Volume in uno spazio vettoriale reale

maurizio candilera

December 12, 2012

Introduzione

Introduciamo la nozione di Volume n-dimensionale per parallelepipedi e simplessi in uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Non avendo ancora introdotto un prodotto scalare (definito positivo) su tale spazio, ci limiteremo alle prime definizioni.
Le definizioni diventeranno più geometriche quando parleremo di spazio affine e di spazio euclideo.

Parallelepipedi e simplessi

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano dati k vettori (linearmente indipendenti), $w_1, \dots, w_k$ di V.

Definizione

Il *parallelepipedo* di lati $w_1, \dots, w_k$ è il sottoinsieme di V

$$PL(w_1, \dots, w_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \mid a_i \in [0,1], \ i = 1, \dots, k \right\}.$$

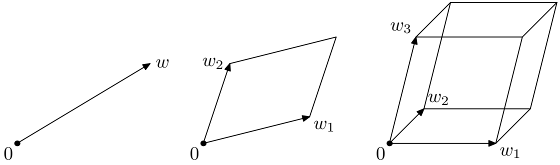
Parallelepipedi e simplessi

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano dati k vettori (linearmente indipendenti), $w_1, \dots, w_k$ di V.

Definizione

Il *parallelepipedo* di lati $w_1, \dots, w_k$ è il sottoinsieme di V

$$PL(w_1, \dots, w_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \mid a_i \in [0,1], \; i = 1, \dots, k \right\}.$$



Definizione

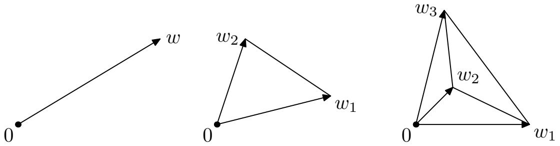
Il *simplesso* di lati $w_1, \dots, w_k$ è il sottoinsieme di V

$$\Delta(w_1, \dots, w_k) =$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \mid a_i \in [0,1],\ i = 1, \dots, k,\ a_1 + \cdots + a_k \leq 1 \right\}.$$

Definizione

Il *simplesso* di lati $w_1, \ldots, w_k$ è il sottoinsieme di V

$$\Delta(w_1, \ldots, w_k) = \\ = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \mid a_i \in [0,1],\ i = 1, \ldots, k,\ a_1 + \cdots + a_k \leq 1 \right\}.$$



DECOMPOSIZIONE

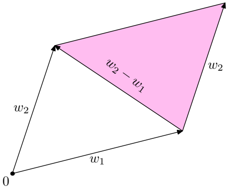
Il parallelepipedo $PL(w_1, \dots, w_k)$ si decompone nell'unione di $k!$ simplessi, aventi a due a due in comune al più una "faccia".

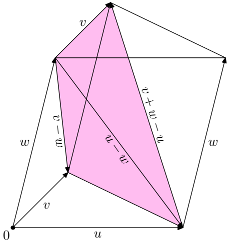
- Per $k = 1$, si ha $PL(w) = \Delta(w)$.
- Per $k = 2$, si ha $PL(w_1, w_2) = \Delta(w_1, w_2) \cup \Delta(w_2, w_2 - w_1)$.
- Per $k = 3$, si ha $PL(u, v, w) =$ $2(\Delta(u, v, w) \cup \Delta(w - u, w, v + w - u) \cup \Delta(v, u - w, v - w))$.

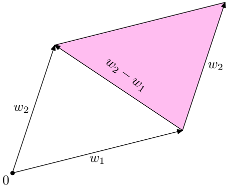
Decomposizione

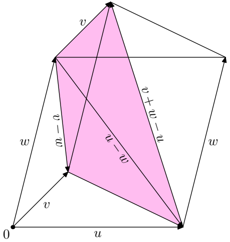
Il parallelepipedo $PL(w_1, \dots, w_k)$ si decompone nell'unione di $k!$ simplessi, aventi a due a due in comune al più una "faccia".

- Per $k = 1$, si ha $PL(w) = \Delta(w)$.
- Per $k = 2$, si ha $PL(w_1, w_2) = \Delta(w_1, w_2) \cup \Delta(w_2, w_2 - w_1)$.
- Per $k = 3$, si ha $PL(u, v, w) = 2(\Delta(u, v, w) \cup \Delta(w - u, w, v + w - u) \cup \Delta(v, u - w, v - w))$.







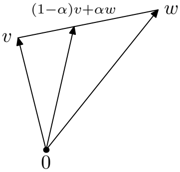


Si noti che abbiamo disegnato solo *metà* del parallelepipedo tridimensionale, ovvero solo il *prisma* che ha come base il simplesso di dimensione più piccola, e abbiamo aggiunto il fattore 2 nella decomposizione del prisma, considerando il contributo al paralleleipedo dato dalla parte "simmetrica" che è stata cancellata. Il lettore è invitato a generalizzare la decomposizione a dimensioni superiori.

Sottoinsiemi convessi

Definizione

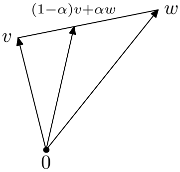
Sia V uno spazio vettoriale reale. Un sottoinsieme K di V si dice *convesso* se, presi comunque $v, w \in K$, i vettori $(1-\alpha)v + \alpha w$ appartengono a K, per ogni $\alpha \in [0,1]$.



Sottoinsiemi convessi

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale. Un sottoinsieme K di V si dice *convesso* se, presi comunque $v, w \in K$, i vettori $(1-\alpha)v + \alpha w$ appartengono a K, per ogni $\alpha \in [0, 1]$.

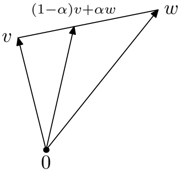


Diremo brevemente che un sottoinsieme è convesso se, non appena contiene una coppia di vettori, contiene il *segmento* che li congiunge.

Sottoinsiemi convessi

Definizione

Sia V uno spazio vettoriale reale. Un sottoinsieme K di V si dice *convesso* se, presi comunque $v, w \in K$, i vettori $(1-\alpha)v + \alpha w$ appartengono a K, per ogni $\alpha \in [0, 1]$.



Diremo brevemente che un sottoinsieme è convesso se, non appena contiene una coppia di vettori, contiene il *segmento* che li congiunge.
I sottospazi vettoriali sono sottoinsiemi convessi, ma anche parallelepipedi e simplessi lo sono.

Dati v, w in $PL(w_1, \dots, w_k)$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{k} b_i w_i$$

con $a_i, b_i \in [0, 1]$. Dato $\alpha \in [0, 1]$, $(1 - \alpha)v + \alpha w$ appartiene a $PL(w_1, \dots, w_k)$ se, e solo se, $(1 - \alpha)a_i + \alpha b_i \in [0, 1]$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Dati v, w in $PL(w_1, \dots, w_k)$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{k} b_i w_i$$

con $a_i, b_i \in [0, 1]$. Dato $\alpha \in [0, 1]$, $(1 - \alpha)v + \alpha w$ appartiene a $PL(w_1, \dots, w_k)$ se, e solo se, $(1 - \alpha)a_i + \alpha b_i \in [0, 1]$ per ogni $i = 1, \dots, k$.
Per fissare le idee, supponiamo $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$. Allora, si ha

$$0 \leq (1 - \alpha)a_i + \alpha b_i \leq (1 - \alpha)b_i + \alpha b_i = b_i \leq 1$$

(un ragionamento analogo vale se $b_i < a_i$).

Dati v, w in $PL(w_1, \dots, w_k)$, si ha

$$v = \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \quad \text{e} \quad w = \sum_{i=1}^{k} b_i w_i$$

con $a_i, b_i \in [0,1]$. Dato $\alpha \in [0,1]$, $(1-\alpha)v + \alpha w$ appartiene a $PL(w_1, \dots, w_k)$ se, e solo se, $(1-\alpha)a_i + \alpha b_i \in [0,1]$ per ogni $i = 1, \dots, k$.
Per fissare le idee, supponiamo $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$. Allora, si ha

$$0 \leq (1-\alpha)a_i + \alpha b_i \leq (1-\alpha)b_i + \alpha b_i = b_i \leq 1$$

(un ragionamento analogo vale se $b_i < a_i$).

Per il simplesso, $\Delta(w_1, \dots, w_k)$, oltre a ciò basta osservare che

$$\sum_{i=1}^{k}(1-\alpha)a_i + \alpha b_i = (1-\alpha)\sum_{i=1}^{k} a_i + \alpha \sum_{i=1}^{k} b_i \leq (1-\alpha) + \alpha = 1.$$

VOLUME n-DIMENSIONALE

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia fissata una base (ordinata) $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$. Dati i vettori $w_1, \dots, w_n$ di V,

DEFINIZIONE

Il *volume* (orientato) del parallelepipedo $PL(w_1, \dots, w_n)$ rispetto alla base $\mathcal{V}$, è

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(w_1, \dots, w_n)) := \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Si chiama *volume non-orientato* del parallelepipedo, rispetto alla base $\mathcal{V}$, il valore assoluto $|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(w_1, \dots, w_n))|$.

Definizione

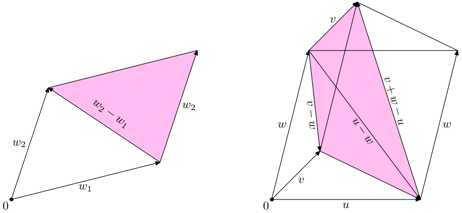
Il *volume* (orientato) del simplesso $\Delta(w_1, \dots, w_n)$ rispetto alla base $\mathcal{V}$, è

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(w_1, \dots, w_n)) := \frac{1}{n!} \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Si chiama *volume non-orientato* del simplesso, rispetto alla base $\mathcal{V}$, il valore assoluto $|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(w_1, \dots, w_n))|$.

Le due definizioni sono coerenti, ovvero i $n!$ simplessi che compaiono nella decomposizione del parallelepipedo hanno tutti lo stesso volume. Facciamo vedere questo fatto per dimensione ≤ 3, lasciando al lettore le necessarie generalizzazioni.

In dimensione 1 non c'è niente da dimostrare, perché parallelepipedo e simplesso coincidono.



In dimensione 2, considerando la decomposizione del parallelogramma, si ha

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(w_1, w_2))| &= |\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(w_1, w_2))| + |\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(w_2, w_2 - w_1))| \\
&= \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_1, w_2)}{D(v_1, v_2)}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{D(w_2, w_2 - w_1)}{D(v_1, v_2)}\right|
\end{aligned}
$$

che è vero per multilinearità e alternanza di D.

Analogo calcolo nel caso tridimensionale, ricordando che stiamo calcolando il volume del prisma, ovvero metà del volume del parallelepipedo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(u,v,w))\right| = \\
&\quad = \left|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(u,v,w))\right| + \left|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(v,u-w,v-w))\right| + \\
&\qquad\qquad + \left|\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; \Delta(w-u,w,v+w-u))\right| \\
&\quad = \frac{1}{6}\left|\frac{D(u,v,w)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right| + \frac{1}{6}\left|\frac{D(v,u-w,v-w)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right| + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{6}\left|\frac{D(w-u,w,v+w-u)}{D(v_1,v_2,v_3)}\right|
\end{aligned}$$

che è vero per multilinearità e alternanza di D.
Si noti che, con i lati scelti in quest'ordine, si poteva anche evitare di prendere il valore assoluto.

Dipendenza dalla base

Date due basi (ordinate) $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$, si ha

$$\boxed{\mathsf{Vol}(\mathcal{U}; PL(w_1, \dots, w_n)) = \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{id}) \mathsf{Vol}(\mathcal{V}; PL(w_1, \dots, w_n))}$$

ovvero

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} = \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Dipendenza dalla base

Date due basi (ordinate) $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$, si ha

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\mathcal{U}; PL(w_1, \dots, w_n)) = \det \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(\mathrm{id})\mathrm{Vol}(\mathcal{V}; PL(w_1, \dots, w_n))}$$

ovvero

$$\frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} = \frac{D(v_1, \dots, v_n)}{D(u_1, \dots, u_n)} \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)}.$$

Usando solo cambiamenti di base con determinante 1 (gruppo $SL(V)$) abbiamo una nozione di volume n-dimensionale indipendente dalla scelta delle basi.