

Introduzione alle curve di Bézier

Le curve di Bézier offrono la possibilità di disegnare curve nello spazio affine reale ove si imponga il passaggio per punti dati, con vettori tangenti dati. Le funzioni che parametrizzano le coordinate dei punti della curva sono funzioni polinomiali di un parametro t in $[0, 1]$, e la costruzione fa dipendere la curva dalla scelta un numero finito di punti (il cosiddetto *poligono di controllo*). Il procedimento si ‘comporta bene’ per trasformazioni affini, ovvero per applicare una trasformazione affine ai punti di una curva di Bézier è sufficiente applicare la trasformazione ai punti del poligono di controllo e costruire la curva corrispondente al poligono trasformato. Prima di entrare nei dettagli della costruzione generale, facciamo qualche considerazione sulle curve di Bézier di grado basso.



Pierre Bézier (1910-1999)

Dati due punti P_0 e P_1 dello spazio affine, la curva di Bézier determinata da questi due punti è l'interpolazione lineare del segmento che li congiunge, ovvero

$$\gamma_{P_0 P_1}(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad \text{per } t \in [0, 1].$$

Il segmento si riduce ad un unico punto se $P_0 = P_1$. Se i due punti sono distinti, il vettore tangente alla curva (in tutti i punti) è $P_1 - P_0$ e quindi il segmento è percorso a velocità costante.

Dati tre punti P_0, P_1 e P_2 dello spazio affine, possiamo iterare l'interpolazione lineare e, per ogni $t \in [0, 1]$, considerare i due punti $Q_0 = (1-t)P_0 + tP_1$ e $Q_1 = (1-t)P_1 + tP_2$ e fare l'interpolazione lineare di questi, ovvero $P_t = (1-t)Q_0 + tQ_1$. I punti P_t così costruiti formano la curva di Bézier determinata dai tre punti, P_0, P_1, P_2 , ovvero

$$\gamma_{P_0 P_1 P_2}(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \quad \text{per } t \in [0, 1].$$

Se i tre punti sono allineati, si ottiene ancora un segmento, anche se non più percorso a velocità costante (farsi i conti!). Il vettore tangente alla curva è $v_t = 2(1-t)(P_1 - P_0) - 2t(P_2 - P_1)$. Gli estremi finali di questi vettori (applicati nell'origine) percorrono i punti del segmento che congiunge gli estremi di $2(P_1 - P_0)$ e $2(P_2 - P_1)$. In particolare, la curva parte ($t = 0$) dal punto P_0 con vettore tangente $2(P_1 - P_0)$ ed arriva ($t = 1$) al punto P_1 con vettore tangente $2(P_2 - P_1)$. In particolare, la curva passa per il punto $M = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2$, ovvero il punto medio della mediana del triangolo $P_0 P_1 P_2$ uscente dal vertice P_1 .

Esercizio 1. Dimostrare che quando i tre punti, P_0, P_1, P_2 , non sono allineati, la curva di Bézier $\gamma_{P_0 P_1 P_2}(t)$ è un arco della parabola passante per $M = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2$ e bitangente in P_0 e P_2 ai lati $P_0 P_1$ e $P_1 P_2$ del triangolo $P_0 P_1 P_2$ e inoltre, che la direzione dell'asse della parabola è parallela alla retta che congiunge P_1 con M .

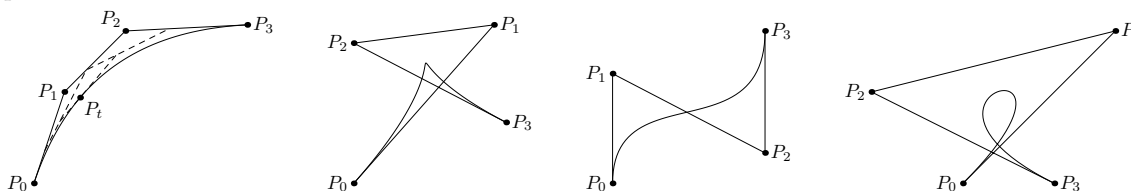
Svolgimento. Non è difficile mostrare la tesi osservando che, nel sistema di riferimento che ha l'origine nel punto $M = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2$ e per vettori di base $\frac{1}{2}(P_0 - P_2)$ e $M - P_1$, i punti della curva si scrivono come

$$P_t = M + (2t-1)\frac{P_0 - P_2}{2} + (2t-1)^2(M - P_1).$$

Lasciamo i calcoli al lettore e proponiamo una dimostrazione che fa uso di qualche argomento di Geometria Proiettiva.

Supponiamo il piano affine immerso nel piano proiettivo e osserviamo che la curva è una conica appartenente al fascio bitangente in P_0 e P_2 alle rette $P_0 \vee P_1$ e $P_1 \vee P_2$. Precisamente è l'unica conica del fascio che passa per M . Per tutte le coniche del fascio, P_1 è il polo della retta $P_0 \vee P_2$ e quindi il secondo punto di intersezione (dopo M) della conica con la retta $P_1 \vee M$ è il quarto armonico dopo P_1, K, M , ove $K = \frac{P_0 + P_2}{2} = (P_1 \vee M) \cap (P_0 \vee P_2)$. Poiché M è il punto medio del segmento $P_1 K$, il quarto armonico è il punto improprio, P_∞ della retta $P_1 \vee M$. La tangente alla conica in quel punto deve passare per il polo della retta $P_1 \vee M$, che appartiene alla retta $P_0 \vee P_2$ ed è il quarto armonico dopo P_0, P_2, K (intersezione tra la polare di K e la polare di M). Essendo K il punto medio del segmento $P_0 P_2$, il quarto armonico è il punto improprio, Q_∞ , della retta $P_0 \vee P_2$ e la tangente in P_∞ è quindi la retta impropria (perché contiene due punti impropri distinti). $\square$

In modo analogo si definiscono le curve di Bézier di grado 3, iterando una volta in più il procedimento di interpolazione lineare.



Qui sopra alcuni esempi di curve di Bézier di grado 3, che fanno intuire come possa modificarsi la curva al variare del poligono di controllo.

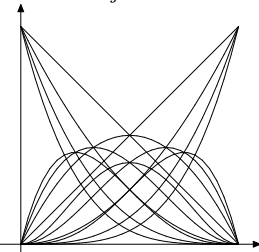
Possiamo quindi dare una definizione generale delle curve di Bézier.

Definizione. Dati $n + 1$ punti, $P_0, \dots, P_n$, dello spazio affine, la curva di Bézier di ordine n determinata dai punti dati è la curva

$$\gamma_{P_0 \dots P_n}(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j \quad \text{per } t \in [0, 1]$$

ove i coefficienti B_j^n sono i polinomi di Bernstein di grado n , ovvero $B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$, per $j = 0, \dots, n$.

Fissato un intero non negativo n , abbiamo definito qui sopra i polinomi di Bernstein $B_j^n(t)$ per $j = 0, \dots, n$. Come per i coefficienti binomiali, si può estendere la definizione dei polinomi di Bernstein per ogni coppia di interi, ponendo $B_j^n(t)$ identicamente uguale a 0 se $j < 0$ o $j > n$. Qui a fianco abbiamo riportato il grafico dei polinomi di Bernstein per $n = 1, \dots, 4$. Alcune delle proprietà delle curve di Bézier sono legate proprio alle proprietà dei polinomi di Bernstein e del loro ottenersi da un'iterazione dell'interpolazione lineare. Andremo quindi a raccogliere in una osservazione le principali proprietà di questi polinomi e poi ad applicare queste proprietà alla realizzazione di curve di Bézier. Le proprietà di queste curve dipendono quindi dalla scelta del poligono di controllo e dalle proprietà dei coefficienti e uno degli scopi della loro costruzione è il disegno di curve che soddisfino a particolari condizioni geometriche (di passaggio o di tangenza o altro) in alcuni punti e la possibilità di 'manipolare facilmente' queste costruzioni, ovvero applicare facilmente trasformazioni affini e proiezioni.



Proposizione. Fissato un intero $n \geq 0$, siano $B_j^n(t)$ i polinomi di Bernstein di grado n . Valgono le seguenti proprietà.

- (a) (positività) $B_j^n(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0, 1]$.
- (b) (simmetria) $B_{n-j}^n(t) = B_j^n(1-t)$, per ogni $j = 0, \dots, n$ e per ogni $t \in [0, 1]$.
- (c) (partizione dell'unità) $\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$.
- (d) (costruzione ricorsiva) $B_j^n(t) = (1-t)B_j^{n-1}(t) + tB_{j-1}^{n-1}(t)$, per ogni $j = 0, \dots, n$, per ogni $t \in [0, 1]$ e per $n \geq 1$.
- (e) $\frac{dB_j^n(t)}{dt} = n(B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t))$.
- (f) Fissati j ed n e presi comunque α e t in $[0, 1]$, si ha $B_j^n(\alpha t) = \sum_{k=j}^n B_k^n(\alpha) B_j^k(t)$.

dim. (a) e (b) sono una conseguenza immediata delle definizioni e della simmetria dei coefficienti binomiali. (c) discende dalla constatazione che

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = (t + 1 - t)^n = 1$$

per la formula del binomio di Newton. Analogamente (d) è conseguenza della definizione ricorsiva del coefficiente binomiale, ovvero

$$(1-t)B_j^{n-1}(t) + tB_{j-1}^{n-1}(t) = \left[\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} \right] t^j (1-t)^{n-j}.$$

(e) Con un calcolo elementare si ha

$$\frac{dB_j^n(t)}{dt} = j \binom{n}{j} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - (n-j) \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j-1}.$$

Inoltre, si ha

$$j \binom{n}{j} = j \frac{n!}{j!(n-j)!} = n \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} = n \binom{n-1}{j-1},$$

$$(n-j) \binom{n}{j} = (n-j) \frac{n!}{j!(n-j)!} = n \frac{(n-1)!}{j!(n-j-1)!} = n \binom{n-1}{j}.$$

da cui si conclude.

(f) Si ha

$$\sum_{k=j}^n B_k^n(\alpha) B_j^k(t) = \sum_{k=j}^n \binom{k}{j} \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} t^j (1-t)^{k-j}.$$

Inoltre,

$$\binom{k}{j} \binom{n}{k} = \frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}.$$

Quindi la somma scritta sopra si può anche scrivere come

$$\binom{n}{j} \alpha^j t^j \sum_{k=j}^n \binom{n-j}{k-j} (1-\alpha)^{n-k} \alpha^{k-j} (1-t)^{k-j}$$

e ponendo $h = k - j$, si scrive

$$\binom{n}{j} (\alpha t)^j \sum_{h=0}^{n-j} \binom{n-j}{h} (1-\alpha)^{n-j-h} \alpha^h (1-t)^h = \binom{n}{j} (\alpha t)^j (\alpha - \alpha t + 1 - \alpha)^{n-j} = B_j^n(\alpha t).$$

Osserviamo da ultimo che, in base alle definizioni date, si poteva far partire l'indice di somma k da 0 invece che da j , essendo $B_j^k(t) = 0$ se $k < j$. $\square$

Esercizio 2. Nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^k)$ sia data una curva $\delta(t) = {}^t(f_1(t), \dots, f_k(t))$, ove $f_1(t), \dots, f_k(t)$ sono polinomi in $\mathbb{R}[t]$ di grado minore o uguale ad n . Si mostri che esistono $n+1$ punti $P_0, \dots, P_n$ di $\mathbb{A}(\mathbb{R}^k)$ tali che $\delta(t) = \gamma_{P_0 \dots P_n}(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Si determinino esplicitamente tali punti nel caso della curva piana $\delta(t) = \begin{pmatrix} 1-3t+t^3 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix}$. $\square$

Dalle proprietà dei polinomi di Bernstein possiamo dedurre le prime conseguenze per le curve di Bézier.

Proposizione. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$ dello spazio affine, $\mathbb{A}$, e sia $\gamma_{P_0 \dots P_n}(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) P_j$, per $t \in [0, 1]$, la curva di Bézier individuata da tali punti.

- (a) La curva è contenuta nell'involuppo convesso dei punti $P_0, \dots, P_n$.
- (b) Si ha $\gamma_{P_0 \dots P_n}(0) = P_0$ e $\gamma_{P_0 \dots P_n}(1) = P_n$ e inoltre, i vettori tangenti in tali punti sono $\gamma'_{P_0 \dots P_n}(0) = n(P_1 - P_0)$ e $\gamma'_{P_0 \dots P_n}(1) = n(P_n - P_{n-1})$.
- (c) Invertendo l'ordine dei punti di controllo, si ha $\gamma_{P_n \dots P_0}(t) = \gamma_{P_0 \dots P_n}(1-t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.
- (d) Sia $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ una trasformazione affine. Allora $f(\gamma_{P_0 \dots P_n}(t)) = \gamma_{f(P_0) \dots f(P_n)}(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

dim. (a) L'involuppo convesso dei punti $P_0, \dots, P_n$ è l'insieme

$$K = \left\{ \sum_{i=0}^n c_i P_i \mid c_i \in [0, 1], c_0 + \dots + c_n = 1 \right\}.$$

Quindi l'affermazione è una conseguenza del fatto che $B_j^n(t) \geq 0$ e $\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = 1$ per ogni $t \in [0, 1]$, come

visto nella Proposizione precedente.

(b) Se $0 < j \leq n$, tutti i polinomi di Bernstein $B_j^n(t)$ sono divisibili per t e quindi si annullano quando $t = 0$; da cui si ottiene che $\gamma_{P_0 \dots P_n}(0) = P_0$. Analogamente, se $0 \leq j < n$, tutti i polinomi di Bernstein $B_j^n(t)$ sono divisibili per $1-t$ e quindi si annullano quando $t = 1$; da cui si ottiene che $\gamma_{P_0 \dots P_n}(1) = P_n$. Per quanto visto nel punto (e) della Proposizione precedente, in ogni punto $t \in [0, 1]$ il vettore tangente alla curva è

$$\begin{aligned} \gamma'_{P_0 \dots P_n}(t) &= \sum_{j=0}^n \frac{dB_j^n(t)}{dt} P_j = n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) P_j = \\ &= n \left[\sum_{j=0}^n B_{j-1}^{n-1}(t) P_j - \sum_{j=0}^n B_j^{n-1}(t) P_j \right] = n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) (P_{j+1} - P_j). \end{aligned}$$

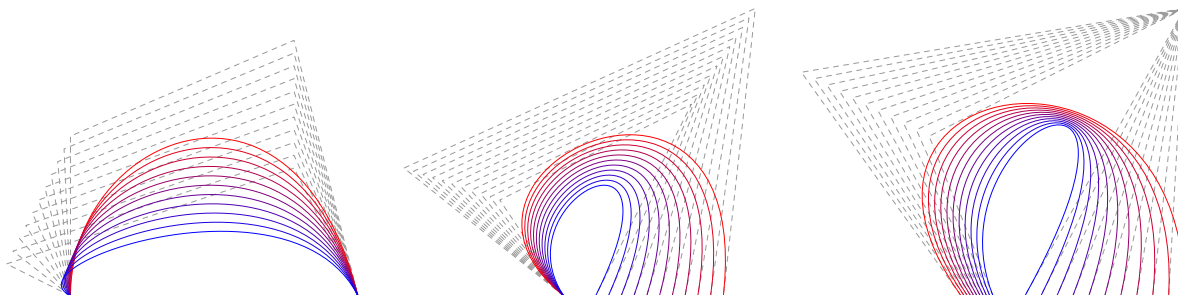
Calcolato per $t = 0$ e $t = 1$ fornisce il risultato cercato.

(c) È conseguenza della simmetria dei polinomi di Bernstein.

(d) Il punto $\gamma_{P_0 \dots P_n}(t)$ è una combinazione baricentrica dei punti $P_0, \dots, P_n$, quindi l'affermazione discende dal fatto che le trasformazioni affini conservano le combinazioni baricentriche. $\square$

Deformazioni di curve di Bézier

La costruzione delle curve di Bézier, oltre a fornire facilmente delle curve lisce passanti per punti dati ed aventi direzioni di tangenza fissate in tali punti con curve di grado basso e facilmente disegnabili, permette anche di deformare facilmente tra loro due curve dello stesso ordine, interpolando linearmente i poligoni di controllo. Nel disegno qui sotto sono riportate alcune deformazioni di curve di Bézier di ordine 3, mostrando in grigio i poligoni di controllo. Il cambiamento di colore dal rosso al blu indica le tappe della deformazione tra le due curve.



Ci si può chiedere come operare se si vogliono deformare due curve di Bézier con poligoni di controllo che abbiano numerosità diverse. La cosa è possibile, perché si possono aumentare i punti nel poligono di controllo di una curva di Bézier senza modificare la curva. Precisamente vale la seguente

Osservazione. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$ dello spazio affine e si ponga $P_{-1} = O = P_{n+1}$, ove O è una fissata origine. Siano inoltre, $Q_0, \dots, Q_{n+1}$ i punti definiti ponendo $Q_i = (1 - \frac{i}{n+1})P_i + \frac{i}{n+1}P_{i-1}$, per $i = 0, \dots, n+1$. Allora, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha

$$\gamma_{P_0 \dots P_n}(t) = \gamma_{Q_0 \dots Q_{n+1}}(t).$$

dim. Si tratta di nuovo di scrivere ordinatamente i termini delle somme.

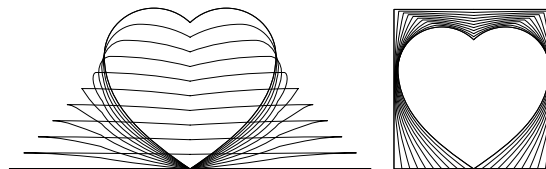
$$\begin{aligned} \gamma_{Q_0 \dots Q_{n+1}}(t) &= \sum_{i=0}^{n+1} B_i^{n+1}(t) Q_i \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} \left[\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i + \frac{i}{n+1} P_{i-1} \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} P_i + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n+1-i} P_{i-1} \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i + t \sum_{j=0}^n \frac{j+1}{n+1} \binom{n+1}{j+1} t^j (1-t)^{n-j} P_j. \end{aligned}$$

Ora basta osservare che

$$\frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} = \frac{n+1-i}{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} = \binom{n}{i} \quad \text{e} \quad \frac{j+1}{n+1} \binom{n+1}{j+1} = \frac{j+1}{n+1} \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!} = \binom{n}{j}$$

per concludere che $\gamma_{Q_0 \dots Q_{n+1}}(t) = (1-t)\gamma_{P_0 \dots P_n}(t) + t\gamma_{P_0 \dots P_n}(t) = \gamma_{P_0 \dots P_n}(t)$ per ogni valore di $t \in [0, 1]$. $\square$

Vediamo un'applicazione di questo metodo di deformazione nella macro **interpath** proposta da Knuth a p. 134 del manuale di *Metafont*, di cui mostriamo due esempi nei disegni qui a fianco che sono stati rifatti seguendo le indicazioni del testo. Come è noto, Metafont (e quindi Metapost) costruisce i cammini (path) unendo tratti di curve di Bézier di terzo grado. L'utente è libero di fissare i punti di passaggio della curva, (ed eventualmente la pendenza della tangente entrante o uscente da tali punti), e un algoritmo determina i punti di controllo posti prima e dopo del punto fissato. Come si vede nella macro più sotto, per deformare le due curve vengono interpolati linearmente i punti del poligono di controllo di ciascun tratto di curva. Riportiamo qui sotto il codice Metapost con la macro **interpath**, ricordando che la scrittura **a[m,n]** per un valore numerico **a** e due punti (pair) **m,n**, rappresenta l'interpolazione lineare $(1-a)m + an$. Dovrebbe quindi essere chiaro dal contesto che nella definizione sottostante l'espressione **a** rappresenta una variabile numerica, mentre **p** e **q** rappresentano due path.



```
vardef interpath(expr a,p,q) =
  for t=0 upto length p -1:
    a[point t of p, point t of q]..controls a[postcontrol t of p, postcontrol t of q]
    and a[precontrol t+1 of p, precontrol t+1 of q] ..endfor
  if cycle p: cycle
  else: a[point infinity of p, point infinity of q] fi
enddef;
```

Algoritmo di de Casteljau

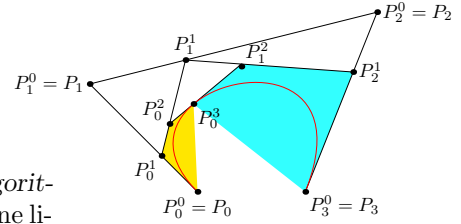
Ora vogliamo usare le ulteriori proprietà dei polinomi di Bernstein per descrivere un celebre algoritmo, che si rivelerà utile per disegnare la curva.

Definizione. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$ di uno spazio affine $\mathbb{A}$ e sia fissato $t_0 \in [0, 1]$. Al variare di $k = 0, \dots, n$ si definiscono i punti P_j^k per $j = 0, \dots, n - k$, ponendo

$$P_j^0 = P_j, \text{ per } j = 0, \dots, n \quad \text{e} \quad P_j^k = (1 - t_0)P_j^{k-1} + t_0P_{j+1}^{k-1}, \text{ per } j = 0, \dots, n - k.$$

Spesso i punti così definiti si scrivono ordinatamente nella forma:

$$\begin{array}{cccc} P_0^0 & P_1^0 & \dots & P_n^0 \\ & P_0^1 & & P_{n-1}^1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & P_0^n \end{array}$$



La costruzione di questa sequenza di punti è il nucleo centrale dell'*Algoritmo di Casteljau* che afferma che con questa iterazione dell'interpolazione lineare si costruiscono punti della curva di Bézier relativa a $P_0, \dots, P_n$ e che si può suddividere la curva nell'unione delle due curve di Bézier relative ai punti $P_0^0, \dots, P_0^n$ e $P_0^n, P_1^{n-1}, \dots, P_n^0$, come è indicativamente rappresentato nella figura a fianco. Più precisamente, andiamo a dimostrare la seguente

Proposizione. [Algoritmo di De Casteljau] Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$ dello spazio affine e fissato $t_0 \in [0, 1]$. Il punto finale, P_0^n , della sequenza definita sopra è il punto $\gamma_{P_0 \dots P_n}(t_0)$ della curva di Bézier determinata dai punti $P_0, \dots, P_n$. Inoltre, la restrizione della curva $\gamma_{P_0 \dots P_n}$ all'intervallo $[0, t_0]$ coincide con la curva $\gamma_{P_0^0 \dots P_0^n}$, mentre la restrizione all'intervallo $[t_0, 1]$ coincide con $\gamma_{P_0^n P_1^{n-1} \dots P_n^0}$.

Cominciamo con un Lemma

Lemma. Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$ e sia fissato $t_0 \in [0, 1]$. Indichiamo con P_j^k , per $0 \leq j \leq n - k$ e $0 \leq k \leq n$ i punti definiti sopra. Allora, si ha $P_j^k = \sum_{i=0}^k B_i^k(t_0)P_{j+i}$.

dim. Facciamo induzione su k , osservando che per $k = 0$ o $k = 1$ si tratta proprio della definizione scritta sopra. Supponiamo quindi che la tesi sia vera per un certo indice k e andiamo a dedurla per $k + 1$. Infatti, fissato $j \leq n - k - 1$, dalla definizione sopra, applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$P_j^{k+1} = (1-t_0)P_j^k + t_0P_{j+1}^k = (1-t_0) \sum_{i=0}^k B_i^k(t_0)P_{j+i} + t_0 \sum_{i=0}^k B_i^k(t_0)P_{j+1+i} = \sum_{i=0}^{k+1} [(1-t_0)B_i^k(t_0) + t_0B_{i-1}^k(t_0)]P_{j+i}$$

che è quanto serve per concludere grazie alla costruzione ricorsiva dei polinomi di Bernstein. $\square$

Osserviamo che il Lemma precedente dice esattamente che $P_0^n = \sum_{i=0}^n B_i^n(t_0)P_i = \gamma_{P_0 \dots P_n}(t_0)$ e dimostra così la prima parte della Proposizione. Andiamo quindi a dimostrare il seguente

Lemma. [algoritmo di divisione] Siano dati i punti $P_0, \dots, P_n$, sia fissato $t_0 \in [0, 1]$, e indichiamo con P_j^k , per $0 \leq j \leq n - k$ e $0 \leq k \leq n$ i punti definiti sopra. Allora, fissato comunque $\alpha \in [0, 1]$, si ha

$$\gamma_{P_0 \dots P_n}(\alpha t_0) = \gamma_{P_0^0 \dots P_0^n}(\alpha).$$

dim. Si ha

$$\gamma_{P_0^0 \dots P_0^n}(\alpha) = \sum_{k=0}^n B_k^n(\alpha)P_0^k = \sum_{k=0}^n B_k^n(\alpha) \sum_{j=0}^k B_j^k(t_0)P_j = \sum_{j=0}^n \left[\sum_{k=j}^n B_k^n(\alpha)B_j^k(t_0) \right] P_j$$

A questo punto, basta applicare il punto (f) della Proposizione sui polinomi di Bernstein per concludere che l'ultima somma è uguale a $\gamma_{P_0 \dots P_n}(\alpha t_0)$, essendo $B_j^n(\alpha t_0) = \sum_{k=j}^n B_k^n(\alpha)B_j^k(t_0)$. $\square$

Osserviamo che il Lemma precedente afferma proprio che la restrizione della curva $\gamma_{P_0 \dots P_n}$ al punto α dell'intervallo $[0, t_0]$, ovvero $\gamma_{P_0 \dots P_n}(\alpha t_0)$, coincide con il punto $\gamma_{P_0^0 \dots P_n^0}(\alpha)$. Utilizzando la simmetria delle curve di Bézier, si ha

$$\gamma_{P_0^0 \dots P_n^0}(\alpha) = \gamma_{P_n^0 \dots P_0^0}(1 - \alpha) = \gamma_{P_n \dots P_0}((1 - \alpha)(1 - t_0)) = \gamma_{P_0 \dots P_n}(t_0 + \alpha(1 - t_0)).$$

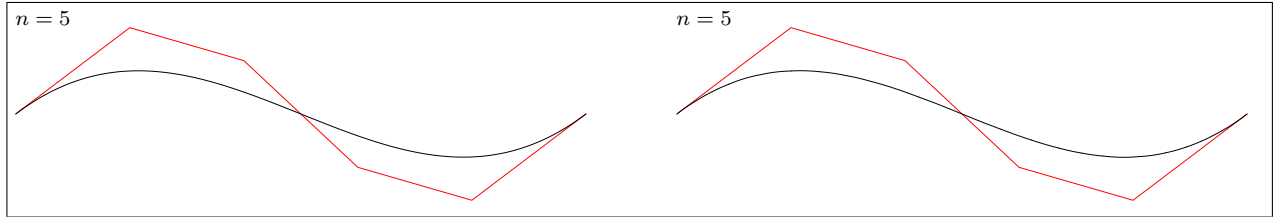
Ciò completa la dimostrazione della Proposizione. $\square$

Un esempio. L'Algoritmo descritto sopra può essere usato effettivamente per disegnare una curva di Bézier. Un primo utilizzo, può essere quello di suddividere l'intervallo $[0, 1]$ in N parti, e di utilizzare la tecnica precedente per calcolare i punti $\gamma_{P_0 \dots P_n}(i/N)$, per $i = 0, \dots, N$ e unire questi punti con dei segmenti rettilinei. Se la suddivisione è abbastanza fitta, l'occhio non coglie la differenza.

Vi è un modo più raffinato di utilizzare l'algoritmo precedente per disegnare un'approssimazione della curva tramite una spezzata, fissando a priori un errore da non superare nella rappresentazione. Un modo per stimare l'errore può essere il seguente: dati gli $n + 1$ punti, $P_0, \dots, P_n$, la curva di Bézier $\gamma_{P_0 \dots P_n}$ va da P_0 a P_n ed è contenuta nell'involuppo convesso dei punti dati, quindi la massima distanza di un punto della curva dalla retta $P_0 \vee P_n$ è minore della massima distanza di un punto del poligono di controllo dalla stessa retta e tale massima distanza dà una maggiorazione dell'errore compiuto sostituendo l'arco di curva con il poligono di controllo (o con il segmento $P_0 P_n$, se si preferisce).

Si può quindi proporre il seguente procedimento. Si fissa una tolleranza $\varepsilon > 0$ e si valuta se tutti i punti dati distano dalla retta $P_0 \vee P_n$ meno di ε . Se è così possiamo disegnare la spezzata che ha come estremi il poligono di controllo ed abbiamo disegnato la curva con un errore minore di ε . Se così non è, si considera l'algoritmo di Casteljau per $t_0 = 1/2, 1/4, \dots, 1/2^n$, fino a che i punti del poligono di sinistra $P_0^0, \dots, P_0^n$ non hanno massima distanza da $P_0^0 \vee P_0^n$ minore di ε . A questo punto si disegna il poligono formato da quei punti e si sostituisce il poligono iniziale con i punti del poligono di destra, $P_0^n, P_1^{n-1}, \dots, P_n^0 = P_n$ per ripetere la stessa procedura su quest'ultimi. Il processo si arresta, quando si arriva a disegnare il punto P_n .

Nelle due figure qui sotto è stato usato lo stesso poligono di controllo. Nella figura a sinistra sono stati calcolati con l'algoritmo di De Casteljau 600 punti della curva di Bézier che sono stati disegnati e congiunti tra loro da segmenti. Nella figura a destra, sempre usando l'algoritmo di De Casteljau, si è suddivisa la curva finché la massima distanza dei vertici del poligono di controllo della suddivisione dalla retta congiungente i due estremi non fosse minore di un fissato errore ε (nell'esempio, l'errore è stato fissato a 2.5 decimi di millimetro, ovvero lo spessore di una normale penna da disegno). A titolo di cronaca, riportiamo che, per ottenere la figura a destra, sono stati necessari circa 65 cicli del loop di calcolo della curva (contro i 600 utilizzati nella figura precedente).



Riportiamo di seguito il listato MetaPost che ha prodotto la seconda figura, operando secondo il procedimento descritto sopra (Il lettore è caldamente invitato a migliorare sia l'algoritmo utilizzato che la sua implementazione).

```

beginfig(5);
numeric d,n,a,u,pi,epsilon,err;
pair nn;
pair q[] [];pair p[];pair s[];pair d[];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=5; u=2.4cm; epsilon=0.25mm;
pi:=3.141592653589; a=1/2;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
path b, pol;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% algoritmo di de Casteljau per c in [0,1]
%% calcola i poligoni di controllo a sinistra, s[],
%% ed a destra, d[], del punto q[n][0].
%%
vardef dividi(expr c) =
  for j=1 upto n:
    for k=0 upto n-j:
      q[j][k] := (1-c)*q[j-1][k] + c*q[j-1][k+1];
    endfor
  endfor;
  for i=0 upto n: s[i]:=q[i][0]; d[i]:=q[n-i][i]; endfor
enddef;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% calcola la distanza massima (d) dei vertici del poligono,
%% s[n],...,s[0], dalla retta s[n]--s[0].
%%
vardef test =

```

```

nn:=unitvector(s[n]-s[0]);
nn:= nn rotated 90;
d:=abs((s[1]-s[0]) dotprod nn);
for i=2 upto n:
    err:=abs((s[i]-s[0]) dotprod nn);
    if d<err: d:=err; fi;
endfor;
enddef;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% fine dei preamboli %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% il poligono di controllo
%%
for i=0 upto n:
    p[i] := (2*pi*i/n, sind(360*i/n))*u;
endfor;
%%
pol = p0 for i=1 upto n-1: --p[i] endfor --p[n];
draw pol withcolor red;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% inizio del calcolo della curva
%%
for k=0 upto n: q[0][k]:=p[k]; endfor;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dividi(a);
forever:
    test;
    if d<epsilon:
        b:=s[0] for i=1 upto n-1: --s[i] endfor --s[n];
        draw b;
        exitif s[n]=p[n];
        for k=0 upto n: q[0][k]:=d[k]; s[k]:=d[k]; endfor;
        a:=1/2;
    else:
        a:=a/2; dividi(a);
    fi;
endfor;
endfig;

```

Curve di Bézier razionali

Si può costruire una classe più ampia di curve di Bèzier facendo uso di coordinate omogenee e dello spazio proiettivo. Facciamo qualche richiamo per essere più precisi. Lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{A}^k(\mathbb{R})$ si immerge nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^k(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1})$ tramite la scelta di un iperpiano di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1})$ da mandare all'infinito. Lo spazio proiettivo ha le coordinate omogenee ${}^t(x_0, \dots, x_k)$ e la scelta usuale è di prendere come iperpiano improprio $H : x_0 = 0$, e le coordinate affini ${}^t(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_k}{x_0})$ sui punti di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1}) \setminus H$, che viene identificato così con lo spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^k)$. I punti di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1})$ si identificano con le classi di equivalenza dei vettori non nulli di $\mathbb{R}^{k+1}$ rispetto alla relazione $v \sim w$ se, e solo se, $w = av$ per qualche $a \neq 0$.

Dati $n+1$ punti $P_0, \dots, P_n$ di $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1})$, si fissino dei vettori $v_0, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^{k+1}$, tali che $P_j = \langle v_j \rangle$ per $j = 0, \dots, n$, e si consideri la curva di Bézier nello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}(t) = \sum_{j=0}^n B_j^n(t) v_j \quad \text{per } t \in [0, 1].$$

Resta definita in questo modo una curva nello spazio proiettivo $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{k+1})$ i cui punti sono i sottospazi $\langle \tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}(t) \rangle$ al variare di t . I punti di questa curva, contenuti nel complementare di H , ovvero nello spazio affine $\mathbb{A}(\mathbb{R}^k)$, formano i punti della *curva di Bézier razionale* determinata dai vettori $v_0, \dots, v_n$. Le coordinate dei vettori $v_0 \dots v_n$ sono coordinate omogenee dei punti $P_0, \dots, P_n$ e la coordinata zerea del vettore v_j è detta il *peso* attribuito al punto P_j . Un peso nullo corrisponde ad un punto improprio dello spazio affine. Consideriamo quindi le coordinate affini dei punti della curva, ovvero se il vettore v_j ha coordinate ${}^t(x_{0j}, x_{1j}, \dots, x_{kj})$, il punto $\tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}(t)$ ha coordinate affini

$$y_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) x_{ij}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) x_{0j}}, \quad \text{per } i = 1, \dots, k.$$

Pur con gli stessi punti del poligono di controllo nello spazio affine, la scelta di differenti pesi permette di ottenere curve distinte. Vediamo un esempio: I punti del piano affine reale, $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

si possono rialzare ai vettori $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ e danno luogo alla curva di Bézier razionale

$$\sum_{j=0}^2 B_j^2(t) v_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix} \quad \text{di coordinate affini} \quad \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix}$$

che coincide con la curva di Bézier intera nel piano $x_0 = 1$, ovvero l'arco di parabola di equazione affine $(X - Y)^2 + 2(X + Y - \frac{3}{2}) = 0$.

Gli stessi punti si possono rialzare ai vettori $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ e danno luogo alla curva di Bézier razionale

$$\sum_{j=0}^2 B_j^2(t) v_j = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{di coordinate affini} \quad \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} \end{pmatrix},$$

che, nel piano affine, determina l'arco di circonferenza di equazione affine $X^2 + Y^2 = 1$.

Disegniamo qui di fianco le due curve, mostrando in blu l'arco di circonferenza ed in nero l'arco di parabola. A fianco riportiamo altri esempi di curve razionali ottenute dagli stessi punti, con scelte diverse di pesi per il punto P_1 . Si può vedere che la scelta di peso nullo (v_1 diventa l'origine di $\mathbb{R}^3$) produce il segmento P_0P_2 , mentre pesi negativi fanno uscire la curva dall'involuppo convesso dei punti del poligono di controllo. In generale, le curve di Bézier razionali, permettono di disegnare una più ampia famiglia di curve rispetto alle sole curve di Bézier intere, ma ciò che le rende particolarmente utili è il fatto che, applicare una trasformazione proiettiva ai punti di una curva di Bézier razionale li porta sui punti della curva di Bézier razionale che si ottiene rialzando le immagini dei punti del poligono di controllo con le immagini dei vettori corrispondenti tramite una soprastante dell'applicazione proiettiva. Più precisamente, possiamo scrivere

Proposizione. Siano $P_0, \dots, P_n$ punti dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ e siano fissati dei vettori $v_0, \dots, v_n$ tali che $P_j = \langle v_j \rangle$ per $j = 0, \dots, n$. Sia $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{R})$ un'applicazione proiettiva con soprastante $\phi : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ e sia $\tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}$ la curva di Bézier razionale associata ai vettori dati. Allora, per ogni $t \in [0, 1]$,

$$f(\langle \tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}(t) \rangle) = \langle \tilde{\gamma}_{\phi(v_0) \dots \phi(v_n)}(t) \rangle.$$

In coordinate omogenee, una curva di Bézier razionale non è altro che una curva di Bézier nello spazio affine $\mathbb{R}^{k+1}$ e quindi valgono per queste curve le proprietà già viste nelle pagine precedenti e può essere utilizzato l'algoritmo di de Casteljau per determinare le coordinate omogenee di queste curve. Concludiamo questa rapida disamina delle curve razionali, dando un'indicazione di come varia la curva modificando la scelta dei vettori v_j soprastanti i punti dello spazio proiettivo (la scelta dei "pesi").

Osservazione. Siano $P_0, \dots, P_n$ punti dello spazio affine $\mathbb{A}^k(\mathbb{R})$, immerso nel modo usuale nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^k(\mathbb{R})$, e siano fissati dei vettori $v_0, \dots, v_n$ tali che $P_j = \langle v_j \rangle$, con $v_j = \begin{pmatrix} x_{0j} \\ \vdots \\ x_{kj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1}$, per $j = 0, \dots, n$. Sia $\tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}$ la curva di Bézier razionale associata ai vettori dati e $P(t)$ il punto dello spazio affine corrispondente a $\tilde{\gamma}_{v_0 \dots v_n}(t)$, per $t \in [0, 1]$. Sia fissato $j_0 \in \{0, \dots, n\}$ e si ponga $v'_{j_0} = (1 + \delta)v_{j_0}$, e $v'_j = v_j$ per $j \neq j_0$. Sia $\tilde{\gamma}'_{v'_0 \dots v'_n}$ la curva di Bézier razionale associata e $P'(t)$ il punto dello spazio affine corrispondente a $\tilde{\gamma}'_{v'_0 \dots v'_n}(t)$, per $t \in [0, 1]$.

Allora, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha

$$P'(t) = (1 - \alpha)P(t) + \alpha P_{j_0}, \quad \text{ove} \quad \alpha = \alpha(t) = \frac{\delta B_{j_0}^n(t) x_{0j_0}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) x_{0j} + \delta B_{j_0}^n(t) x_{0j_0}}.$$

dim. Le coordinate affini del punto P_j sono $y_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_{0j}}$ per $i = 1, \dots, k$; così come le coordinate affini di $P(t)$ sono $y_i(t) = \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) x_{ij}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) x_{0j}}$, per $i = 1, \dots, k$.

Osserviamo che

$$1 - \alpha = \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j} + \delta B_{j_0}^n(t)x_{0j_0}}.$$

La i -esima coordinata affine di $P'(t)$ sarà quindi

$$\begin{aligned} y_i'(t) &= \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{ij} + \delta B_{j_0}^n(t)x_{ij_0}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j} + \delta B_{j_0}^n(t)x_{0j_0}} \\ &= \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j} + \delta B_{j_0}^n(t)x_{0j_0}} \frac{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{ij}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j}} + \frac{\delta B_{j_0}^n(t)x_{0j_0}}{\sum_{j=0}^n B_j^n(t)x_{0j} + \delta B_{j_0}^n(t)x_{0j_0}} \frac{x_{ij_0}}{x_{0j_0}} \\ &= (1 - \alpha)y_i(t) + \alpha y_{ij_0}, \end{aligned}$$

che permette di concludere. □

Dunque, cambiando il “peso” del punto P_{j_0} , nel modo indicato, i punti della curva razionale si spostano lungo il segmento che li congiunge a P_{j_0} secondo la quantità indicata. Nell’enunciato precedente e nella successiva dimostrazione, si sottintende di escludere i valori di t per cui il punto $P(t)$ diventa un punto improprio, oppure si annulla il denominatore di $\alpha(t)$ (e quindi è il punto $P'(t)$ che esce dallo spazio affine). Non aggiungiamo altro, lasciando al lettore il compito di “sperimentare” gli effetti sulla curva delle modifiche fatte ai vettori che rialzano i punti dati, anche nel caso in cui si tratti di punti impropri.