Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 26 gennaio 2000

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione* $f(x) = 2x + (2+x)\log\left|\frac{1}{x+2}\right|$.

(a) *Si determini il dominio di definizione di* f *ed il comportamento della funzione ai suoi estremi;*

(b) *si determini l'insieme dei punti su cui* f *è derivabile e si calcolino gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti;*

(c) *si determini l'insieme dei punti su cui* f *è convessa;*

(d) *si dica se* f *si estende ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale.*

Si tracci infine un grafico indicativo dell'andamento di f.

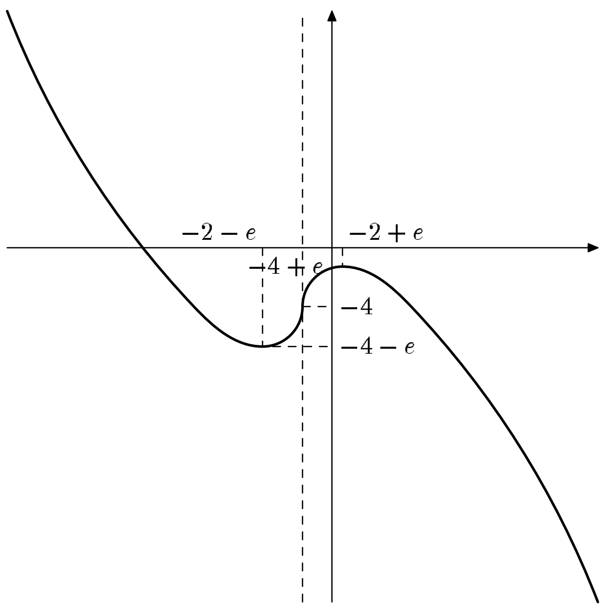
Svolgimento. (a). La funzione è definita, continua e derivabile per $x \neq -2$. Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+2)\left[\frac{2x}{x+2} - \log|x+2|\right] = +\infty$$

ed analogamente, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Inoltre,

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2} 2x - \lim_{x\to-2} \frac{\log|x+2|}{\frac{1}{x+2}} = -4,$$

come si calcola facilmente applicando la Regola di de l'Hôpital. In particolare, l'ultimo limite ci dice che f può essere estesa ad una funzione continua su tutta la retta reale ponendo $f(-2) = -4$.



(b). Per quanto riguarda la derivabilità abbiamo già detto sopra. Si ha quindi $f'(x) = 1 - \log|x+2|$ per $x \neq -2$ e inoltre, applicando la Regola di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to-2} \frac{f(x)+4}{x+2} = \lim_{x\to-2} f'(x) = +\infty$$

e quindi f non può essere estesa ad una funzione derivabile su tutta la retta. Osserviamo che si ha

$$f'(x) > 0 \iff 0 < |x+2| < e,$$

e quindi f è crescente negli intervalli $(-2-e, -2)$ e $(-2, -2+e)$, e si hanno quindi un punto di minimo relativo per $x = -2-e$ ed un punto di massimo relativo per $x = -2+e$. Visti i limiti della funzione agli estremi del dominio di definizione, non vi sono né massimo né minimo assoluti.

(c). La derivata seconda di $f(x)$ è $f''(x) = \frac{-1}{x+2}$, per $x \neq 2$; dunque f è convessa quando $f''(x) > 0$, ovvero per $x < -2$.

(d). Come abbiamo già osservato, f può essere estesa ad una funzione continua su tutta la retta reale, ma derivabile solo per $x \neq -2$. □

ESERCIZIO 2. *Per ogni intero $n \geq 2$ sia*

$$a_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(n-j)}.$$

(a) Si osservi che $\frac{1}{j(n-j)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n-j}\right)$, *e si deduca che*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(n-j)} = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

(b) Si mostri che la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$$

soddisfa alle ipotesi del Criterio di Leibniz ed è quindi convergente.

Svolgimento. (a). Dall'identità $\frac{1}{j(n-j)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{j} + \frac{1}{n-j}\right)$, si ottiene che

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(n-j)} = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{n-j}\right] = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}.$$

(b). Dobbiamo quindi mostrare che $a_{n+1} \leq a_n$ per $n = 2, 3, \dots$, e che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Per quanto riguarda la decrescenza, si osservi che

$$\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \leq \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \leq \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leq \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}$$

e l'ultima disuguaglianza è chiaramente vera se $n \geq 2$.

Infine, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}{n} = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n + o(\log n)}{n} = 0.$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}-5}{x^2-\sqrt{x}}dx$.

Svolgimento. Tramite il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ (e quindi $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$), possiamo ridurci a calcolare $2\int \frac{2y-5}{y^3-1}dy$. Osservando che $\frac{2y-5}{y^3-1} = \frac{1}{1-y} + \frac{y+4}{y^2+y+1}$, ed utilizzando i soliti procedimenti di integrazione delle funzioni razionali fratte, si ottiene che una primitiva della funzione integranda è

$$g(x) = \log\frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)^2} + \frac{14}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Da ciò si conclude che

$$\int_2^{+\infty} \frac{2\sqrt{x}-5}{x^2-\sqrt{x}}dx = \lim_{b\to+\infty}[g(b) - g(2)] = \frac{7\pi}{\sqrt{3}} - \log\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} - \frac{14}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 4. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (3-\lambda)^3$ e quindi l'unico autovalore di ϕ è 3 ed ha molteplicità 3. Il sottospazio di autovettori di 3 è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e perciò ϕ non è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 5. *Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} \lambda x & + & \lambda y & + & (\lambda-2)z & = & 1 \\ \lambda^2 x & + & 4y & + & (4-2\lambda)z & = & 2 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-2 & 1 \\ 0 & 4-\lambda^2 & 4-\lambda^2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{2, -2\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e, per ogni valore di λ, il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{-\lambda}{\lambda+2} + 2t + 1\right), \qquad y = \frac{1}{2+\lambda} - t, \qquad z = t \qquad (-2 \neq \lambda \neq 2,\ t \in \mathbb{R}).$$

Per $\lambda = 2$, matrice completa ed incompleta hanno rango 1 e il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri $\begin{cases} x & = & \frac{1}{2} - \tau \\ y & = & \tau \\ z & = & t \end{cases}$. Per $\lambda = -2$, la matrice completa ha rango 2, mentre quella incompleta ha rango 1 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 16 febbraio 2000

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione* $f(x) = \operatorname{arctg}(\log|x| - 1)$.

(a) *Si determini il dominio di definizione di* f *ed il comportamento della funzione ai suoi estremi;*
(b) *si determini l'insieme dei punti su cui* f *è derivabile e gli eventuali sottoinsiemi su cui* f *è decrescente;*
(c) *si determini la derivata seconda di* f *e l'insieme dei punti su cui* f *è concava;*
(d) *si dica se* f *si estende ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale.*

Si tracci infine un grafico indicativo dell'andamento di f.

Svolgimento. (a). La funzione è definita, continua e derivabile in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ perchè composizione di funzioni derivabili in D. Inoltre $f(-x) = f(x)$ e quindi il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse verticale. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to-\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2}.$$

In particolare, l'ultimo limite ci dice che f può essere estesa ad una funzione continua su tutta la retta reale ponendo $f(0) = -\frac{\pi}{2}$.

(b). Abbiamo già osservato che f è derivabile in D e, ricordando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$f'(x) = \frac{1/x}{1 + (\log|x| - 1)^2} \qquad \text{per ogni } x \in D.$$

Inoltre, applicando ripetutamente la Regola di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + \frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1/x}{2(\log|x| - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x^2}{1/x} = \infty$$

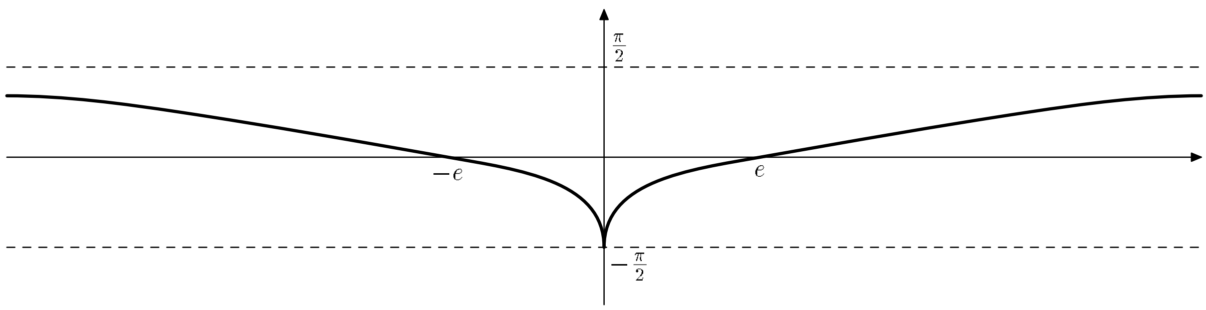
e quindi f non può essere estesa ad una funzione derivabile su tutta la retta. Osserviamo che il segno di $f'(x)$ è concorde con il segno di x e quindi f è decrescente sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e crescente sulla semiretta $(0, +\infty)$. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo (relativo ed assoluto) per la funzione estesa, mentre f non ha né massimo né minimo.

(c). La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = -\frac{(\log|x|)^2}{x^2\left[(\log|x| - 1)^2 + 1\right]^2} \qquad \text{per ogni } x \in D;$$

dunque f è concava su entrambo le semirette $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$, perchè $f''(x) \le 0$ in ogni punto di D.

(d). Come abbiamo già osservato, f può essere estesa ad una funzione continua su tutta la retta reale, ma derivabile solo per $x \neq 0$.



Qui sopra abbiamo tracciato un grafico approssimativo dell'andamento di $f(x)$. □

ESERCIZIO 2. *Sia fissato un intero $n \geq 3$ e si consideri il numero complesso*

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

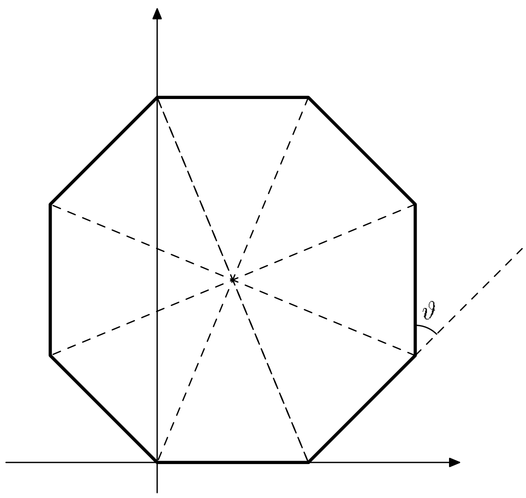
(a) *Si mostri che $\zeta^n = 1$ e quindi che $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.*
(b) *Si consideri il poligono di vertici $z_0 = 1, z_1 = 1+\zeta, z_2 = 1+\zeta+\zeta^2, \dots, z_{n-1} = 1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}$, e si mostri che si tratta di un poligono regolare di n lati. In particolare, per $n = 8$, si disegni tale poligono nel piano di Argand-Gauss.*
(c) *Si mostri che il perimetro del poligono del punto (b) è uguale ad n e che la sua area è uguale a $\frac{n}{4\,\mathrm{tg}(\pi/n)}$.*

Svolgimento. (a). Si osservi che ζ è un numero complesso di modulo 1, scritto in forma trigonometrica e, in base alle Formule di de Moivre, si ha $\zeta^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ per ogni intero positivo k. In particolare, per $k = n$ si ottiene $\zeta^n = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$.

Inoltre, essendo $1 - \zeta \neq 0$ e

$$(1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1})(1-\zeta) = 1 - \zeta^n = 0,$$

si conclude che $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.

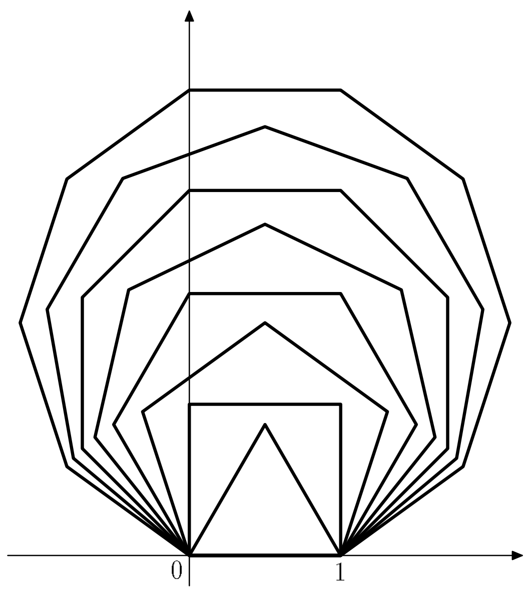


(b). Per $k = 1, \dots, n-1$ i lati del poligono in questione coincidono coi vettori $z_k - z_{k-1} = \zeta^k$ che hanno lunghezza $|\zeta|^k = 1$. Inoltre, $z_0 - z_{n-1} = 1 - 0 = 1$, e quindi tutti gli n lati del poligono hanno la stessa lunghezza. Resta quindi da verificare che anche gli angoli tra due lati consecutivi sono uguali tra loro; e per fare ciò è sufficiente calcolare il prodotto scalare tra i vettori (di lunghezza 1) corrispondenti a due lati consecutivi, ovvero, con una facile applicazione delle formule di addizione per il coseno, si ottiene

$$\langle\zeta^k, \zeta^{k+1}\rangle = \cos\tfrac{2k\pi}{n}\cos\tfrac{2(k+1)\pi}{n} + \\ + \sin\tfrac{2k\pi}{n}\sin\tfrac{2(k+1)\pi}{n} = \cos\tfrac{2\pi}{n};$$

da cui si conclude che l'angolo tra due lati consecutivi è uguale a $\vartheta = \frac{2\pi}{n}$.

Qui a fianco abbiamo disegnato il poligono richiesto e, più sotto, i vari poligoni che si ottengono per $n = 3, \dots, 10$.



(c). Da quanto abbiamo visto nel punto precedente, ogni lato del poligono ha lunghezza 1 e quindi il perimetro è lungo n. Per calcolare l'area possiamo ragionare come segue: il poligono si decompone in n triangoli isosceli, tra loro congruenti, aventi come base i lati del poligono e come vertice il centro della circonferenza circoscritta; dunque è sufficiente determinare l'area di un tale triangolo e moltiplicarla per il numero dei lati.

Il triangolo in questione ha l'angolo al vertice uguale a $2\pi/n$ e la base di lunghezza 1, quindi la sua altezza è uguale a $\dfrac{1}{2\,\mathrm{tg}(\pi/n)}$ e la sua area è quindi $\dfrac{1}{4\,\mathrm{tg}(\pi/n)}$. Poichè il poligono si decompone in n di questi triangoli, si ottiene la formula voluta. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\displaystyle\int_{e^3}^{+\infty} \frac{6\log x + 12}{x(\log x)^3 - 8x} dx$.

Svolgimento. Per prima cosa cerchiamo di determinare una primitiva della funzione integranda. Posto $y = \log x$, si ha $dy = \dfrac{dx}{x}$, e quindi l'integrale proposto diventa

$$\int_3^{+\infty} \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy.$$

Si ha

$$\frac{6y+12}{y^3-8} = \frac{2}{y-2} - \frac{2y+2}{y^2+2y+4}, \qquad \text{e quindi} \qquad \int \frac{6y+12}{y^3-8} dy = \log \frac{(y-2)^2}{y^2+2y+4} + c.$$

Da ciò si deduce che

$$\int_3^{+\infty} \frac{6y+12}{y^3-8} dy = \lim_{b \to +\infty} \log \frac{(b-2)^2}{b^2+2b+4} - \log \frac{1}{19} = \log 19$$

e quindi l'integrale proposto è uguale a $\log 19$. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri le retta* $r : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}$

(a) *Determinare i piani* π_1 *e* π_2 *contenenti* r *e, rispettivamente, i punti* $P_1(0,0,1)$ *e* $P_2(1,0,0)$.
(b) *Trovare la proiezione* Q *di* P_1 *su* r.
(c) *Trovare i punti* R *di* r *tali che la piramide di vertici* P_1, P_2, Q, R *abbia volume* $\frac{4}{3}$.

Svolgimento. (a). La retta r ha equazione cartesiana $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ ed l fascio di piani passanti per r ha equazione $\lambda(x + y - 2) + \mu(z - 1) = 0$. Dalle condizioni di passaggio per P_1 e P_2 otteniamo i piani $\pi_1 : z - 1 = 0$ e $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$.

(b). La proiezione Q di P_1 su r si trova intersecando r con il piano per P_1 e ad essa perpendicolare. Tale piano ha equazione $x - y = 0$. Sostituendo ad x e y i corrispondenti valori nelle equazioni parametriche di r ricaviamo $t = -2$ e quindi la proiezione di P_1 sarà $Q(1,1,1)$.

(c). Il punto generico R di r ha coordinate $(3+t, -1-t, 1)$. Il volume V del tetraedro di vertici P_1, P_2, Q e R è un sesto del volume del parallelepipedo di spigoli P_1R, P_1P_2 e P_1Q e quindi

$$V = \frac{1}{6} \left| \left\langle \overrightarrow{P_1R}, \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1Q} \right\rangle \right| = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 3+t & -1-t & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2t + 4|$$

Poiché il volume deve essere uguale a $\frac{4}{3}$, otteniamo $t = 2$ e $t = -6$ e i punti cercati sono $R_1(5, -3.1)$ e $R_2(-3, 5, 1)$. □

ESERCIZIO 5. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo* ϕ *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ *è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3$ e quindi l'unico autovalore è 2, con molteplicità 3. Il sottospazio di autovettori è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Poiché il sottospazio generato dagli autovettori ha dimensione 2, ϕ non è diagonalizzabile. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 15 giugno 2000

ESERCIZIO 1. *Sia fissato un numero reale $x_0 > 0$ e si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} a_0 = x_0 \\ a_{n+1} = \operatorname{arctg}(a_n) \end{cases}.$$

(a) Si mostri, studiando la funzione $f(x) = x - \operatorname{arctg}(x)$, che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente qualunque sia il numero reale $x_0 > 0$.

(b) Si mostri che, qualunque sia il numero reale $x_0 > 0$, tutti i termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono positivi e si concluda che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Si calcoli quindi $\lim_{n\to\infty} a_n$ al variare di x_0 tra i numeri reali positivi.

Svolgimento. La funzione $\operatorname{arctg} x$ è positiva sulla semiretta $(0, +\infty)$ e quindi, qualunque sia il termine iniziale $x_0 > 0$, tutti i termini della successione a_n sono positivi. Inoltre, la successione è decrescente se, per ogni n, $a_n \geq a_{n+1} = \operatorname{arctg} a_n$, ovvero se la funzione $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ assume valori positivi per $x \in (0, +\infty)$. Si osservi che $f(0) = 0$ e che $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ e quindi la funzione $f(x)$ è strettamente crescente e perciò assume valori positivi sulla semiretta $(0, +\infty)$.

Dunque la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente ed inferiormente limitata e perciò convergente. Detto $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$, in base alla definizione ricorsiva, deve aversi $\ell = \operatorname{arctg} \ell$ e quindi $\ell = 0$, perchè, per $x > 0$, si ha $x - \operatorname{arctg} x = f(x) > 0$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$$

al variare di α nell'intervallo chiuso $[0, \pi]$.

Svolgimento. Se $\sin\alpha = 0$ allora il limite in questione coincide con $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$. Sia quindi $0 < \alpha < \pi$, e si osservi che, qualunque sia l'esponente n, si ha

$$\left(\sin\alpha + \frac{1}{n}\right)^n = (\sin\alpha)^n \left(1 + \frac{1/\sin\alpha}{n}\right)^n.$$

Qualunque sia $\alpha \in (0, \pi)$, si ha $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1/\sin\alpha}{n}\right)^n = e^{1/\sin\alpha}$ e inoltre, se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, allora $0 < \sin\alpha < 1$ e quindi $\lim_{n\to\infty} (\sin\alpha)^n = 0$. Da ciò si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\alpha + \frac{1}{n}\right)^n = 0 \qquad \text{per } \alpha \neq \frac{\pi}{2}.$$

Infine, per $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha = 1$ ed il limite in questione viene a coincidere con

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sinh x}{(e^x + 3e^{-x})^2} dx$.

Svolgimento. Ricordando che $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e tramite il cambiamento di variabile $y = e^x$ (e quindi $dy = e^x dx$) l'integrale proposto coincide con $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y^2-1}{(y^2+3)^2} dy$.

Determiniamo quindi una primitiva della funzione integranda, ricordando che si ha

$$\frac{y^2-1}{(y^2+3)^2} = \frac{1}{y^2+3} - \frac{4}{(y^2+3)^2}.$$

Poichè

$$\int \frac{1}{y^2+3} dy = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + c$$

ed

$$\int \frac{4}{(y^2+3)^2} dy = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int \frac{1}{\left((y/\sqrt{3})^2+1\right)^2} \frac{dy}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + \frac{y\sqrt{3}}{y^2+3}\right) + c,$$

si conclude che l'integrale proposto coincide con

$$\lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2y\sqrt{3}}{y^2+3}\right)\right]_0^b = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

□

ESERCIZIO 4. *Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & + & (2\lambda-1)y & = & 3\lambda^2+\lambda-3 \\ & & (\lambda-1)y & = & \lambda-1 \\ x & + & \lambda y & = & 2\lambda^2-1 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema lineare è equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda-1 & 3\lambda^2+\lambda-3 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda \notin \{-1, 1\}$, la matrice completa ed incompleta hanno rispettivamente rango 3 e 2 e quindi il sistema non ha soluzioni.

Per $\lambda = 1$, matrice completa e incompleta hanno rango 1 ed il sistema lineare è equivalente all'equazione $x + y = 1$ che ha infinite soluzioni della forma $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Per $\lambda = -1$ matrice completa e incompleta hanno rango 2 e quindi il sistema ha l'unica soluzione $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$. □

ESERCIZIO 5. *Siano date le rette*

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1+\tau \\ y = 5+\tau \\ z = -1 \end{cases},$$

(a) *Determinare il segmento PQ, perpendicolare ad r e ad s, con $P \in r$ e $Q \in s$.*
(b) *Determinare l'equazione del piano π parallelo ad r e ad s ed equidistante dalle due rette.*
(c) *Trovare le equazioni delle proiezioni ortogonali r' e s' di r e s su π.*

Svolgimento. (a). Le coordinate di P e Q sono del tipo $(1+2t, -2+t, 4-t)$ e $(1+\tau, 5+\tau, -1)$. Detti $\overrightarrow{v_r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{v_s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i vettori paralleli rispettivamente a r e ad s, il vettore $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 2t-\tau \\ -7+t-\tau \\ 5-t \end{pmatrix}$ dovrà verificare la condizione, di perpendicolarità a $\overrightarrow{v_r}$ e $\overrightarrow{v_s}$, $\langle \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{QP} \rangle = \langle \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{QP} \rangle = 0$. Tali equazioni sono verificate per $t = 1$ e $\tau = -2$, che sostituiti nelle equazioni parametriche danno $P(3, -1, 3)$ e $Q(-1, 3, -1)$.

(b). Il piano π è ortogonale a $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi ha equazione del tipo $x - y + z + d = 0$. Affinché π sia equidistante da r e s, deve contenere il punto medio $M(1,1,1)$ del segmento PQ e quindi $d = -1$ e l'equazione di π è $x - y + z - 1 = 0$.

(c). Le rette r' e s' sono parallele rispettivamente a r e s e passano per il punto M. Abbiamo quindi

$$r' : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s' : \begin{cases} x = 1 + \tau \\ y = 1 + \tau \\ z = 1 \end{cases},$$

□

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

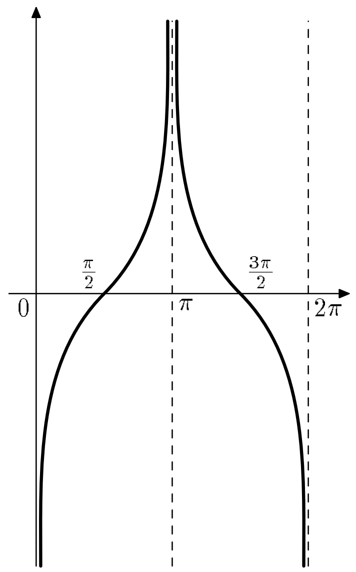
prova scritta del 4 luglio 2000

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

al variare di x in $[0, 2\pi]$ e se ne tracci un grafico indicativo.
*(**NB:** È richiesto lo studio della concavità e della convessità del grafico.)*

Svolgimento. La funzione $f(x)$ è definita quando l'argomento della radice è un numero reale positivo e ciò accade per $x \in D = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$. Nei punti di D, f è continua e derivabile.



Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 2\pi^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pi} f(x) = +\infty$$

perchè nei primi due casi l'argomento della radice tende a zero, mentre nell'ultimo lo stesso argomento tende ad infinito da valori positivi.

Applicando il teorema di derivazione delle funzioni composte, si ricava che

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{\sin x}$$

per ogni $x \in D$. Quindi, $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(0, \pi)$ e decrescente nell'intervallo $(\pi, 2\pi)$, per cui non ha massimi o minimi, né locali, né globali.

La derivata seconda di $f(x)$ è $f''(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ per ogni $x \in D$, quindi il grafico di f è concavo sugli intervalli $(0, \frac{\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, mentre è convesso nelle restanti parti di D. I due punti $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ed $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ sono punti di flesso per il grafico.

L'andamento di $f(x)$ è quindi descritto dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli* $\lim_{x\to-\infty} 12x^6 \left[\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \cos\frac{1}{x} - \frac{\sin(1/x)}{x} + 1 + \frac{1}{8x^4}\right]$.

Svolgimento. Osserviamo che si tratta di una forma indeterminata del tipo "$0 \cdot \infty$". Inoltre, per $x \to -\infty$, si ha che $\frac{1}{x}$ ed $\frac{1}{x^2}$ tendono entrambo a zero e quindi possiamo considerare gli sviluppi asintotici delle funzioni coinvolte nel limite e scrivere che, per $x \to -\infty$, si ha

$$\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{6x^6} + o(x^{-6}),$$
$$\cos\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4!x^4} - \frac{1}{6!x^6} + o(x^{-6}),$$
$$\frac{\sin(1/x)}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3!x^4} + \frac{1}{5!x^6} + o(x^{-6}).$$

Dunque il limite proposto è uguale a

$$\lim_{x\to-\infty} 12x^6 \left[\frac{115}{720x^6} + o(x^{-6})\right] = \frac{23}{12}$$

$\square$

ESERCIZIO 3. *Si consideri nel piano cartesiano il sottoinsieme*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\sqrt{|x^2 - 1|} \right\}$$

e si calcoli il volume del solido che si ottiene dalla rotazione di D *attorno all'asse delle ascisse.*

Svolgimento. L'insieme D è il sotto grafico della funzione $g(x) = e^{-x}\sqrt{|x^2 - 1|}$ sull'intervallo $[0, 2]$, dunque, il volume del solido di rotazione è uguale a

$$V = \pi \int_0^2 e^{-2x}|1 - x^2|dx = \pi \left(\int_0^1 e^{-2x}(1 - x^2)dx + \int_1^2 e^{-2x}(x^2 - 1)dx \right).$$

Applicando ripetutamente la formula di integrazione per parti, si ottiene che

$$\int e^{-2x}(1 - x^2)dx = \frac{e^{-2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1) + c,$$

e quindi

$$V = \pi \left[\frac{e^{-2x}}{4}(2x^2 + 2x - 1) \right]_{x=0}^{x=1} + \pi \left[\frac{e^{-2x}}{4}(1 - 2x - 2x^2) \right]_{x=1}^{x=2} = \pi \frac{e^4 + 6e^2 - 11}{4e^4}$$

e ciò conclude il calcolo. $\square$

ESERCIZIO 4. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo* ϕ *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Concludere che ϕ *è diagonalizzabile ed esprimere il vettore* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *come combinazione lineare di autovettori.*

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$ e quindi gli autovalori di ϕ sono 2, 1, e -2, ciascuno con molteplicità 1. Poiché ϕ ha tre autovalori distinti, possiamo concludere che è diagonalizzabile. I relativi sottospazi sono, rispettivamente, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, ed abbiamo $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\square$

ESERCIZIO 5. *Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2\lambda y = 2 + \lambda \\ (\lambda - 1)x + \lambda y + \lambda z = 2 \\ \lambda y - \lambda z = \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro λ *in* $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2\lambda & 0 & 2 + \lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi per nessun valore di λ il sistema ha un'unica soluzione.

Per $\lambda \notin \{0, 1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e, per tali valori di λ, il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

$$x = \frac{2 - \lambda - 2\lambda t}{\lambda - 1}, \qquad y = 1 + t, \qquad z = t \qquad (0 \neq \lambda \neq 1,\ t \in \mathbb{R})$$

Per $\lambda = 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 1 e il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da due parametri

$$x = -2, \qquad y = \tau, \qquad z = t \qquad (t, \tau \in \mathbb{R})$$

Per $\lambda = 1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e quindi il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro

$$x = t, \qquad y = \frac{3}{2}, \qquad z = \frac{1}{2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 31 agosto 2000

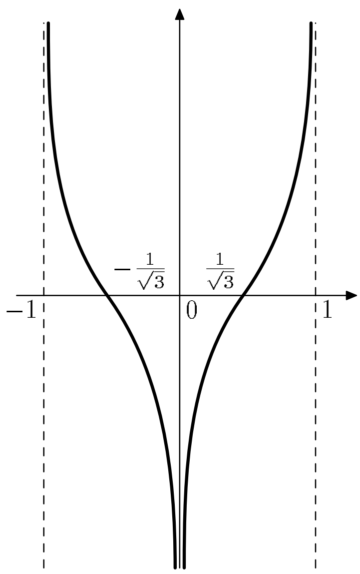
ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{2x^2}{1-x^2}}$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

*(**NB:** È richiesto lo studio della concavità e della convessità del grafico.)*

Svolgimento. La funzione è definita quando l'argomento della radice quadrata è un numero strettamente positivo e ciò accade se, e solo se, il numeratore non si annulla ed il denominatore è positivo. Dunque f è definita nell'insieme $D = (-1,0) \cup (0,1)$. Inoltre, f è una funzione pari, ovvero $f(-x) = f(x)$, e quindi possiamo limitarci allo studio di f sull'intervallo $(0,1)$ ed estendere i risultati a tutto D per simmetria rispetto all'asse delle ordinate. Si ha



$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to 0^+} \log t = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{t\to +\infty} \log t = +\infty.$$

Applicando ripetutamente la regola di derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x^2)} \quad \text{per } x \in D;$$

e quindi f è crescente in $(0,1)$. Infine,

$$f''(x) = \frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2} \quad \text{per } x \in D;$$

e quindi il grafico di f è concavo per $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, e convesso per $x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$. Per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, il grafico attraversa l'asse delle ascisse e si ha un punto di flesso (con tangente obliqua).

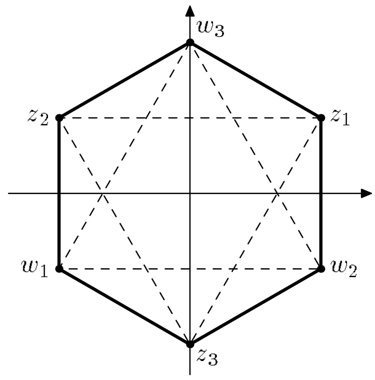
L'andamento di $f(x)$ è quindi descritto dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß i punti z_1, z_2, z_3, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $z^3 - 8i = 0$. Siano w_1, w_2, w_3, i punti simmetrici rispetto all'origine dei tre punti dati e si scriva l'equazione di cui w_1, w_2, w_3 sono le soluzioni. Si determini infine l'area del poligono convesso avente i sei punti come vertici.*

Svolgimento. Dobbiamo determinare le radici cubiche del numero complesso $8i$.

Scritto in forma trigonometrica, si tratta del numero $8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ e quindi, applicando le Formule di de Moivre, si ottiene che le sue radici cubiche sono

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i, \\ z_3 &= 2(\cos\tfrac{9\pi}{6} + i\sin\tfrac{9\pi}{6}) = -2i. \end{aligned}$$



Due punti del piano di Gauß sono simmetrici rispetto all'origine se, e solo se, rappresentano numeri complessi opposti e quindi i tre punti w_1, w_2, w_3 sono

$$w_1 = -z_1 = -\sqrt{3} - i, \quad w_2 = -z_2 = \sqrt{3} - i, \quad w_2 = -z_3 = 2i;$$

ed i tre punti sono quindi le soluzioni dell'equazione $z^3 + 8i = 0$.

Il poligono convesso avente i sei punti come vertici è un esagono regolare, inscritto nella circonferenza di centro nell'origine e raggio $|z_1| = 2$ (si veda la figura qui sopra). Dunque la sua area A è sei volte l'area del triangolo di vertici 0, z_1, w_2, (triangolo equilatero di lato 2) cioè $A = 6\sqrt{3}$. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\displaystyle\int_{1000}^{+\infty} \frac{6\log_{10} x + 12}{x(\log_{10} x)^3 - 8x} dx.$

Svolgimento. Per prima cosa cerchiamo di determinare una primitiva della funzione integranda. Posto $y = \log_{10} x = (\log_{10} e)(\log x)$, si ha $dy = \log_{10} e \dfrac{dx}{x}$, e quindi l'integrale proposto diventa

$$\log 10 \int_3^{+\infty} \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy.$$

Si ha

$$\frac{6y + 12}{y^3 - 8} = \frac{2}{y - 2} - \frac{2y + 2}{y^2 + 2y + 4}, \qquad \text{e quindi} \qquad \int \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy = \log\frac{(y - 2)^2}{y^2 + 2y + 4} + c.$$

Da ciò si deduce che

$$\int_3^{+\infty} \frac{6y + 12}{y^3 - 8} dy = \lim_{b \to +\infty} \log\frac{(b - 2)^2}{b^2 + 2b + 4} - \log\frac{1}{19} = \log 19$$

e quindi l'integrale proposto è uguale a $\log 10 \log 19 = \frac{\log_{10} 19}{(\log_{10} e)^2}$. □

ESERCIZIO 4. *Siano r_1 e r_2 le rette passanti, rispettivamente, per i punti $P_1(3, 0, 2)$ e $P_2(0, -1, 5)$, e parallele, rispettivamente, ai vettori* $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) *Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e trovare il punto P di intersezione.*
(b) *Scrivere l'equazione della retta s passante per P e perpendicolare al piano contenente r_1 e r_2.*
(c) *Trovare i punti Q_1 e Q_2 di s tali che la piramide di vertici P_1, P_2, P, Q abbia volume 7.*

Svolgimento. (a) Le retta r_1 e r_2 hanno equazioni parametriche $r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = \tau \\ y = -1 + \tau \\ z = 5 - 2\tau \end{cases}$. Per $t = -1$ e $\tau = 2$ otteniamo in entramble le equazioni il punto $P(2, 1, 1)$ che è quindi il punto di intersezione tra le due rette. (*b*) La retta s è perpendicolare a r_1 e a r_2 e quindi è parallela al vettore $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Poiché s passa per P, le sue equazioni parametriche sono quindi $\begin{cases} x = 2 + \theta \\ y = 1 + 3\theta \\ z = 1 + 2\theta \end{cases}$. (*c*) Il punto generico Q di s ha coordinate $(2+\theta, 1+3\theta, 1+2\theta)$. Il volume V del tetraedro di vertici P_1, P_2, P e Q è

$$V = \frac{1}{6}\left|\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PP_1} \times \overrightarrow{PP_2} \right\rangle\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 2+\theta & 1+3\theta & 1+2\theta \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}|-14-28\theta|$$

Posto $V = 7$, otteniamo $\theta = 1$ e $\theta = -2$, e i punti cercati sono $Q_1(3,4,3)$ e $Q_2(0,-5,-3)$. □

ESERCIZIO 5. *Dopo aver verificato che* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ *è autovettore dell'endomorfismo* ϕ *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

nella base canonica, determinare gli autovalori di ϕ *e dire se tale endomorfismo è diagonalizzabile.*

Svolgimento. Risulta $A\mathbf{v} = -4\mathbf{v}$ e quindi $\mathbf{v}$ è autovettore di ϕ con autovalore -4. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 10\lambda + 8$. Dividendo questo polinomio per $(\lambda + 4)$, otteniamo $-\lambda^2 + 2\lambda + 2$, e quindi gli altri autovalori di ϕ sono $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$. Avento tre autovalori distinti, l'endomorfismo ϕ è diagonalizzabile. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 15 settembre 2000

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{2x-4}}}{x-2}$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

Svolgimento. La funzione è definita quando il denominatore (della frazione e dell'esponente) non si annulla, ovvero in $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Si ha

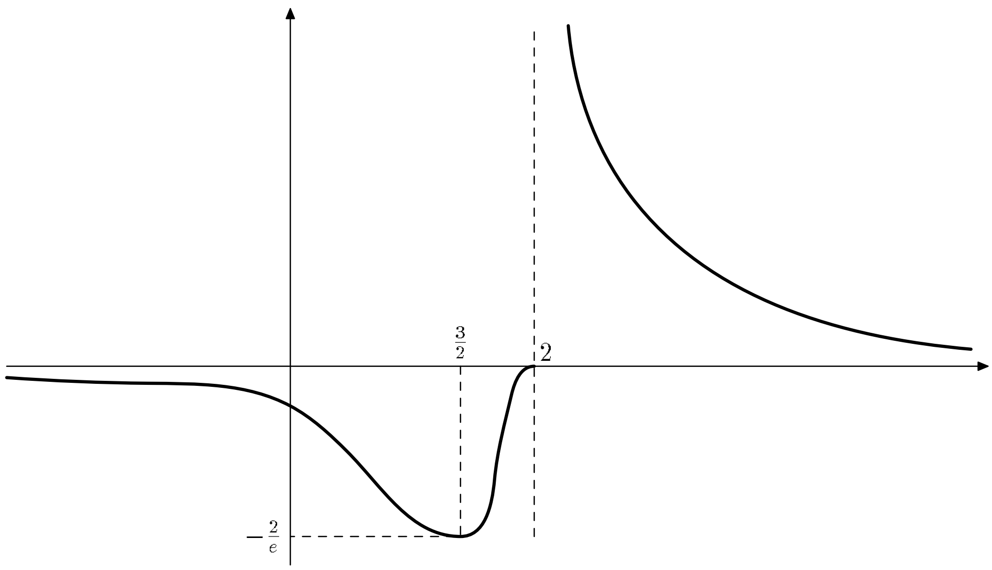
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{t\to-\infty} 2te^t = 0^-,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+;$$

ove tutti i limiti si calcolano immediatamente, eccetto il secondo, ove si è applicata la sostituzione $t = \frac{1}{2x-4}$.

La derivata prima di f è uguale ad

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{2x-4}}}{2(x-2)^2} \cdot \frac{2x-3}{x-2} \quad \text{per } x \in D.$$

Quindi f è crescente in $(\frac{3}{2}, 2)$ e decrescente in $(-\infty, \frac{3}{2})$ ed in$(2, +\infty)$. In particolare $x = \frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo (ed assoluto) ed $f(\frac{3}{2}) = -\frac{2}{e}$, mentre non vi sono punti di massimo né relativo, né assoluto.



Perciò, l'andamento di $f(x)$ è descritto approssimativamente dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni nel piano di Argand-Gauß l'insieme S dei numeri complessi soddisfacenti alla condizione*

$$\left|\frac{2-\overline{z}}{2z+3i}\right| > 1$$

e si dica per quali valori di m la retta $Imz = m(Rez)$ interseca S.

Svolgimento. Sia $z = x + iy$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $z \neq -\frac{3i}{2}$, la disuguaglianza proposta è equivalente alla disuguaglianza

$$|2-\overline{z}| > |2z+3i| \qquad \text{ovvero} \qquad x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + 4y + \frac{5}{3} < 0.$$

Dunque S è formato da tutti i punti interni alla circonferenza di centro $C = (-\frac{2}{3}, -2)$ e raggio $\frac{5}{3}$, escluso $(0, -\frac{3}{2})$.

La retta $y = mx$ interseca S se, e solo se, interseca la circonferenza che lo delimita in due punti distinti, ovvero se, e solo se, il sistema

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x + 4y + \frac{5}{3} = 0 \end{cases}$$

ha due soluzioni reali distinte. Ciò significa che l'equazione

$$3(1+m^2)x^2 + 4(1+3m)x + 5 = 0$$

deve avere il discriminante positivo, ovvero deve aversi: $4(1+3m)^2 - 15(1+m^2) > 0$. Ciò accade se $m < -\frac{12+5\sqrt{15}}{21}$ oppure se $m > \frac{5\sqrt{15}-12}{21}$. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3 - 3n^2 + 2n}$.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $n \geq 3$, si ha $\dfrac{3n-2}{n^3-3n^2+2n} = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1} + \dfrac{2}{n-2}$. Quindi la somma parziale di ordine k della serie è

$$s_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{3n-2}{n^3-3n^2+2n} = \frac{5}{2} - \frac{1}{k} - \frac{2}{k-1};$$

perchè i termini intermedi si cancellano. Si conclude così che la somma della serie è uguale a $\lim_{k\to\infty} s_k = \dfrac{5}{2}$. □

ESERCIZIO 4. *Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda-1)y = 5 \\ \lambda x + 2\lambda z = 3 + 2\lambda \\ (\lambda-1)y + 2\lambda z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa del sistema lineare è equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda-1 & 0 & 5 \\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda & -2+2\lambda \\ 0 & 0 & 4\lambda & 4\lambda \end{pmatrix}$$

Per $\lambda \notin \{0,1\}$, la matrice completa ed incompleta hanno entrambe rango 3 e quindi il sistema ha un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{3}{\lambda}, \qquad y = \frac{2}{\lambda-1}, \qquad z = 1 \qquad (\lambda \notin \{0,1\}).$$

Per $\lambda = 1$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta hao rango 2 e quindi non ci sono soluzioni.

Per $\lambda = 0$, la matrice completa ha rango 2, mentre quella incompleta ha rango 1 e quindi non ci sono soluzioni. □

ESERCIZIO 5. *Siano date le rette*

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -4 + \tau \\ y = \tau \\ z = -2 - \tau \end{cases},$$

(a) Verificare che r_1 e r_2 non sono incidenti.
(b) Determinare l'equazione del piano π parallelo a r_1 e r_2, ed equidistante dalle due rette.
(c) Determinare la retta s passante per l'origine ed incidente a r_1 e r_2, ed i punti P_1 e P_2 di intersezione di s con r_1 e r_2.

Svolgimento. (a). Dalle uguaglianze $-1+t = -4+\tau$ e $1-t = \tau$ otteniamo $\tau = 2$ e $t = -1$ che non verificano l'uguaglianza $t = -2-\tau$.

(b). Un vettore perpendicolare a π può essere determinato moltiplicando vettorialmente un vettore perpendicolare a r_1 con un vettore perpendicolare a r_2: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Quindi l'equazione di π ha la forma $y + z + d = 0$. Poiché π è parallelo a r_1 e r_2, la condizione di equidistanza da r_1 e r_2 equivale alla condizione di equidistanza di π da due punti arbitrari di r_1 e r_2, per esempio $(-1,1,0)$ e $(-4,0,-2)$:

$$\frac{|-1+d|}{\sqrt{2}} = \frac{|-2+d|}{\sqrt{2}}$$

Il piano π ha quindi equazione $y + z + \frac{1}{2} = 0$.

(c). La retta s è l'intersezione dei piani π_1 e π_2 contenenti rispettivamente r_1 e r_2 e passanti per l'origine. Si può trovare s anche determinando prima i punti P_1 e P_2. Detti $Q_1(-1+t, 1-t, t)$ e $Q_2(-4+\tau, \tau, -2-\tau)$ i punti generici di r_1 e r_2, i punti P_1 e P_2 corrispondono ai valori di t e τ che rendono i vettori $\overrightarrow{OQ_1}$ e $\overrightarrow{OQ_2}$ paralleli, cioè proporzionali. Il sistema $\begin{cases} -1+t = \lambda(-4+\tau) \\ 1-t = \lambda\tau \\ t = \lambda(-2-\tau) \end{cases}$ ha soluzione $\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ t = 2 \\ \tau = 2 \end{cases}$ e quindi P_1 e P_2 hanno rispettivamente coordinate $(1,-1,2)$ e $(-2,2,-4)$. La retta s ha quindi equazione $\begin{cases} x = -3t \\ y = 3t \\ z = -6t \end{cases}$.

$\square$