(V)$ delle funzioni K-lineari ed alternanti su uno spazio vettoriale V ed il prodotto esterno tra tali forme che ci aveva permesso di concludere che, data una base $d_1, \dots, d_n$ dello spazio $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$, gli elementi del tipo $d_J = d_{J(1)} \wedge \dots \wedge d_{J(k)}$, al variare di $J \in \mathscr{I}_k^n$ formano una base dello spazio $A^k(V)$.

Lo spazio $A^1(V) = \mathrm{Hom}_C(V, C)$ si indica anche con il simbolo V^* ed è noto come lo spazio vettoriale duale di V. Nelle considerazioni precedenti abbiamo quindi visto che, tramite il prodotto esterno, possiamo costruire a partire da V^* gli spazi $A^k(V)$, che preferiamo chiamare ora con il nome con cui sono più noti in letteratura, ovvero $\Lambda^k(V^*)$. Infine, la somma diretta

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{j=0}^{n} \Lambda^k(V^*)$$

dotata del prodotto esterno è un'algebra (non-commutativa) su $C = \Lambda^0(V^*)$, detta l'*algebra esterna* su V^*.

Fin qui non c'è niente di nuovo, se non aver ridetto delle cose cambiando un po' i nomi agli oggetti. Se però osserviamo che $V = V^{**}$ (il duale del duale è canonicamente isomorfo allo spazio di partenza), allora possiamo fare la stessa costruzione sullo spazio V e considerare gli spazi $\Lambda^k(V)$ (le funzioni k lineari alternanti su V^* per $k > 0$ e C per $k = 0$) e l'algebra esterna $\Lambda(V) = \bigoplus_{j=0}^n \Lambda^k(V)$, dotata sempre del prodotto esterno. Osserviamo infine che, dato un omomorfismo di spazi vettoriali $\phi : V \to W$, per ogni $k \geq 0$, resta associato un omomorfismo $\Lambda^k(\phi) : \Lambda^k(V) \to \Lambda^k(W)$, definito da $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \phi(v_1) \wedge \dots \wedge \phi(v_k)$, e quindi un omomorfismo di anelli $\Lambda(\phi) : \Lambda(V) \to \Lambda(W)$. Tramite queste identificazioni l'omomorfismo $A^k(\phi) : A^k(W) \to A^k(V)$ definito nelle note precedenti, viene a coincidere con $\Lambda^k(\phi^*)$, ove $\phi^* : W^* \to V^*$ è la trasposta di ϕ. Il lettore più attento può verificare che, dato un endomorfismo $\phi : V \to V$, l'endomorfismo indotto $\Lambda^n(\phi) : \Lambda^n(V) \to \Lambda^n(V)$, ove $n = \dim_C V$, è la moltiplicazione per $\det\phi$ e confrontandolo con l'omomorfismo $A^n(\phi)$ può ottenere un'altra dimostrazione del fatto che il determinante di un endomorfismo coincide con il determinante della sua trasposta.

Data una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V, possiamo associarle la base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ di V^* e quindi la base $v_J^* = v_{J(1)}^* \wedge \dots \wedge v_{J(k)}^*$, al variare di $J \in \mathscr{I}_k^n$ dello spazio $\Lambda^k(V^*)$ (vedi la Proposizione che conclude il foglio sulle applicazioni multilineari alternanti). Analogamente i prodotti $v_I = v_{I(1)} \wedge \dots \wedge v_{I(k)}$, al variare di $I \in \mathscr{I}_k^n$, formano una base dello spazio $\Lambda^k(V)$ ed i due spazi, $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^k(V^*)$ hanno queste due basi come basi duali. Infatti, possiamo definire un'applicazione bilineare non degenere $\circ : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V^*) \to C$ a partire dalla posizione

$$(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \circ (y_1^* \wedge \dots \wedge y_k^*) = \det(x_i \circ y_j^*)_{1 \leq i,j \leq k}$$

ove $x_1, \dots, x_k$ sono vettori di V ed $y_1^*, \dots, y_k^*$ sono vettori di V^*. È facile verificare che gli elementi v_I e v_J^* definiti sopra soddisfano alla condizione $v_I \circ v_J^* = \delta_{I,J}$, al variare di I e J in $\mathscr{I}_k^n$.

Supponiamo ora che il corpo di base sia il campo dei numeri reali, $\mathbb{R}$, e che sullo spazio vettoriale V sia fissata una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ed il prodotto scalare per cui la base data è una base ortonormale. Dunque, se $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ e $w = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$ sono due elementi di V, si ha $v \cdot w = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$. In questo modo vi è un isomorfismo di V su V^* che identifica la base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ con la base duale $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, \dots, v_n^*\}$. Lo stesso accade per gli spazi $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda^k(V^*)$ e si ha quindi un'applicazione bilineare $\cdot : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \to \mathbb{R}$ definita dalla posizione

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \det(v_i \cdot w_j)_{1 \leq i,j \leq k}$$

ove $v_1, \dots, v_k$ e $w_1, \dots, w_k$ sono vettori di V. In particolare la base $\{\, v_I \mid I \in \mathscr{I}_k^n \,\}$ è una base ortonormale di $\Lambda^k(V)$.

Dati dei vettori $v_1, \dots, v_k$ di V, l'elemento $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ è nullo se, e solo se, i vettori di partenza sono linearmente dipendenti. In ogni caso, il numero $(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)$ è il *quadrato del volume* (k-dimensionale) del parallelepipedo $PL(v_1, \dots, v_k) = \{\, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_i \in [0,1] \,\}$ determinato da tali vettori.

Vediamo quindi come si calcola esplicitamente il volume. Dati dei vettori, $v_1, \dots, v_k$ di V, si scrive la matrice $U = (u_{ij}) \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$ che ha come colonne le coordinate dei vettori dati, rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V; ovvero $v_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i$. Avendo preso una base ortonormale, la matrice dei prodotti scalari $(v_i \cdot v_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ è la matrice ${}^tUU$ (matrice $k \times k$) quindi

$$\mathrm{vol}^k\left(PL(v_1, \dots, v_k)\right) = \sqrt{\det {}^tUU}.$$

Osserviamo che vi era un altro modo per calcolarlo: i minori di ordine k della matrice U sono le coordinate del vettore $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ rispetto alla base ortonormale $\{ e_I \mid I \in \mathscr{I}_k^n \}$ di $\Lambda^k(V)$. Precisamente,

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{I \in \mathscr{I}_k^n} a_I e_I \qquad \text{ove} \quad a_I = \det \begin{pmatrix} u_{I(1),1} & \cdots & u_{I(1),k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{I(k),1} & \cdots & u_{I(k),k} \end{pmatrix}.$$

Essendo $\{ e_I \mid I \in \mathscr{I}_k^n \}$ una base ortonormale di $\Lambda^k(V)$, si ha

$$\mathrm{vol}^k \left(PL(v_1, \dots, v_k)\right) = \sqrt{(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_k)} = \sqrt{\sum_{I \in \mathscr{I}_k^n} a_I^2}.$$

Vediamo su un esempio il significato di questa identità tra i due modi di calcolare il volume. Nello spazio tridimensionale, dati due vettori $v = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ e $w = {}^t(y_1, y_2, y_3)$, il quadrato del volume del parallelogramma di lati v e w si può scrivere come

$$\det \begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - (v \cdot w)^2.$$

D'altra parte, si ha $v \wedge w = (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_1 \wedge e_2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1) e_1 \wedge e_3 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_2 \wedge e_3$ e quindi

$$\|v \wedge w\|^2 = (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2.$$

L'uguaglianza delle due espressioni ci ridà l'identità di Lagrange e ci fa capire che le formule scritte sopra, valide per ogni dimensione, possono essere considerate generalizzazioni di quell'identità.

A questo punto qualcuno si sarà chiesto che relazioni ci siano tra il prodotto esterno $v \wedge w$ ed il prodotto vettoriale $v \times w$ visto che i due vettori ($\dim V = 3$) hanno le stesse componenti, ma vivono in spazi diversi: il primo sta in $\Lambda^2(V)$ e l'altro in V, che, solo nel caso in cui $\dim V = 3$, hanno la stessa dimensione(*). Il fatto è che, per $n = 3$, fissata una base ortonormale, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_3\}$, di V, c'è un isomorfismo tra V e $\Lambda^2(V)$ che manda $e_1 \mapsto e_2 \wedge e_3$, $e_2 \mapsto -e_1 \wedge e_3$, $e_3 \mapsto e_1 \wedge e_2$ e quindi permette di identificare i due prodotti. La scelta della base $\mathcal{E}$, permette di fissare $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ come base di $\Lambda^3(V)$ e di identificare questo spazio con il campo di base, $\mathbb{R}$. Dato un vettore $u \in V$ ed un elemento $v \wedge w \in \Lambda^2(V)$, possiamo considerare l'elemento $u \wedge v \wedge w \in \Lambda^3(V)$ e la sua espressione $u \wedge v \wedge w = c e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ nella base data. Osserviamo che, se U è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori u, v, w nella base $\mathcal{E}$, la costante c è uguale a $\det U = \frac{D(u,v,w)}{D(e_1,e_2,e_3)}$, ove D è una base di $A^3(V) = \Lambda^3(V^*)$. Dalle proprietà del prodotto esterno si deduce che l'applicazione $(u, v \wedge w) \mapsto c$ così definita è un'applicazione bilineare non degenere e quindi permette di identificare $\Lambda^2(V)$ con lo spazio duale V^* di V. Il prodotto scalare su V dà un isomorfismo di V con V^* e quindi abbiamo un isomorfismo tra $\Lambda^2(V)$ e V che ci permette di trasportare a questo spazio il prodotto esterno di due vettori. Mettendo insieme le varie identificazioni, possiamo dire che, dati due vettori, v, w di V il loro prodotto esterno corrisponde a quel vettore x per cui si ha $u \cdot x = \frac{D(u,v,w)}{D(e_1,e_2,e_3)}$. È chiaro quindi che il prodotto esterno viene a coincidere con il prodotto vettoriale di v e w.

Se la dimensione di V è uguale ad n, il lettore può provare a definire un'analoga identificazione tra V e $\Lambda^{n-1}(V)$ e definire un "prodotto vettore" con $n-1$ fattori.

Da ultimo osserviamo che il volume definito nelle righe precedenti è sempre un volume non orientato, perché, dovendo scegliere una radice quadrata di un numero reale positivo, la scelta naturale è quella di scegliere la radice positiva. C'è solo un caso in cui può aver senso una scelta alternativa: il volume n-dimensionale, dove $n = \dim_{\mathbb{R}} V$. Infatti dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ (indipendenti, ché altrimenti il volume è nullo) ed indicata con X la matrice che ha come colonne le coordinate di questi vettori rispetto ad una base ortonormale $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ di V, il quadrato del volume del parallelepipedo $PL(v_1, \dots, v_n)$ è $\det({}^tXX) = (\det X)^2$. Oltre alla scelta della radice quadrata positiva, c'è la possibilità di prendere come radice quadrata $\det X$ e, se questo determinante non è nullo, il segno sarà positivo se, e solo se, la base (ordinata) $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è concorde con la base (ordinata) $\mathcal{E}$. Se si fissa un orientamento nello spazio V e si scelgono solo basi ortonormali concordi con l'orientamento fissato, si può definire così il volume orientato del parallelepipedo $PL(v_1, \dots, v_n)$. La scelta di un orientamento in uno spazio vettoriale (di dimensione ≥ 2) non induce orientamenti sui sottospazi (ad esempio le basi e_1, e_2, e_3 ed $e_2, e_1, -e_3$ sono cncordi, ma inducono orientamenti opposti nel sottospazio $\langle e_1, e_2 \rangle$) e quindi non è possibile definire altro che il volume non orientato sui sottospazi propri di V.

(*) Per i pignoli, anche nel caso in cui $\dim V = 0$ questa dimensione coincide con quella di $\Lambda^2(V)$, ma mi sento di escludere senza bisogno di commenti questo caso banale.