Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 5 febbraio 2002

ESERCIZIO 1. Si studi la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$$

con particolare attenzione per l'insieme ove la funzione è derivabile e la presenza di eventuali asintoti. Si tracci un grafico indicativo.

ESERCIZIO 2. Si calcoli

$$\int_{-\infty}^{-3} \frac{5x+4}{x^3+3x^2+2x}\,dx.$$

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n!}{(n+1)^n} \right)^{\alpha}.$$

ESERCIZIO 4. Si calcoli

$$\int_{-1/4}^{3/4} 2x \log \frac{1+x}{1-x}\,dx.$$

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 20 febbraio 2002

ESERCIZIO 1. Si studi la funzione

$$f(x) = x\sqrt{|\log x|}$$

con particolare attenzione per l'insieme ove la funzione è derivabile ed eventuali valori massimi o minimi, relativi ed assoluti. Si tracci un grafico indicativo.

ESERCIZIO 2. Si calcoli

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}\, dx.$$

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}.$$

ESERCIZIO 4. Si calcoli

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(2x)\cos(3x)\, dx.$$

ESERCIZIO 5. Nello spazio tridimensionale si considerino i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Si determini il vettore $\mathbf{x}_1$, proiezione ortogonale di $\mathbf{v}$ sulla retta parallela a $\mathbf{w}$. Posto $\mathbf{x}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{x}_1$, si verifichi che $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ sono perpendicolari tra loro.

(b) Si calcolino le aree dei parallelogrammi di lati $\mathbf{v}, \mathbf{x}_1$ e $\mathbf{v}, \mathbf{x}_2$, rispettivamente.

(c) Si mostri che le due aree calcolate nel punto precedente coincidono, qualunque scelta si faccia dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. (Si può giustificare questa uguaglianza con argomenti geometrici?)

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 24 giugno 2002

ESERCIZIO 1. *Si considerino le funzioni $a\sin x + \cos^2 x$, al variare di a tra i numeri reali.*
(a) Si determini a affinché la funzione abbia un flesso nel punto $x_0 = \frac{7\pi}{6}$.
(b) Per tale valore di a, si studi l'andamento della funzione e se ne tracci un grafico indicativo.

[**N.B.**: È richiesto lo studio della derivata seconda.]

Svolgimento. Qualunque sia il valore di a, si tratta di funzioni definite, continue e derivabili (infinite volte) su tutti i punti della retta reale e periodiche di periodo 2π e quindi possiamo limitarci a studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$. I punti di flesso, ovvero i punti in cui il grafico della funzione modifica la sua convessità, sono da cercarsi tra i punti in cui si annulla la derivata seconda. Osservando che le derivate prima e seconda sono rispettivamente,

$$(a - 2\sin x)\cos x \qquad \text{e} \qquad 4\sin^2 x - a\sin x - 2,$$

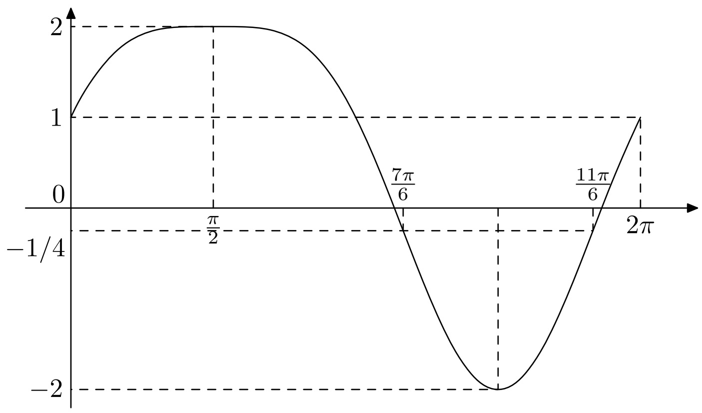
e che $\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, si conclude che la derivata seconda si annulla in x_0 per $a = 2$. Inoltre, per tale valore di a, la derivata seconda ha segni opposti prima e dopo il punto x_0 e quindi si tratta di un punto di flesso.

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(x) = 2\sin x + \cos^2 x$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, e sappiamo che

$$f'(x) = 2(1 - \sin x)\cos x \qquad \text{ed} \qquad f''(x) = 4\sin^2 x - 2\sin x - 2.$$

Il segno della derivata prima coincide con il segno di $\cos x$ e quindi $f(x)$ è crescente per x in $(0, \frac{\pi}{2})$ ed in $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, mentre è decrescente in $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Si han quindi un punto di massimo relativo per $x = \frac{\pi}{2}$, con $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ ed un punto di minimo relativo per $x = \frac{3\pi}{2}$, con $f(\frac{3\pi}{2}) = -2$.

Per studiare il segno della derivata seconda consideriamo dapprima il segno del trinomio $4t^2 - 2t - 2$, che è positivo per $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$, mentre è negativo nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 1)$. Sostituendo a t i valori di $\sin x$, si conclude che $f''(x) > 0$ per $x \in (0, \frac{7\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$, mentre è negativo per $x \in (\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6})$.



Possiamo quindi concludere che l'andamento della funzione è descritto nel grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_3^4 \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}\, dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio perchè la funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $(3, 4]$ e diverge quando $x \to 3^+$. Ponendo $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$, si ha $x = \frac{3y^2-2}{y^2-1}$ e $dx = -\frac{2y}{(y^2-1)^2}dy$ ed inoltre, $\lim_{x\to 3^+} y(x) = +\infty$ e $y(4) = \sqrt{2}$; quindi l'integrale proposto viene a coincidere con

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2y^2}{(y^2-1)^2}dy.$$

Si osservi che

$$\frac{2y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=2 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{cases},$$

e quindi

$$\int \frac{2y^2}{(y^2-1)^2}dy = \int \frac{1/2}{y-1}dy + \int \frac{1/2}{(y-1)^2}dy - \int \frac{1/2}{y+1}dy + \int \frac{1/2}{(y+1)^2}dy =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] + c.$$

Infine, osservando che

$$\lim_{y\to+\infty}\left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] = 0,$$

si conclude che l'integrale improprio converge a $\sqrt{2} - \frac{1}{2}\log(3-2\sqrt{2})$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2\frac{n^2+2n-1}{(n^2-1)^2}$$

e se ne calcoli l'eventuale somma.

Si scriva la definizione di convergenza assoluta per una serie numerica e si dica se la serie data converge assolutamente.

Svolgimento. Si osservi che

$$2\frac{n^2+2n-1}{(n^2-1)^2} = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2};$$

e dunque

$$s_k = \sum_{n=2}^{k} 2\frac{n^2+2n-1}{(n^2-1)^2} = \frac{11}{4} - \frac{k-1}{k^2} - \frac{k}{(k+1)^2};$$

da cui si deduce che la somma della serie è $\frac{11}{4}$.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. La serie proposta è una serie (semplcemente) convergente ed a termini reali positivi; quindi converge assolutamente. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2\cos x}{4[x+\log(1-x)]^2}.$$

Svolgimento. Le formule di McLaurin, permettono di scrivere:

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4);$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);$$
$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

e quindi si ha

$$\frac{\sin^2 x - 2 + 2\cos x}{4[x + \log(1-x)]^2} = \frac{-\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x \to 0$, si conclude che il limite proposto converge a $-\frac{1}{4}$. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le matrici*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \textit{ed} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -5 & -4 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che P è invertibile e si calcoli la sua inversa P^{-1}.
(b) Si verifichi che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale. Cosa si può dire degli autovalori e degli autovettori di A?

Svolgimento. Con un calcolo diretto (ad esempio tramite il metodo di eliminazione), si vede che

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si osservi poi che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi 2, -1 ed 1 sono gli autovalori di A, che hanno come rispettivi autovettori (i sottospazi generati dal)le colonne della matrice P. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 8 luglio 2002

ESERCIZIO 1. *Si considerino le funzioni $a\cos x + \sin^2 x$, al variare di a tra i numeri reali.*
(a) Si determini a affinché la funzione abbia un flesso nel punto $x_0 = \frac{4\pi}{3}$.
(b) Per tale valore di a, si studi l'andamento della funzione e se ne tracci un grafico indicativo.

[**N.B.**: È richiesto lo studio della derivata seconda.]

Svolgimento. Qualunque sia il valore di a, si tratta di funzioni definite, continue e derivabili (infinite volte) su tutti i punti della retta reale e periodiche di periodo 2π e quindi possiamo limitarci a studiarle nell'intervallo $[0, 2\pi]$. I punti di flesso, ovvero i punti in cui il grafico della funzione modifica la sua convessità, sono da cercarsi tra i punti in cui si annulla la derivata seconda. Osservando che le derivate prima e seconda sono rispettivamente,

$$(2\cos x - a)\sin x \qquad \text{e} \qquad 4\cos^2 x - a\cos x - 2,$$

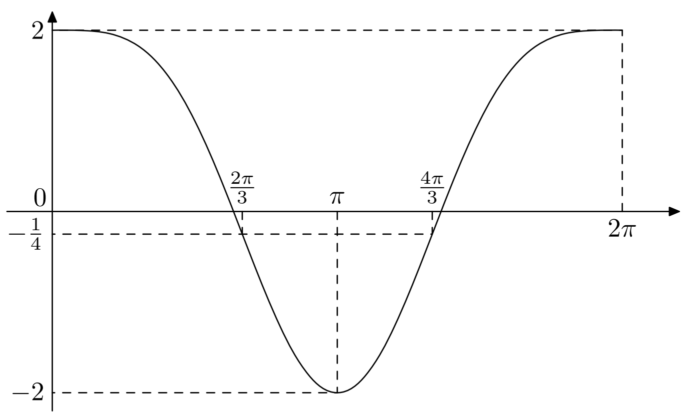
e che $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, si conclude che la derivata seconda si annulla in x_0 per $a = 2$. Inoltre, per tale valore di a, la derivata seconda ha segni opposti prima e dopo il punto x_0 e quindi si tratta proprio di un punto di flesso.

Dobbiamo quindi studiare la funzione $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, e sappiamo che

$$f'(x) = 2(\cos x - 1)\sin x \qquad \text{ed} \qquad f''(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2.$$

Il segno della derivata prima è l'opposto del segno di $\sin x$ e quindi $f(x)$ è decrescente per x in $(0, \pi)$, mentre è crescente in $(\pi, 2\pi)$. Si han quindi un punto di massimo relativo per $x = 0$ (ed $x = 2\pi$), con $f(0) = 2$ ed un punto di minimo relativo per $x = \pi$, con $f(\pi) = -2$.

Per studiare il segno della derivata seconda consideriamo dapprima il segno del trinomio $4t^2 - 2t - 2$, che è positivo per $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$, mentre è negativo nell'intervallo $(-\frac{1}{2}, 1)$. Sostituendo a t i valori di $\cos x$, si conclude che $f''(x) > 0$ per $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$.



Possiamo quindi concludere che l'andamento della funzione è descritto nel grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{x-4}{x-2}}\, dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio perchè la funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $[0, 2)$ e diverge per $x \to 2^-$. Ponendo $y = \sqrt{\frac{x-4}{x-2}}$, si ha $x = \frac{2y^2-4}{y^2-1}$ e $dx = \frac{4y}{(y^2-1)^2}dy$ ed inoltre, come abbiamo già osservato, $\lim_{x\to 2^-} y(x) = +\infty$ ed $y(0) = \sqrt{2}$; quindi l'integrale proposto viene a coincidere con

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{4y^2}{(y^2-1)^2} dy.$$

Si osservi che

$$\frac{4y^2}{(y^2-1)^2} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{(y-1)^2} + \frac{C}{y+1} + \frac{D}{(y+1)^2} \qquad \text{con} \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+B-C+D=4 \\ -A+2B-C-2D=0 \\ -A+B+C+D=0 \end{cases},$$

e quindi

$$\int \frac{4y^2}{(y^2-1)^2}dy = \int \frac{1}{y-1}dy + \int \frac{1}{(y-1)^2}dy - \int \frac{1}{y+1}dy + \int \frac{1}{(y+1)^2}dy =$$
$$= \left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] + c.$$

Infine, osservando che

$$\lim_{y\to+\infty} \left[\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| - \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right] = 0,$$

si conclude che l'integrale improprio converge a $2\sqrt{2} - \log(3-2\sqrt{2})$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1-n-n^2}{(n^2-1)^2}$$

e se ne calcoli l'eventuale somma.

Si scriva la definizione di convergenza assoluta per una serie numerica e si dica se la serie data converge assolutamente.

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{1-n-n^2}{(n^2-1)^2} = -\frac{1/2}{n-1} - \frac{1/4}{(n-1)^2} + \frac{1/2}{n+1} + \frac{1/4}{(n+1)^2};$$

e dunque

$$s_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{n^2+n-1}{(n^2-1)^2} = -\frac{17}{16} + \frac{2k+1}{4k^2} + \frac{2k+3}{4(k+1)^2};$$

da cui si deduce che la somma della serie è $-\frac{17}{16}$.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se converge la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. La serie proposta è una serie (semplcemente) convergente ed a termini reali negativi; quindi la serie dei valori assoluti è l'opposto della serie data e quindi è convergente. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh^2 x + 2 - 2\cosh x}{4[\log(1+x) - x]^2}.$$

Svolgimento. Le formule di McLaurin, permettono di scrivere:

$$(\sinh x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4);$$
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4);$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

e quindi si ha

$$\frac{\sinh^2 x + 2 - 2\cosh x}{4[\log(1+x) - x]^2} = \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x \to 0$, si conclude che il limite proposto converge a $\frac{1}{4}$. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le matrici*

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \textit{ed} \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 8 \\ 9 & 21 & -19 \\ 9 & 18 & -16 \end{pmatrix}.$$

(a) Si verifichi che P è invertibile e si calcoli la sua inversa P^{-1}.
(b) Si verifichi che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.
(c) Cosa si può dire degli autovalori e degli autovettori di A?

Svolgimento. Con un calcolo diretto (ad esempio tramite il metodo di eliminazione), si vede che

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Si osservi poi che

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

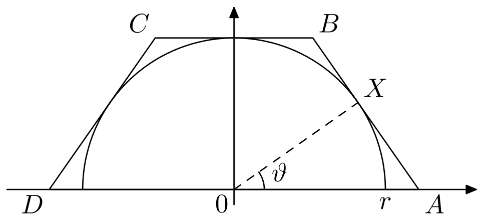
e quindi -1, 3 e 2 sono gli autovalori di A, che hanno come rispettivi autovettori (i sottospazi generati dal)le colonne della matrice P. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova scritta del 2 settembre 2002

ESERCIZIO 1. *Si consideri un trapezio isoscele $ABCD$ circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r, centrata nell'origine, come nella figura sottostante.*

(a) *Si determinino l'equazione della retta contenente il segmento AB e le coordinate dei due estremi A e B in funzione dell'angolo ϑ.*
(b) *Si determinino il perimetro, $P(\vartheta)$, e l'area, $A(\vartheta)$, del trapezio in funzione dell'angolo ϑ.*
(c) *Si determinino i valori minimi del perimetro e dell'area del trapezio, al variare di ϑ in $[0, \frac{\pi}{2})$.*



Svolgimento. Come nel disegno, indichiamo con X il punto di tangenza alla circonferenza del lato AB. Le sue coordinate sono $X = \binom{r\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}$ e quindi la retta contenente il segmento AB è la retta t, perpendicolare al vettore $\overrightarrow{OX}$ e passante per X, ovvero $t : \cos\vartheta x + \sin\vartheta y - r = 0$(†). I punti A e B sono le intersezioni di questa retta con le rette $y = 0$ ed $y = r$ rispettivamente e quindi si tratta dei punti $A = \binom{r\frac{1}{\cos\vartheta}}{0}$ e $B = \binom{r\frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}}{r}$, al variare di ϑ in $[0, \frac{\pi}{2})$.

Da quanto visto possiamo dedurre che

$$\|\overrightarrow{AD}\| = 2r\frac{1}{\cos\vartheta}, \qquad \|\overrightarrow{BC}\| = 2r\frac{1-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}, \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{r^2\text{tg}^2\vartheta + r^2} = r\frac{1}{\cos\vartheta};$$

quindi, il perimetro e l'area del trapezio sono

$$P(\vartheta) = 2r\frac{3-\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \qquad \text{e} \qquad A(\vartheta) = r^2\frac{2-\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Si tratta di funzioni continue e derivabili nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ e si ha $P'(\vartheta) = 2r\frac{3\sin\vartheta-1}{\cos^2\vartheta}$ ed $A'(\vartheta) = r^2\frac{2\sin\vartheta-1}{\cos^2\vartheta}$. Dunque $P(\vartheta)$ decresce quando $\sin\vartheta < \frac{1}{3}$ e cresce quando $\sin\vartheta > \frac{1}{3}$, per cui il perimetro è minimo quando $\vartheta = \arcsin\frac{1}{3} \in [0, \frac{\pi}{2})$ e questo valor minimo è $P_{min} = 4r\sqrt{2}$. Analogamente $A(\vartheta)$ decresce quando $\sin\vartheta < \frac{1}{2}$ e cresce quando $\sin\vartheta > \frac{1}{2}$, per cui l'area è minima quando $\vartheta = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{\pi}{2})$ e questo valor minimo è $A_{min} = r^2\sqrt{3}$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_0^3 \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}\, dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio perchè la funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $[0, 3)$ e diverge per $x \to 3^-$. Ponendo $y = \sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$, si ha $x = 3\frac{y^2-1}{y^2+1}$ e $dx = \frac{12y}{(1+y^2)^2}dy$ ed inoltre, come abbiamo già osservato, $\lim_{x\to 3^-} y(x) = +\infty$ ed $y(0) = 1$; quindi l'integrale proposto viene a coincidere con

$$12\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy.$$

(†) Se qualcuno non ama utilizzare i vettori, può ricordare che la retta in questione è la tangente alla semicirconferenza nel punto $X = \binom{r\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}$. La semicirconferenza è il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, la cui derivata prima è $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$ e la retta tangente è quindi $t : y = f'(r\cos\vartheta)(x - r\cos\vartheta) + r\sin\vartheta$. A questo punto, per trovare l'equazione di t, basta osservare che $f'(r\cos\vartheta) = \frac{-r\cos\vartheta}{\sqrt{r^2-r^2\cos^2\vartheta}} = -\frac{-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$.

Si osservi che
$$\frac{y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y^2)^2}$$
e quindi
$$\int \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy = \int \frac{1}{1+y^2} dy - \int \frac{1}{(1+y^2)^2} dy = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} y - \frac{y}{1+y^2}\right] + c.$$
Infine, osservando che
$$\lim_{y\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} y - \frac{y}{1+y^2}\right] = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ed} \qquad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$
si conclude che l'integrale improprio converge a $3(1+\frac{\pi}{2})$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale improprio*
$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^\alpha dx.$$

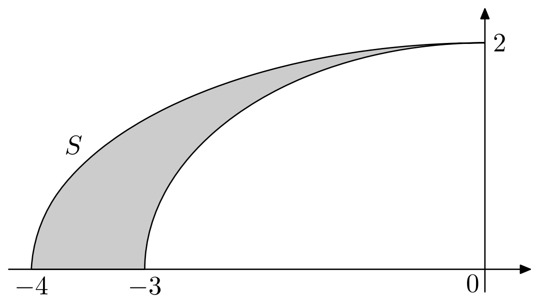
Svolgimento. Per prima cosa, osserviamo che, per una regola di de L'Hôpital, si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1.$$
Quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$
e ciò accade per $\alpha > 1$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni la superficie S, delimitata dagli assi coordinati e dai grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ e $g(x) = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ al di sopra della semiretta $(-\infty, 0]$.*

Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando S attorno all'asse delle x.

Svolgimento. La superficie S è il triangolo curvilineo nella figura qui sotto.

Il volume V del solido ottenuto per rotazione di S attorno all'asse delle x si può calcolare come differenza tra il volume del solido ottenuto ruotando il grafico di $f(x)$ su $[-4, 0]$ ed il volume del solido ottenuto ruotando il grafico di $g(x)$ su $[-3, 0]$. Dunque si ha
$$V = \pi \int_{-4}^{0} 4\left(1 - \frac{x^2}{16}\right) dx - \pi \int_{-3}^{0} 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) dx = \frac{8\pi}{3}.$$



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le rette r ed s, di equazioni*
$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.
(b) Si determini il punto X della retta s avente minima distanza da r.
(c) Scelti due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, si calcoli l'area del triangolo ABX.

Svolgimento. (a). La retta r è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; quindi non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Dunque le due rette non possono avere punti in comune e perciò sono sghembe.

(b). Il punto X è l'intersezione tra la retta s ed il piano π, passante per r e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano π ha equazione $x + 7y - 4z + 7 = 0$ e quindi

$$X : \begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 0 \\ x + 7y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} 3/11 \\ -16/11 \\ -8/11 \end{pmatrix}.$$

(c). Comunque si prendano due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, il triangolo ABX, viene ad avere base 1 ed altezza uguale alla distanza di X da r, ovvero $d(r,s) = \frac{2}{\sqrt{11}}$, quindi la sua area misura $\frac{1}{\sqrt{11}}$. □

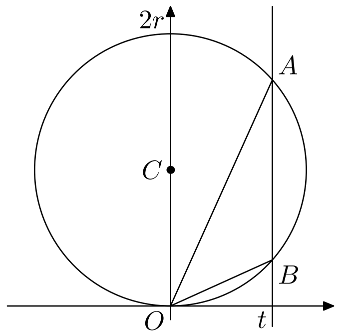
ESERCIZIO 1. *Si consideri la circonferenza di raggio r, con centro C sulla semiretta positiva dell'asse verticale e tangente all'asse orizzontale nell'origine e se ne scriva l'equazione cartesiana.*

Fissato un punto $(t, 0)$ dell'asse orizzontale, come nel disegno a fianco, si consideri la retta verticale $x = t$ e siano A e B le intersezioni di questa retta con la circonferenza.

Si determinino le coordinate dei punti A e B e la lunghezza del segmento AB in funzione dell'ascissa $t \in [-r, r]$.

Si determini l'area $A(t)$ del triangolo AOB come funzione dell'ascissa t e si studi il comportamento di questa funzione.

Se ne tracci un grafico indicativo e si determini, in particolare, il valore massimo (se esiste) dell'area del triangolo al variare di t.



Svolgimento. La circonferenza ha equazione $x^2 + (y - r)^2 = r^2$ e quindi i punti A e B sono determinati risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = t \\ x^2 + y^2 - 2ry = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad A = \begin{pmatrix} t \\ r + \sqrt{r^2 - t^2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} t \\ r - \sqrt{r^2 - t^2} \end{pmatrix},$$

ove $t \in [-r, r]$. La lunghezza del segmento AB si ottiene facendo la differenza delle ordinate dei due punti (che hanno la stessa ascissa) e quindi $|AB| = 2\sqrt{r^2 - t^2}$.

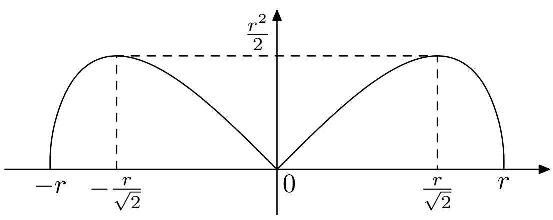
Il triangolo AOB ha come base il segmento AB e come altezza il valore assoluto dell'ascissa comune ai due punti della base e quindi la sua area è uguale ad $A(t) = |t|\sqrt{r^2 - t^2}$. Questa funzione è definita e continua in tutti i punti dell'intervallo $[-r, r]$, perchè prodotto di funzioni continue; ed è derivabile nei punti interni, con l'eccezione di $t = 0$. In particolare, si ha

$$A'(t) = \begin{cases} \dfrac{2t^2 - r^2}{\sqrt{r^2 - t^2}} & \text{per } -r < t < 0 \\[2ex] \dfrac{r^2 - 2t^2}{\sqrt{r^2 - t^2}} & \text{per } 0 < t < r \end{cases}.$$

da cui si deduce che $A(t)$ non è derivabile per $t = 0$, perchè

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{A(t)}{t} = \lim_{t \to 0^-} A'(t) = -r \neq r = \lim_{t \to 0^+} A'(t) = \lim_{t \to 0^-} \frac{A(t)}{t}.$$

Guardando al segno della derivata prima si conclude che $A(t)$ è crescente per $-r < t < -\frac{r}{\sqrt{2}}$ e per $0 < t < \frac{r}{\sqrt{2}}$, mentre $A(t)$ è decrescente per $-\frac{r}{\sqrt{2}} < t < 0$ e per $\frac{r}{\sqrt{2}} < t < r$; dunque $t = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre $t = \pm\frac{r}{\sqrt{2}}$ sono due punti di massimo relativo, dove $A(t)$ assume il suo valore massimo (assoluto) ovvero $A_{max} = A(\pm\frac{r}{\sqrt{2}}) = \frac{r^2}{2}$.



La figura qui sopra rappresenta un grafico indicativo del comportamento della funzione. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx.$$

Svolgimento. Osserviamo che si tratta di un integrale improprio perchè la funzione integranda è definita e continua nell'intervallo $[0,2)$ e diverge per $x \to 2^-$. Ponendo $y = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}$, si ha $x = 2\frac{y^2-1}{y^2+1}$ e $dx = \frac{8y}{(1+y^2)^2}dy$ ed inoltre, come abbiamo già osservato, $\lim_{x\to 2^-} y(x) = +\infty$ ed $y(0) = 1$; quindi l'integrale proposto viene a coincidere con

$$8\int_1^{+\infty} \frac{y^2}{(1+y^2)^2}\,dy.$$

Si osservi che

$$\frac{y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{(1+y^2)^2}$$

e quindi

$$\int \frac{y^2}{(1+y^2)^2}dy = \int \frac{1}{1+y^2}dy - \int \frac{1}{(1+y^2)^2}dy = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} y - \frac{y}{1+y^2}\right] + c.$$

Infine, osservando che

$$\lim_{y\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} y - \frac{y}{1+y^2}\right] = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ed} \qquad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

si conclude che l'integrale improprio converge a $2(1+\frac{\pi}{2})$. □

ESERCIZIO 3. *Siano date due semirette, r ed s, uscenti dal punto O e formanti un angolo $\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$ e si fissi su r un punto P_0, a distanza d da O. Si considerino poi il punto P_1, ottenuto intersecando con s la perpendicolare ad s uscente da P_0, il punto P_2, ottenuto intersecando con r la perpendicolare ad r uscente da P_1, il punto P_3, ottenuto intersecando con s la perpendicolare ad s uscente da P_2 e così via, come descritto nel disegno qui sotto.*

(a) Si calcolino le lunghezze dei segmenti P_0P_1, OP_1, P_1P_2 ed OP_2 in funzione dell'angolo ϑ.

(b) Si calcoli la somma

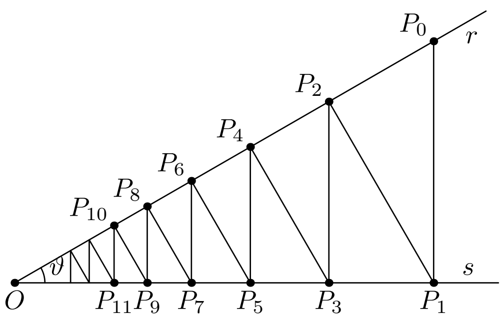
$$|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_4| + |P_4P_5|,$$

ove $|P_iP_{i+1}|$ indica la lunghezza del segmento P_iP_{i+1}.

(c) Si scriva una formula per la somma

$$s_k = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_kP_{k+1}|$$

e, nell'ipotesi che $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ (30^o), si calcoli $\lim_{k\to+\infty} s_k$.



Svolgimento. I triangoli OP_0P_1, OP_1P_2, OP_2P_3 etc. sono tutti triangoli rettangoli ed hanno in comune l'angolo ϑ quindi, applicando le relazioni elementari della trigonometria, si ha

$$|P_0P_1| = |OP_0|\sin\vartheta = d\sin\vartheta, \qquad |OP_1| = |OP_0|\cos\vartheta = d\cos\vartheta,$$
$$|P_1P_2| = |OP_1|\sin\vartheta = d\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad |OP_2| = |OP_1|\cos\vartheta = d\cos^2\vartheta.$$

Analogamente

$$|P_2P_3| = |OP_2|\sin\vartheta = d\sin\vartheta\cos^2\vartheta, \qquad |P_3P_4| = |OP_3|\sin\vartheta = d\sin\vartheta\cos^3\vartheta,$$
$$|P_4P_5| = |OP_4|\sin\vartheta = d\sin\vartheta\cos^4\vartheta,$$

e quindi

$$|P_0P_1| + |P_1P_2| + |P_2P_3| + |P_3P_4| + |P_4P_5| =$$
$$= d\sin\vartheta(1 + \cos\vartheta + \cos^2\vartheta + \cos^3\vartheta + \cos^4\vartheta) = d\sin\vartheta\frac{1-\cos^5\vartheta}{1-\cos\vartheta}.$$

Analogamente si può scrivere

$$s_k = |P_0P_1| + |P_1P_2| + \cdots + |P_kP_{k+1}| = d\sin\vartheta\frac{1-\cos^{k+1}\vartheta}{1-\cos\vartheta}.$$

Ricordando che $0 < cos\vartheta < 1$, e quindi $\lim_{k\to\infty} \cos^{k+1}\vartheta = 0$, si conclude che

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = d\sin\vartheta\frac{1}{1-\cos\vartheta} = \frac{d}{2-\sqrt{3}},$$

essendo $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

ESERCIZIO 4. *Si disegni nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x+6}{3} \le y \le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \right\}.$$

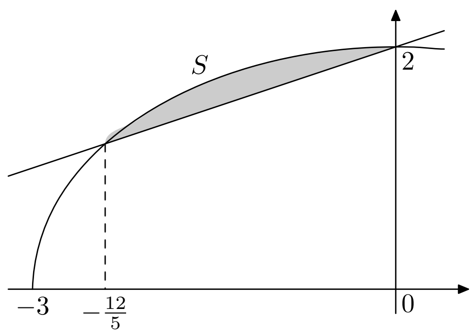
Si calcoli il volume del solido ottenuto ruotando S attorno all'asse delle x.

Svolgimento. Cominciamo col determinare l'insieme S.

Si tratta della porzione di piano racchiusa tra i grafici di due funzioni e quindi, per prima cosa, dobbiamo determinare le ascisse x per cui le due funzioni agli estremi stanno nella disuguaglianza voluta, cioè

$$\frac{x+6}{3} \le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} -3 \le x \le 3 \\ (x+6)^2 \le 4(9-x^2) \end{cases}.$$

Le disuguaglianze sono soddisfatte per $x \in [-\frac{12}{5}, 0]$ e quindi S è il sottoinsieme delimitato dai grafici delle due funzioni al di sopra di codesto intervallo ed è quindi rappresentato nel disegno qui a lato.



Il volume si può quindi calcolare come differenza dei volumi ottenuti dalla rotazione dei due grafici, ovvero

$$V = \pi\left[\int_{-12/5}^{0} 4\frac{9-x^2}{9}\,dx - \int_{-12/5}^{0} \frac{(x+6)^2}{9}\,dx\right] = \frac{32}{25}\pi.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si considerino le rette r ed s, di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = -2 \end{cases} \qquad ed \qquad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

(a) *Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza reciproca.*

(b) Si determini il punto X della retta s avente minima distanza da r.
(c) Scelti due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, si calcoli l'area del triangolo ABX.

Svolgimento. (a). La retta r è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e passa per il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; quindi non sono parallele tra loro. La loro distanza è uguale a

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{PO} \cdot (v \times w)|}{\|v \times w\|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{2}{\sqrt{11}}.$$

Dunque le due rette non possono avere punti in comune e perciò sono sghembe.

(b). Il punto X è l'intersezione tra la retta s ed il piano π, passante per r e parallelo al vettore $v \times w = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano π ha equazione $x + 7y - 4z + 8 = 0$ e quindi

$$X : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ x + 7y - 4z + 8 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad X = \begin{pmatrix} -8/11 \\ -16/11 \\ -8/11 \end{pmatrix}.$$

(c). Comunque si prendano due punti A e B sulla retta r, a distanza 1 tra loro, il triangolo ABX, viene ad avere base 1 ed altezza uguale alla distanza di X da r, ovvero $d(r,s) = \frac{2}{\sqrt{11}}$, quindi la sua area misura $\frac{1}{\sqrt{11}}$.
□