Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 5 febbraio 2001

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \left|\frac{\cosh x}{e^x - 2}\right|$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

Svolgimento. La funzione è definita quando il denominatore non si annulla, ovvero in $D = (-\infty, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$; inoltre, l'argomento del valore assoluto cambia di segno passando dall'una all'altra delle due semirette che compongono D. Ricordando che $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, con facili passaggi, si vede che $f(x)$ è composizione di due funzioni continue e derivabili nei rispettivi insiemi di definizione; precisamente, posto

$$g(y) = \left|\frac{y^2+1}{2y(y-2)}\right| \qquad \text{ed} \qquad h(x) = e^x, \qquad \text{si ha } f(x) = g(h(x)).$$

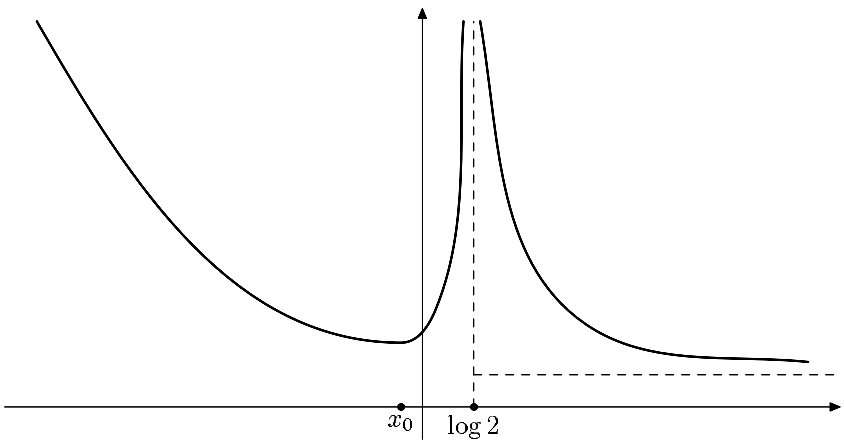
Utilizzando questa osservazione ed il teorema sui limiti del funzioni composte, è facile studiare il comportamento della funzione al bordo dell'insieme di definizione; ovvero

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} g(y) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = \tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\log 2} f(x) = \lim_{y\to 2} g(y) = +\infty.$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, la derivata prima di f è uguale ad $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$, ove

$$g'(y) = \begin{cases} \frac{y^2+y-1}{y^2(y-2)^2} & \text{se } y < 2 \\ -\frac{y^2+y-1}{y^2(y-2)^2} & \text{se } y > 2 \end{cases}, \quad h'(x) = e^x, \quad \text{e quindi} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}+e^x-1}{e^{2x}(e^x-2)^2}e^x & \text{se } x < \log 2 \\ -\frac{e^{2x}+e^x-1}{e^{2x}(e^x-2)^2}e^x & \text{se } x > \log 2 \end{cases}.$$

Il segno della derivata prima è quindi concorde con il segno del numeratore della frazione e quindi f è decrescente in $(-\infty, \log\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ ed in $(\log 2, +\infty)$ ed è crescente in $(\log\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \log 2)$. In particolare $x_0 = \log\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ è un punto di minimo relativo ed $f(x_0) = g(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{5-\sqrt{5}}{6\sqrt{5}-10} > \frac{1}{2}$. Non vi sono punti di minimo assoluto, né punti di massimo, relativo o assoluto.



Perciò, l'andamento di $f(x)$ è descritto approssimativamente dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si mostri per induzione che*

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}} = 2\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+1}}),$$

ove n è il numero di segni di radice che compaiono nel membro di sinistra.

Svolgimento. La tesi è vera se $n=1$, essendo $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Possiamo supporre, per ipotesi induttiva, che sia vera per n e dedurre da ciò la validità per l'intero successivo. Considerando $n+1$ segni di radice, si ha

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+1}})}=\sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}{2}}=\cos(\tfrac{\pi}{2^{n+2}})$$

ove l'ultima uguaglianza si ottiene applicando le formule di bisezione. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\log(1-x)+2(\sin x)^2+\mathrm{tg}(x^3)}{x^3\log(1+x)}$.

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Considerando gli sviluppi di McLaurin, si ha

$$\begin{aligned}2x\log(1-x)&=2x\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)=-2x^2-x^3-\frac{2x^4}{3}+o(x^4),\\ 2(\sin x)^2&=2\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2=2x^2-\frac{2x^4}{3}+o(x^4),\\ \mathrm{tg}(x^3)&=x^3+o(x^6)\qquad\text{e}\qquad x^3\log(1+x)=x^3(x+o(x))=x^4+o(x^4);\end{aligned}$$

e da ciò si deduce che

$$\frac{2x\log(1-x)+2(\sin x)^2+\mathrm{tg}(x^3)}{x^3\log(1+x)}=\frac{-\frac{4x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}.$$

Passando al limite per $x\to 0$, si possono cancellare le funzioni trascurabili e concludere che il limite proposto è uguale a $-\frac{4}{3}$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli il volume del solido che si ottiene ruotando attorno all'asse orizzontale il sottografico della funzione* $f(x)=x\sqrt{\sinh x}$ *sull'intervallo* $[0,1]$.

Svolgimento. Il volume del solido è uguale a

$$V=\pi\int_0^1 x^2\sinh x\,dx.$$

Una primitiva di $x^2\sinh x$, si ottiene facilmente integrando per parti, e si ha

$$\begin{aligned}\int x^2\sinh x\,dx&=x^2\cosh x-2\int x\cosh x\,dx=\\ &=x^2\cosh x-2x\sinh x+2\int\sinh x\,dx=x^2\cosh x-2x\sinh x+2\cosh x+c.\end{aligned}$$

Dunque

$$V=\pi\int_0^1 x^2\sinh x\,dx=\pi\left[x^2\cosh x-2x\sinh x+2\cosh x\right]_0^1=\frac{e^2-4e+5}{2e}$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Siano date le rette*

$$r_1:\begin{cases}x-z+1=0\\ x+y=0\end{cases}\qquad r_2:\begin{cases}x-y+4=0\\ x+z+3=0\end{cases},$$

(a) Verificare che r_1 e r_2 sono incidenti e determinare il punto P di intersezione tra le due rette.
(b) Determinare l'equazione del piano π contenente r_1 ed r_2.
(c) Scrivere le equazioni parametriche delle rette perpendicolari a π, incidenti r_1 ed aventi distanza $2\sqrt{6}$ da r_2.

Svolgimento. (a). L'intersezione tra le due rette è costituita dalle soluzioni comuni ai due sistemi, ovvero dalle soluzioni del sistema

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \\ x - y + 4 = 0 \\ x + z + 3 = 0 \end{cases}.$$

Dunque $r_1 \cap r_2 = \{P\}$, ove $P = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b). Le due rette passano per il punto P e sono parallele, rispettivamente ai vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dunque il piano π deve passare per il punto P ed essere ortogonale al vettore $v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ovvero π è costituito dai punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che

$$\left\langle v_1 \times v_2, \overrightarrow{PX} \right\rangle = 2(y + z - 1) = 0; \qquad \text{ovvero} \qquad \pi : y + z = 1.$$

(c). Le rette cercate sono quindi parallele al vettore $n = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e devono passare per un punto di r_1, ovvero per un punto di coordinate del tipo $R_t = P + tv_1 = \begin{pmatrix} t-2 \\ 2-t \\ t-1 \end{pmatrix}$. La distanza tra una tale retta ed r_2 è uguale a

$$\frac{|\left\langle n \times v_2, \overrightarrow{PR_t} \right\rangle|}{\|n \times v_2\|} = \frac{4|t|}{\sqrt{6}}$$

e tale distanza è uguale a $2\sqrt{6}$ se, e solo se, $t = \pm 3$. Quindi le rette cercate sono due, ed hanno equazioni parametriche

$$s_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad s_2 : \begin{cases} x = -5 \\ y = 5 + \mu \\ z = -4 + \mu \end{cases}.$$

e ciò risponde alle richieste. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 14 febbraio 2001

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{(x + |x|)^2}{2x^2 - 1}.$$

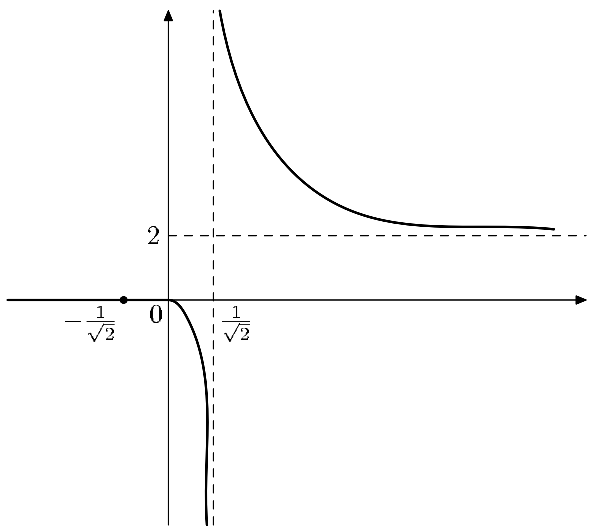
Si determinino in particolare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ *ove* $f(x)$ *è continua, derivabile e convessa. Si dica se* $f(x)$ *può essere estesa ad una funzione continua e derivabile al di fuori del suo dominio e si tracci un grafico indicativo dell'andamento di* $f(x)$.

Svolgimento. La funzione è definita e continua quando il denominatore non si annulla, ovvero in

$$D = (-\infty, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) \cup (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty).$$

Si osservi che $x + |x| = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, e quindi $f(x)$ è identicamente nulla in $D \cap (-\infty, 0)$ e quindi può essere prolungata ad una funzione nulla anche sul punto $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Per quanto riguarda il comportamento della funzione al bordo dell'insieme di definizione, si ha

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\frac{1}{\sqrt{2}}^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\frac{1}{\sqrt{2}}^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$



Per quanto riguarda la derivata prima di f, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in D \cap (-\infty, 0) \\ -\frac{8x}{(2x^2-1)^2} & \text{se } x \in D \cap (0, +\infty) \end{cases};$$

e quindi, f è derivabile, con derivata nulla, anche per $x = 0$. In particolare, f è costante sulla semiretta dei numeri negativi, ed è decrescente sull'intervallo $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e sulla semiretta $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. In particolare, il sottoinsieme $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui si possa estendere $f(x)$ ad una funzione continua e derivabile. Non vi sono né punti di minimo né punti di massimo, relativi o assoluti.

La derivata seconda di f è

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in D \cap (-\infty, 0) \\ \frac{8(6x^2+1)}{(2x^2-1)^3} & \text{se } x \in D \cap (0, +\infty) \end{cases};$$

e quindi il grafico di $f(x)$ è concavo sull'intervallo $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e convesso sulla semiretta $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. In $D \cap (-\infty, 0)$ la funzione è costante e quindi può essere considerata sia concava che convessa. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si dica se converge assolutamente la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+3}{n^3 - n},$$

e se ne calcoli l'eventuale somma.

Svolgimento. Si tratta di una serie a termini positivi ed asintoticamente equivalente alla serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi la serie data converge assolutamente. Per calcolarne la somma osserviamo che

$$\frac{n+3}{n^3-n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1}, \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=1 \\ -B=3 \end{cases}.$$

ovvero $\frac{n+3}{n^3-n} = \frac{2}{n-1} - \frac{3}{n} + \frac{1}{n+1}$. Da cui si ottiene che, per k sufficientemente grande, si ha

$$s_k = \sum_{n=2}^{k} \frac{n+3}{n^3-n} = \frac{3}{2} - \frac{k+2}{k(k+1)}$$

e quindi che la somma della serie è $\lim_{k\to+\infty} s_k = \frac{3}{2}$. □

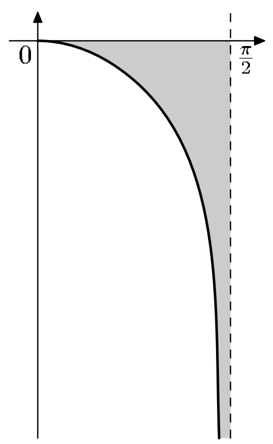
ESERCIZIO 3. *Si verifichi che il polinomio $P(x) = x^3 + (6+4i)x + (8-4i)$ è divisibile per $x - 2i$.*

Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le radici z_1, z_2, z_3 di $P(x)$ e si determinino il centro ed il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici z_1, z_2, z_3.

Svolgimento. Si ha $x^3 + (6+4i)x + (8-4i) = (x-2i)(x^2 + 2ix + 2 + 4i)$; e quindi le radici del polinomio $P(x)$ sono i numeri complessi $z_1 = 2i$, $z_2 = i - 1$, $z_3 = 1 - 3i$. Queste radici formano un triangolo non degenere nel piano di Argand-Gauß che è inscritto nella circonferenza di centro $C = (4/3, -1/3)$ e raggio $r = \frac{\sqrt{65}}{3}$, come si verifica facilmente imponendo che una generica circonferenza, di equazione $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, passi per i tre punti corrispondenti a z_1, z_2, z_3 e ricordando che (α, β) sono le coordinate del centro, mentre il raggio è determinato dalla condizione $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$. □

ESERCIZIO 4. *Si abbozzi il grafico della funzione integranda sull'intervallo di integrazione e si calcoli* $\int_0^{\pi/2} \sin x \, \log(\cos x) \, dx$.

Svolgimento. Cominciamo con un rapido studio dell'andamento della funzione integranda.



Nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ la funzione integranda assume valori minori o uguali a 0; la sua derivata prima è $\cos x \, \log(\cos x) - \frac{(\sin x)^2}{\cos x}$ e quindi la funzione integranda è decrescente; infine si ha $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \sin x \, \log(\cos x) = -\infty$. Quindi l'andamento della funzione integranda è descritto dal grafico qui a fianco e l'integrale proposto è un integrale improprio.

Integrando per parti, si ha

$$\int \sin x \, \log(\cos x) \, dx =$$
$$= -\cos x \log(\cos x) - \int \sin x dx = -\cos x(\log(\cos x) - 1) + c$$

e quindi l'integrale proposto è uguale a

$$\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} -\cos b(\log(\cos b) - 1) - 1 = \lim_{y\to 0^+} -y(\log y - 1) - 1 = -1;$$

e ciò conclude il calcolo dell'integrale proposto. □

ESERCIZIO 5. *Determinare i numeri reali a, b, c, d, e, f sapendo che i vettori*

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sono autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Si dica se A è diagonalizzabile.

Svolgimento. Deve aversi $Au = \alpha u$, $Av = \beta v$ e $Aw = \gamma w$, per opportune costanti α, β, γ, e così si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ d+e+f=3 \\ a+c=0 \\ d+f=2 \\ a+b=2 \\ d+e=0 \end{cases} \qquad \text{e quindi} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, da ciò si deduce che gli autovalori di A sono 3 e 2 con i relativi sottospazi di autovettori $\langle u \rangle$ e $\langle v, w \rangle$. Quindi A è diagonalizzabile, perchè u, v e w sono linearmente indipendenti. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 11 giugno 2001

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \log\left(\frac{2x^2 - |x|}{x^2 - 2|x|}\right).$$

Si determinino in particolare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ove $f(x)$ è continua, derivabile e convessa. Si dica se $f(x)$ può essere estesa ad una funzione continua e derivabile al di fuori del suo dominio e si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) = f(-x)$ e quindi che possiamo ridurci a studiare la funzione sulla semiretta positiva, osservando inoltre che, per $x = 0$, non è definito l'argomento del logaritmo$^{(*)}$. Sia dunque $x > 0$ ed osserviamo che

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{2x^2 - x}{x^2 - 2x} > 0 \end{cases} \qquad \text{se, e solo se,} \qquad x \in (0, \tfrac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$$

ed inoltre $f(x)$ è continua e derivabile in ogni punto del dominio $D = (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\log 2, \qquad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \log 2.$$

Si ha inoltre (sempre per $x > 0$)

$$f'(x) = \frac{-3}{(2x-1)(x-2)} \qquad \text{ed} \qquad f''(x) = \frac{3(4x-5)}{(2x-1)^2(x-2)^2}.$$

Dunque $f(x)$ è crescente negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-\frac{1}{2}, 0)$ e decrescente in $(0, \frac{1}{2})$ ed in $(2, +\infty)$. Inoltre, il grafico di f è convesso sulle semirette $(-\infty, -2)$ e $(2, +\infty)$ ed è concavo sui due intervalli $(-\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$.

La funzione si può estendere ad una funzione continua nel punto $x = 0$, ponendo $f(0) = -\log 2$. Ma in tal punto i limiti del rapporto incrementale a destra ed a sinistra differiscono per il segno, essendo rispettivamente $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$, e quindi f si estende ad una funzione continua, ma non derivabile in $x = 0$.

Lasciamo al lettore il compito di tracciare, alla luce di quanto esposto, un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)^2}.$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata, del tipo 1^∞. Osservando che

$$(\sin x)^{1/(2x-\pi)^2} = e^{\log(\sin x)/(2x-\pi)^2},$$

e che l'esponenziale è una funzione continua, possiamo limitarci a calcolare

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{(2x-\pi)^2} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{4 \sin x (2x - \pi)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{8 \sin x + 4 \cos x (2x - \pi)} = -\frac{1}{8},$$

$(*)$ ...anche se, per $x \neq 0$, si ha $\frac{2x^2 - |x|}{x^2 - 2|x|} = \frac{2|x| - 1}{|x| - 2}$ e quindi è chiaro che questa frazione ha limite finito per x tendente a 0.

ove le uguaglianze si ottengono applicando la regola di de L'Hôpital.

Dunque $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1/(2x-\pi)^2} = \frac{1}{\sqrt[8]{e}}$. □

ESERCIZIO 3. *Si disegnino sul piano di Argand-Gauß i tre punti z_1, z_2, z_3, corrispondenti alle radici del polinomio $P(x) = x^3 - (1+2i)x^2 + x - (1+2i)$ e si calcoli l'area del triangolo avente questi tre punti come vertici.*

Dati i punti $\xi_1 = 3i$, $\xi_2 = 2+3i$, si determini un punto ξ_3, tale che il triangolo $\xi_1\xi_2\xi_3$ sia isoscele ed equivalente al triangolo $z_1z_2z_3$.

Svolgimento. Le radici del polinomio $P(x) = (x-1-2i)(x^2+1)$ sono i numeri complessi $z_1 = 1+2i$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Queste radici formano un triangolo non degenere nel piano di Argand-Gauß. Questo triangolo ha area 1 Bisogna prendere $\xi_3 = 1+4i$ oppure $\xi_3 = 1+2i$ □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli* $\int_0^1 (1-x^2)\,\log(1-x)\,dx$.

Svolgimento. Si tratta di un'integrale generalizzato, perchè nel punto $x=1$ la funzione non è definita (anche se ha limite finito ed uguale a zero). Integrando per parti si ottiene una primitiva e si ha

$$\int_0^1 (1-x^2)\,\log(1-x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{3}\left[(x^2+x-2)(1-x)\log(1-x) + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^{1-\varepsilon} = -\frac{7}{18}.$$

L'integrale si poteva anche calcolare osservando che, dopo la sostituzione $t = 1-x$, si tratta di calcolare

$$\int_0^1 (2t-t^2)\log t\,dt,$$

che si risolve analogamente per parti e conduce (ovviamente) allo stesso risultato. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Si determinino gli autovalori di ϕ ed i relativi sottospazi di autovettori. Si determinino, se esistono, una matrice diagonale Δ ed una matrice P, con $\det P \neq 0$, tali che $AP = P\Delta$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico di ϕ è

$$-\det(A - x\mathbf{1}_3) = (x-3)^2(x-2).$$

La matrice $A - 2\mathbf{1}_3$ ha rango 2 ed il sottospazio di autovettori relativo all'autovalore 2 è $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$; mentre la matrice $A - 3\mathbf{1}_3$ ha rango 1 ed il sottospazio di autovettori relativo all'autovalore 3 ha dimensione 2 ed è $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Dunque i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

formano una base di autovettori per ϕ, e quindi ϕ è diagonalizzabile. Ciò significa che, posto

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si ha $AP = P\Delta$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 2 luglio 2001

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2+|x|}{2-|x|}\right).$$

Si determinino in particolare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ove $f(x)$ è continua, derivabile e convessa. Si dica se $f(x)$ può essere estesa ad una funzione continua e derivabile al di fuori del suo dominio e si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$.

Svolgimento. Osserviamo che $f(x) = f(-x)$ e quindi che possiamo ridurci a studiare la funzione sulla semiretta positiva, ove $|x| = x$, riportando i risultati sull'altra semiretta per simmetria rispetto all'asse verticale. La funzione è definita e continua per $x \neq \pm 2$ e, sotto questa ipotesi, è certamente derivabile per $x \neq 0$. Si ha

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}, \qquad \text{ed} \qquad f(0) = \frac{\pi}{4}.$$

La derivata prima di $f(x)$ sulla semiretta positiva è uguale a

$$f'(x) = \frac{4}{(2+x)^2 + (2-x)^2} \qquad \text{per } x \in (0,2) \cup (2,+\infty).$$

Dunque la funzione è crescente sia sull'intervallo $(0,2)$ che sulla semiretta $(2,+\infty)$. Inoltre

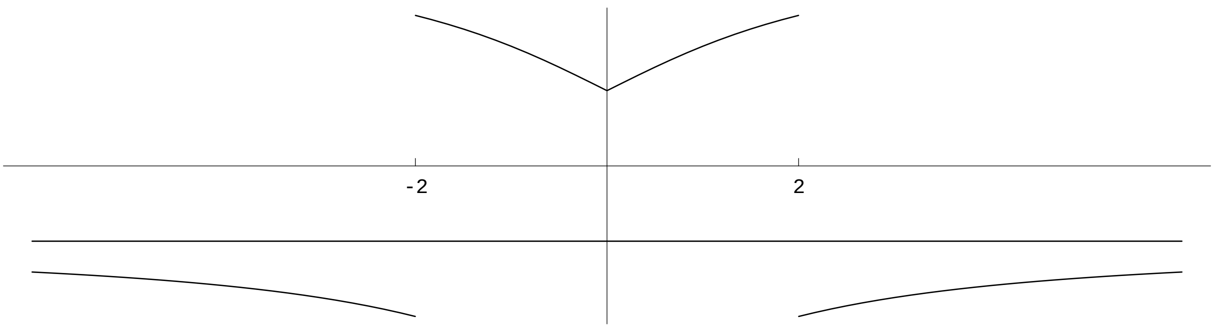
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$$

e quindi $f(x)$ non è derivabile per $x = 0$.

Inoltre,

$$f''(x) = -\frac{16x}{\left[(2+x)^2 + (2-x)^2\right]^2} \qquad \text{per } x \in (0,2) \cup (2,+\infty),$$

e quindi il grafico di $f(x)$ è concavo sulle due componenti del dominio contenute nella semiretta positiva. Un abbozzo del grafico di $f(x)$ può quindi essere il seguente.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli, per ogni numero reale α, il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{(\alpha-1)x}}$$

e si dica per quali valori di α questo limite è uguale ad e (Numero di Neper).

Svolgimento. Il limite $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x}$ è una forma indeterminata, del tipo 1^∞ ed è uguale ad e^α. Chi non ricordasse questo limite fondamentale, può ragionare così: $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x} = e^{\alpha x\log(1+1/x)}$ e quindi, per la continuità della funzione esponenziale, possiamo considerare il limite $\lim_{x\to+\infty}\alpha x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \alpha$, come si può vedere, ad esempio, applicando opportunamente la regola di de l'Hôpital.

Analogamente, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{(\alpha-1)x} = e^{2(\alpha-1)}$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha x}}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{(\alpha-1)x}} = e^{\alpha-2(\alpha-1)} = e^{2-\alpha}$$

qualunque sia il numero reale α. In particolare, il limite è uguale ad e se, e solo se, $\alpha = 1$. □

ESERCIZIO 3. *Si disegnino sul piano di Argand-Gauß i numeri complessi z soddisfacenti alla condizione*

$$\left|\frac{\bar z + 2i}{z-2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Svolgimento. Scriviamo, come di consueto $z = x+iy$ con $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Allora

$$\left|\frac{\bar z + 2i}{z-2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{x^2+(y-2)^2}{(x-2)^2+y^2} \le \frac{1}{2}$$

che, per $z\neq 2$, è equivalente alla condizione

$$x^2+y^2+4x-8y+4\le 0 \qquad \text{ovvero} \qquad (x+2)^2+(y-4)^2\le 16.$$

Dunque, si tratta dei punti interni al cerchio di centro $C=(-2,4)$ e raggio 4, compreso il bordo. Da ultimo, osserviamo che il punto $(2,0)$ è esterno a questo cerchio e quindi la condizione $z\neq 2$ non modifica l'insieme delle soluzioni. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1+\operatorname{tg}x}{2+\operatorname{tg}x}\,dx$.*

Svolgimento. Calcoliamo una primitiva della funzione integranda. Osserviamo che

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{2+\operatorname{tg}x} = 1-\frac{1}{2+\operatorname{tg}x} \quad \text{e quindi} \quad \int\frac{1+\operatorname{tg}x}{2+\operatorname{tg}x}\,dx = x-\int\frac{1}{2+\operatorname{tg}x}\,dx.$$

Inoltre,

$$\int\frac{1}{2+\operatorname{tg}x}\,dx = \int\frac{1+\operatorname{tg}^2x}{(2+\operatorname{tg}x)(1+\operatorname{tg}^2x)}\,dx$$

e, con il cambiamento di variabile $y=\operatorname{tg}x$ (e quindi $dy=(1+\operatorname{tg}^2x)dx$), ci si riduce a calcolare

$$\int\frac{1}{(2+y)(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{5}\int\frac{1}{y+2}\,dy-\frac{1}{10}\int\frac{2y}{1+y^2}\,dy+\frac{2}{5}\int\frac{1}{1+y^2}\,dy =$$
$$= \frac{1}{5}\log|y+2|-\frac{1}{10}\log(1+y^2)+\frac{2}{5}\operatorname{arctg}y+c.$$

Dunque, ricordando il cambiamento di variabile, si ottiene

$$\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{2+\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}\log|\operatorname{tg} x + 2| + \frac{1}{10}\log(1+\operatorname{tg}^2 x) + c.$$

Possiamo quindi calcolare l'integrale definito, ricordando che $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ e $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Si ha quindi

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1+\operatorname{tg} x}{2+\operatorname{tg} x}\,dx = \frac{\pi}{20} + \frac{1}{10}\log\frac{18}{7+4\sqrt{3}}.$$

Fine del calcolo. □

ESERCIZIO 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) *Si scrivano l'equazione cartesiana del piano π, passante per i tre punti, e le coordinate del baricentro G del triangolo PQR.*

(b) *Sia O l'origine del riferimento. Si scrivano le equazioni parametriche della retta per O e G, si determini la distanza dal piano π dei punti della retta in funzione del parametro.*

(c) *In particolare, si determinino i punti X della retta per cui la distanza, vale $\frac{2}{3}$.*

Svolgimento. (a). Un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene al piano π se, e solo se, $\left\langle \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PX} \right\rangle = 0$. Ora

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix};$$

da cui si deduce che $\pi : y + 2z = 1$.

Sia O l'origine del riferimento, allora il baricentro G è determinato dalla condizione $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR})$ e quindi $G = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b). La retta in questione passa per l'origine ed è parallela al vettore $\overrightarrow{OG}$, quindi le sue equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = 4t \\ y = 3t \\ z = 0 \end{cases}$. La distanza del punto $X_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix}$ dal piano π è quindi $d = \dfrac{|3t-1|}{\sqrt{5}}$.

(c). Infine $\dfrac{|3t-1|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$ se, e solo se, $t = 1 \pm \frac{4\sqrt{23}}{9}$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 27 agosto 2001

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione* $f(x) = x\sqrt{3-x^2}$ *e se ne tracci un grafico indicativo. In particolare, si determinino i sottoinsiemi di* $\mathbb{R}$ *ove* $f(x)$ *è continua e derivabile, il comportamento della funzione e della sua derivata prima agli estremi del dominio di definizione, i valori massimi o minimi ed i punti in cui questi vengono assunti. Si studino concavità e convessità del grafico e si determinino gli eventuali punti di flesso.*

Svolgimento. La funzione è definita e continua nell'intervallo chiuso $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ed è derivabile nei punti interni. Non vi è quindi la necessità di calcolare limiti della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione. La derivata prima è uguale ad

$$f'(x) = \frac{3-2x^2}{\sqrt{3-x^2}} \qquad \text{per } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

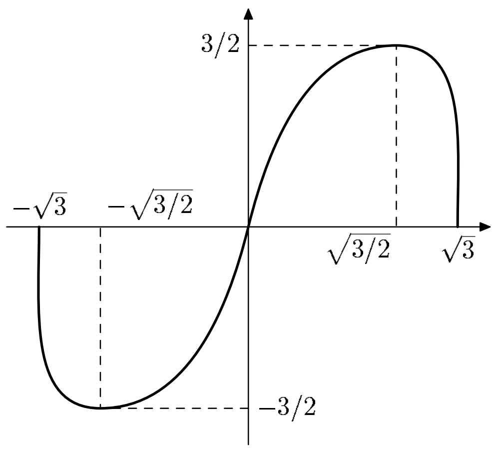
Si ha $f'(x) > 0$ per $x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ ed $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{3}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{3})$; ne consegue che $x_0 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di minimo relativo per $f(x)$, con $f(x_0) = -\frac{3}{2}$ e quindi un minimo assoluto, e inoltre che $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ è un punto di massimo relativo per $f(x)$, con $f(x_1) = \frac{3}{2}$ e quindi un massimo assoluto. Agli estremi dell'intervallo di definizione si ha

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}^+} \frac{f(x) - f(-\sqrt{3})}{x+\sqrt{3}} = \lim_{x\to-\sqrt{3}^+} f'(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{f(x) - f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f'(x) = -\infty;$$

quindi il grafico della funzione ha "tangente verticale" agli estremi dell'intervallo di definizione. Infine, la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{x(2x^2-9)}{(3-x^2)^{3/2}} \qquad \text{per } x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

che è positiva in $(-\sqrt{3}, 0)$ e negativa in $(0, \sqrt{3})$ e si conclude così che l'origine è un punto di flesso per il grafico, con tangente $y = \sqrt{3}x$.



Qui sopra si può vedere un grafico indicativo del comportamento della funzione. □

ESERCIZIO 2. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right|}.$$

Svolgimento. La funzione $\sqrt{|\ |}$ è continua e quindi è sufficiente calcolare il limite del suo argomento, ovvero

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=-\frac{1}{3},$$

essendo

$$\sin^2 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2=x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

Dunque, il limite cercato è uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

ESERCIZIO 3. *Si dica se converge l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è continua e non negativa su tutta la semiretta $(0,+\infty)$, ma è illimitata per $x\to0^+$. Quindi può essere utile considerare separatamente la convergenza dei due integrali

$$\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{e} \qquad \int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\,dx;$$

Infatti, se i due integrali convergono, converge anche la loro somma, che è l'integrale proposto. Nel primo caso si ha

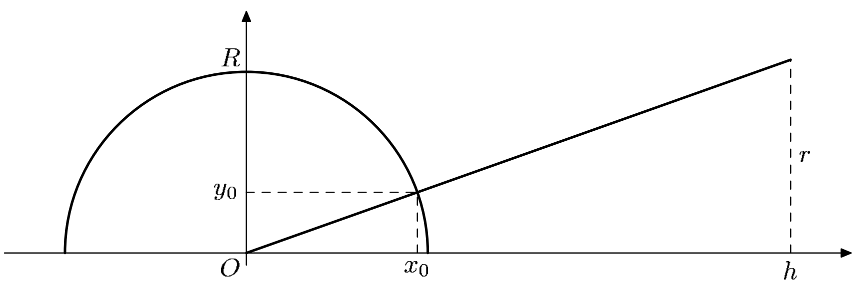
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge come converge $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Per ogni $x\in[\pi,+\infty)$, si ha $0\le\frac{|\sin x|}{x\sqrt{x}}\le\frac{1}{x\sqrt{x}}$; e quindi, per il criterio del confronto il secondo integrale converge come converge $\int_{\pi}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}$. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Un artigiano deve realizzare un ornamento formato da un cono (retto) con raggio di base r ed altezza h ed una sfera di raggio $R<h$, sovrapposti in modo che il centro della sfera coincida con il vertice del cono. Si disegni la figura in sezione e se ne calcoli il volume totale.*

Svolgimento. Disegnamo la sezione dell'ornamento, ponendo l'asse del cono sull'asse delle ascisse ed il vertice del cono nell'origine. Per motivi di simmetria possiamo limitarci alla porzione contenuta nel semipiano superiore, ovvero



ove il punto (x_0,y_0) è l'intersezione tra il semicerchio e la retta, ovvero la soluzione (nel semipiano superiore) del sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ y=\dfrac{r}{h}x \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_0=\frac{Rh}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ y_0=\frac{Rr}{\sqrt{h^2+r^2}} \end{cases}$$

Il solido si ottiene facendo ruotare la curva in figura attorno all'asse delle x e quindi è uguale a

$$\pi \int_{-R}^{x_0} (R^2 - x^2) dx + \pi \int_{x_0}^{h} \frac{r^2 x^2}{h^2} \, dx = \frac{2}{3} \pi R^3 \left(1 + \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) + \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le quattro rette per l'origine parallele ai vettori*

$$\mathbf{v}_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 : \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i vertici, il perimetro e l'area del quadrilatero che le quattro rette tagliano sul piano σ : $2x + 3y - z = 1$.

Svolgimento. Indichiamo con r_i la retta per l'origine parallela al vettore $\mathbf{v}_i$, per $i = 1, \dots, 4$, e determiniamo i quattro vertici $P_i = \sigma \cap r_i$, sempre per $i = 1, \dots, 4$. Si ha

$$P_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}, \quad P_2 : \begin{cases} 3x - z = 0 \\ y = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}, \quad P_3 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}, \quad P_4 : \begin{cases} x = 0 \\ 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases};$$

e quindi

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I lati del quadrilatero hanno la lunghezze dei vettori

$$\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \overrightarrow{P_3P_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

da cui si ottiene il perimetro del quadrilatero $p = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{21} + \sqrt{6}$. Per calcolarne l'area, possiamo sommare le aree dei due triangoli $P_1P_2P_4$ e $P_3P_2P_4$, e quindi si ottiene

$$A = \frac{1}{2} \| u_1 \times u_2 \| + \frac{1}{2} \| w_1 \times w_2 \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{14},$$

e ciò esaurisce le richieste. □

ESERCIZIO 1. *Si studi la funzione*

$$f(x) = x^3 e^{-|x|}.$$

Si determinino in particolare i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ove $f(x)$ è continua, derivabile e convessa e si studi il comportamento della funzione agli estremi del dominio di definizione. Si determinino infine gli eventuali punti di massimo o minimo relativo ed assoluto e si tracci un grafico indicativo.

Svolgimento. La funzione è definita e continua su tutti punti della retta reale perchè composizione di funzioni continue ed è analogamente derivabile nei diversi da 0. In particolare, $f(-x) = -f(x)$, per ogni numero reale x, e quindi il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine. La presenza del fattore esponenziale con un esponente negativo permette di concludere che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

La derivata prima è uguale a

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x}(3x^2 - x^3) & \text{se } x > 0 \\ e^{x}(3x^2 + x^3) & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

e, applicando la regola di de L'Hôpital, si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0$.

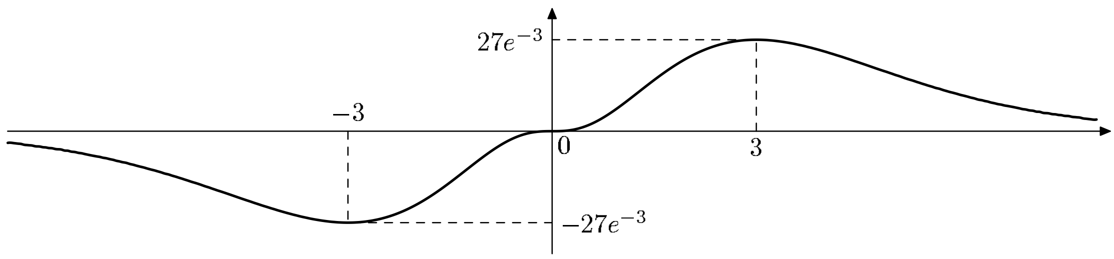
Quindi la funzione è derivabile su tutta la retta, con derivata prima continua, e si ha $f'(x) > 0$ per $x \in (-3, 0) \cup (0, 3)$, mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. Ne consegue che $x_1 = -3$ è un punto di minimo relativo per $f(x)$, con $f(x_1) = -27e^{-3}$ ed è un minimo assoluto; inoltre $x_2 = 3$ è un punto di massimo relativo per $f(x)$, con $f(x_2) = 27e^{-3}$ ed è un massimo assoluto; infine, il punto $x_0 = 0$ è un punto di flesso con tangente orizzontale, perchè la derivata prima si annulla in quel punto, ma non cambia di segno.

La derivata seconda è uguale a

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}(6x - 6x^2 + x^3) & \text{se } x > 0 \\ e^{x}(6x + 6x^2 + x^3) & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

e, applicando la regola di de L'Hôpital, si ha $f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} f''(x) = 0$.

Quindi la funzione è derivabile due volte su tutta la retta(*), e si ha $f''(x) > 0$ per $x \in (-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}) \cup (0, 3 - \sqrt{3}) \cup (3 + \sqrt{3}, +\infty)$, e su questi intervalli il grafico di f è convesso, mentre $f''(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -3 - \sqrt{3}) \cup (-3 + \sqrt{3}, 0) \cup (3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ e su questi intervalli il grafico di f è concavo. Ne consegue che vi sono 5 punti di flesso per il grafico, ovvero $-3 - \sqrt{3}$, $-3 + \sqrt{3}$, 0, $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$.



Qui sopra si può vedere un grafico indicativo del comportamento della funzione. □

(*) Si potrebbe verificare che la funzione è derivabile un numero qualsiasi di volte per $x \neq 0$, ma che non esiste la derivata *IV* (e quindi tutte le successive) per $x = 0$ essendo distinti i limiti destro e sinistro.

ESERCIZIO 2. *Si dica se converge le serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \sqrt[3]{2^{4n}}}{n!}$$

e se ne calcoli la somma.

Svolgimento. Per le usuali proprietà del logaritmo, si ha $\log \sqrt[3]{2^{4n}} = \frac{4n}{3} \log 2$ e quindi il termine generale della serie è uguale a $\frac{4\log 2}{3} \cdot \frac{1}{(n-1)!}$. Osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e,$$

si conclude che la serie proposta converge a $\frac{4e\log 2}{3}$. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2 - \sin x + \cos x}{\operatorname{tg} x \log(1+x^2)}.$$

Svolgimento. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, e possiamo considerare gli sviluppi di Mc Laurin delle funzioni in questione, ovvero

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3), \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
$$\operatorname{tg} x = x + o(x), \qquad \log(1+x^2) = x^2 + o(x^2),$$

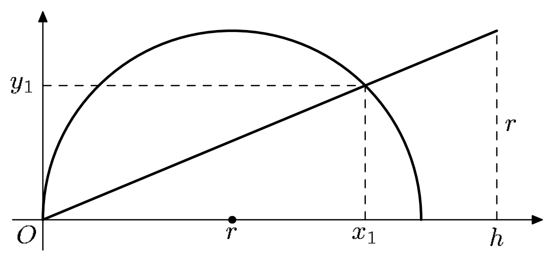
da cui si deduce che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2 - \sin x + \cos x}{\operatorname{tg} x \log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3/3) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{3}.$$

Il che conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri il solido formato da una sfera di raggio r entro cui si inserisce, aderendo perfettamente, un cono (retto) con raggio di base r ed altezza $h > 2r$, di modo che il centro della sfera appartenga all'altezza del cono ed il vertice del cono sia sulla superficie della sfera. Si disegni la figura in sezione e se ne calcoli il volume totale.*

Svolgimento. Disegnamo la sezione del solido, ponendo l'asse del cono sull'asse delle ascisse ed il vertice del cono nell'origine. Per motivi di simmetria possiamo limitarci alla porzione contenuta nel semipiano superiore, ovvero



ove il punto (x_1, y_1) è l'intersezione, diversa da O tra il semicerchio e la retta, che si può trovare come soluzione del sistema

$$\begin{cases} (x-r)^2 + y^2 = r^2 \\ y = \dfrac{r}{h}x \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2rh^2}{r^2+h^2} \\ y_1 = \frac{2r^2h}{r^2+h^2} \end{cases}$$

Il solido si ottiene facendo ruotare la curva in figura attorno all'asse delle x e quindi il suo volume è uguale a

$$\pi\left(\int_0^{x_1}(2rx-x^2)\,dx+\int_{x_1}^{h}\frac{r^2x^2}{h^2}\,dx\right)=\pi\left(\left[rx^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{2rh^2}{r^2+h^2}}+\left[\frac{r^2x^3}{3h^2}\right]_{\frac{2rh^2}{r^2+h^2}}^{h}\right)=\frac{4\pi r^3h^4}{3(h^2+r^2)^2}+\frac{\pi r^2h}{3};$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i quattro piani*

$$\pi_1 : x-y=0, \qquad \pi_2 : x+2y=0, \qquad \pi_3 : x-y=6, \qquad \pi_4 : x+2y=9.$$

Si determinino i vertici, il perimetro e l'area del quadrilatero che i quattro piani tagliano sul piano σ : $2x+3y-z=1$.

Svolgimento. I quattro piani, a due a due paralleli, si intersecano in quattro rette verticali, che tagliano sul piano σ i quattro punti

$$P_1=\pi_1\cap\pi_2\cap\sigma=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\ P_2=\pi_2\cap\pi_3\cap\sigma=\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix},\ P_3=\pi_3\cap\pi_4\cap\sigma=\begin{pmatrix}7\\1\\16\end{pmatrix},\ P_4=\pi_4\cap\pi_1\cap\sigma=\begin{pmatrix}3\\3\\14\end{pmatrix}.$$

I lati del quadrilatero hanno le lunghezze dei vettori

$$\mathbf{u}_1=\overrightarrow{P_1P_4}=\begin{pmatrix}3\\3\\15\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2=\overrightarrow{P_1P_2}=\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}_1=\overrightarrow{P_3P_4}=\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}_2=\overrightarrow{P_3P_2}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\-15\end{pmatrix};$$

da cui si vede che il quadrilatero è un parallelogramma. Il perimetro è $p=2(9\sqrt{3}+2\sqrt{6})$. L'area del parallelogramma è il modulo del prodotto vettoriale dei vettori corrispondenti a due lati consecutivi, ovvero

$$A=\|\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2\|=\left\|\begin{pmatrix}36\\54\\-18\end{pmatrix}\right\|=18\sqrt{14};$$

e ciò esaurisce le richieste. □