Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 30 gennaio 1997 – Compito A

ESERCIZIO 1. Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(x-2)^n}{3^{2n-1}n^n}.$$

Si dica se la serie converge assolutamente per $x = 2i - 1 \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO 2. Si enunci il cosiddetto 'criterio dei carabinieri' per i limiti di successioni e si mostri come si possa utilizzarlo per calcolare il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{4} \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{\sqrt{x^3}[1-\cos(x^2)]}{2+\sin x}\,dx. \end{cases}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{\operatorname{tg} x - x}.$$

ESERCIZIO 4. Al variare di c tra i numeri reali positivi, si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$\log c = \frac{2\sinh x - 3}{1 - e^{-x}}.$$

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione

$$\left| \frac{2i - z}{\bar{z} + i - 1} \right| > 2.$$

ESERCIZIO 6. Si determino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i piani π_1 e π_2 e la retta r, di equazioni

$$\pi_1 : x - 2y + z = 2, \qquad \pi_2 : x - 2y + z = -2, \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti $\{P_1\} = r \cap \pi_1$ e $\{P_2\} = r \cap \pi_2$ di intersezione tra la retta r ed i due piani.

(b) Si determini l'angolo α tra la retta r ed il piano π_2, e si determini la retta s, passante per P_2, parallela al piano π_2 e formante angolo α con r.

(c) Si fissi su s un punto P_3, a distanza 1 da P_2 e si calcoli l'area del triangolo $P_1P_2P_3$.

ESERCIZIO 8. Si dica se converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{2e^x - e^{2x}}{1 - e^{3x}}\, dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha} \left(\frac{1 - \cosh(1/x)}{\sqrt{1/x} - \log(1 + \sqrt{1/x})} \right) dx.$$

ESERCIZIO 10. Si calcoli

$$\int_0^{\pi^2/4} x \sin \sqrt{x}\, dx.$$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 30 gennaio 1997 – Compito B

ESERCIZIO 1. Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!\,(x+1)^n}{n^{2n}}.$$

Si dica se la serie converge assolutamente per $x = \dfrac{i}{4} \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO 2. Si enunci il cosiddetto 'criterio dei carabinieri' per i limiti di successioni e si mostri come si possa utilizzarlo per calcolare il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\pi}{4} \\ a_{n+1} = \displaystyle\int_0^{a_n} \frac{x^3 \sin(x^2)}{2+\cos x}\, dx. \end{cases}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge?

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \lg(1+x)\cosh x}{x^2 \log(1-x)}.$$

ESERCIZIO 4. Al variare di a tra i numeri reali, si dica quante soluzioni ha l'equazione

$$e^a = \frac{2\cosh x - 5}{e^x - 2}.$$

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss l'insieme dei numeri complessi z, soddisfacenti alla condizione

$$\left| \frac{2\bar{z} - i}{z + 2i + 1} \right| > 1.$$

ESERCIZIO 6. Si determino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i piani π_1 e π_2 e la retta r, di equazioni

$$\pi_1 : x - 2y + z = 2, \qquad \pi_2 : x - 2y + z = -2, \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

(a) Si determinino i punti $\{P_1\} = r \cap \pi_1$ e $\{P_2\} = r \cap \pi_2$ di intersezione tra la retta r ed i due piani.
(b) Si determinino le rette contenute nel piano π_1, passanti per P_1 e formanti un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con la retta r.

(c) Detta s una delle rette del punto precedente, si fissi su di essa un punto P_3, a distanza 1 da P_1 e si calcoli l'area del triangolo $P_1P_2P_3$.

ESERCIZIO 8. Si dica se converge

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^x - 4}{e^{2x} - e^{-x}}\, dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli.

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha \left(\frac{1 - \cos(1/x)}{\operatorname{tg}\sqrt{1/x} - \sqrt{1/x}} \right) dx.$$

ESERCIZIO 10. Si calcoli

$$\int_{-\pi^2/4}^{\pi^2/4} x \cos\sqrt{x}\, dx.$$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 17 giugno 1997

ESERCIZIO 1. Si mostri che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}(1+n\frac{\pi}{2})}{2^n\, n!}$$

converge. Si dica se la serie converge assolutamente e se ne calcoli la somma.

ESERCIZIO 2. Si consideri la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{3}{a_n} \end{cases} .$$

Si mostri che la successione è a termini positivi e decrescente e se ne calcoli il limite.

Si dica se esiste un valore del termine iniziale a_0, positivo e tale che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diventi costante. In caso affermativo, si determini tale valore.

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x\, \sqrt{x - \sin x}}{(\cosh x - 1)\sqrt{\log(1+x)}}.$$

ESERCIZIO 4. Si studi l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{2e^{\frac{x+2}{x-3}}}{x-3},$$

e se ne tracci un grafico indicativo, facendo particolare attenzione al comportamento della funzione al bordo del dominio di definizione.

Si determinino, se esistono, il valore minimo ed il valore massimo di tale funzione.

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione

$$z^3 + (3-2i)z + 4 - 2i = 0,$$

e se ne determini il baricentro.

[**Sugg.** Si osservi che il polinomio dato è divisibile per $z+1$.]

ESERCIZIO 6. Si determino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si dica se ϕ è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano π e la retta r, di equazioni

$$\pi : x + 4y - z = 3 \qquad \text{ed} \qquad r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Si determinino le rette passanti per il punto $P = \pi \cap r$, contenute nel piano π e formanti un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ con la retta r.

ESERCIZIO 8. Si dica se converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{2 \sinh x - 3e^x} \, dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha^2} \left(\frac{\sin(1/x)}{\operatorname{tg} \sqrt{1/x} - \sqrt{1/x}} \right) \, dx.$$

ESERCIZIO 10. Si determini la funzione $y : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, che soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} xy' - y + \frac{x^2}{\cosh^2 x} = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

e si calcoli $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{2x}$.

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 30 giugno 1997

ESERCIZIO 1. Si enunci il criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a termini di segno alterno e lo si applichi per studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sinh\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

ESERCIZIO 2. Si considerino il polinomio $P(X) = X - X^2$ e la funzione composta $f(x) = P(x - [x])$, ove, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x.

(a) Si calcoli esplicitamente il termine generale della successione definita ponendo

$$a_n = \int_0^{n+\frac{1}{2}} f(x)dx, \qquad \text{per } n = 0, 1, 2, ...$$

(b) Si determini il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n.$$

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori del parametro β converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!\, e^{n(\beta^2-1)}} .$$

ESERCIZIO 4. Si studi l'andamento della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\sin x} - 1}{2}, \qquad \text{per } x \in [0, 2\pi]$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

In particolare, si mostri che esiste una costante $c \in (0,1)$ tale che $f(x) \leq cx$ per ogni $x \in (0, \frac{\pi}{6})$.

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le radici del polinomio

$$f(z) = z^3 + (2+3i)z + 3 - i,$$

e se ne determini l'area.

[**Sugg.** Si osservi che $f(i) = 0$.]

ESERCIZIO 6. Si determino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si dica se ϕ è diagonalizzabile.

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette r_1 ed r_2, di equazioni

$$r_1 : \begin{cases} x + 4y - z = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad r_2 : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} .$$

(a) Si verifichi che le due rette sono sghembe e si calcoli la distanza tra r_1 ed r_2.
(b) Si scrivano le equazioni cartesiane di una retta s, perpendicolare sia ad r_1 che ad r_2 ed incidente entrambo le rette.

ESERCIZIO 8. Si dica se converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 - e^{-x}}{2\cosh x + 3e^{-x}}\, dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha} \left(\frac{\cos(1/x) - 1}{\sinh \sqrt{1/x} - \sqrt{1/x}} \right) dx.$$

ESERCIZIO 10. Si determini (se esiste) la funzione $y : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, che soddisfa alle condizioni

$$\begin{cases} xy' - y = \frac{x^2}{x-1} \\ y(0) = \pi \end{cases} .$$

Inoltre, si determini (se esiste) un esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to 0} \dfrac{y(x) - \pi}{x^\alpha}$ sia finito e diverso da zero.

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 11 settembre 1997

ESERCIZIO 1. *Si dica se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2+3n)\pi}{3}\right)}{3^n\, n!}$$

converge assolutamente ed, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.

Svolgimento. Si osservi che $\sin\left(\frac{(2+3n)\pi}{3}\right) = (-1)^n \frac{\sqrt{3}}{2}$ e quindi la serie in questione si può scrivere nella forma

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/3)^n}{n!},$$

che converge assolutamente al valore $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{e}}$, perchè la serie esponenziale $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si consideri il polinomio $P(X) = X^2 - X + 6$ e la funzione composta $\phi(x) = P(x - [x])$, ove, come di consueto, $[x]$ indica la parte intera del numero reale x.*

Posto

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{n+1/2} \phi(x)\, dx,$$

si calcolino $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi(n + \frac{1}{n})$.

Svolgimento. Si osservi che ϕ è una funzione periodica, di periodo 1, ed è continua, essendo

$$\lim_{x\to n^+} \phi(x) = P(0) = 6 = P(1) = \lim_{x\to n^-} \phi(x), \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Si ha quindi

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\int_0^{1/2} \phi(x)\, dx + n \int_0^1 \phi(x)\, dx\right),$$

da cui si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \int_0^1 \phi(x)\, dx = \int_0^1 P(x)\, dx = \frac{35}{6}.$$

Inoltre, per la detta periodicità di ϕ, si ha

$$\phi(n + \tfrac{1}{n}) = \phi(\tfrac{1}{n}) = P(\tfrac{1}{n}) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N};$$

e quindi $\lim\limits_{n\to\infty} \phi(n + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\frac{1}{n}) = P(0) = 6.$ $\square$

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(1-x^2)\,\sqrt{x(1-\cos x)}}{(\sinh x - x)\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

Svolgimento. Utilizzando le formule di McLaurin delle funzioni coinvolte, ovvero

$$\lg(1-x^2) = -x^2 + o(x^2), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad \operatorname{tg} x = x + o(x),$$

si ottiene che il limite in questione è equivalente a

$$\lim_{x\to 0+} -\frac{6x^{7/2}}{\sqrt{2}x^{7/2}} = -\frac{6}{\sqrt{2}},$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Al variare del parametro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si determini il numero di soluzioni dell'equazione*

$$2\log(ax) = x^2 + 3x - 10.$$

Svolgimento. Poniamo $f(x) = x^2 + 3x - 10 - 2\log(ax)$, ed andiamo a determinare il numero di zeri di questa funzione. Per prima cosa, osserviamo che il problema dipende dal segno del parametro a e distinguiamo quindi i due casi.

$(a < 0)$. La funzione è definita per $x \in (-\infty, 0)$ e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty.$$

Essendo $f'(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x}$, si conclude che f è decrescente in $(-\infty, -2)$ e crescente in $(-2, 0)$. Dunque, il numero di zeri dipende dal valore minimo (relativo ed assoluto) della funzione, ovvero $f(-2) = -2[6 + \log(-2a)]$; e quindi

- vi sono due zeri se $f(-2) < 0$, ovvero $a < -2e^6$,
- vi è uno zero (doppio) se $f(-2) = 0$, ovvero $a = -2e^6$,
- non vi sono zeri se $f(-2) > 0$, ovvero $0 > a > -2e^6$.

$(a > 0)$. La funzione è definita per $x \in (0, \infty)$ e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = +\infty.$$

Essendo $f'(x) = \frac{2x^2+3x-2}{x}$, si conclude che f è decrescente in $(0, \frac{1}{2})$ e crescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Dunque, il numero di zeri dipende dal valore minimo (relativo ed assoluto) della funzione, ovvero $f(1/2) = -\frac{33}{4} - 2\log(a/2)$; e quindi

- vi sono due zeri se $f(1/2) < 0$, ovvero $a > \dfrac{2}{e^{33/8}}$,
- vi è uno zero (doppio) se $f(-2) = 0$, ovvero $a = \dfrac{2}{e^{33/8}}$,
- non vi sono zeri se $f(-2) > 0$, ovvero $0 < a < \dfrac{2}{e^{33/8}}$.
  Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione*

$$z^3 - iz^2 + (5 + 2i)z + 6 + 3i = 0,$$

e si determinino il centro ed il raggio della circonferenza passante per i tre vertici del triangolo.

Svolgimento. Il polinomio dato è divisibile per $z + 1$ e quindi si ha

$$z^3 - iz^2 + (5 + 2i)z + 6 + 3i = (z + 1)(z - 3i)(z + 2i - 1),$$

da cui si conclude che i vertici del triangolo sono i punti $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo è il punto di intersezione delle rette perpendicolari ai lati, passanti per il punto medio degli stessi (gli *assi* di tali segmenti); Dunque considerando i lati P_1P_2 e P_1P_3, si determinano le equazioni degli assi

$$a_1 : x + 3y = 4 = 0 \qquad \text{ed} \qquad a_2 : x - y = 1.$$

Il centro della circonferenza cercata è quindi il punto $C = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}$ e quindi il raggio è uguale alla distanza di C dai tre vertici del triangolo, ovvero: $r = d(P_1, C) = d(P_2, C) = d(P_3, C) = \frac{\sqrt{130}}{4}$. □

ESERCIZIO 6. *Si determinino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si determinino quindi (se esistono) una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ *di* $\mathbb{R}^3$ *e delle costanti* c_1, c_2, c_3 *tali che* $\phi(v_i) = c_i v_i$, *per* $i = 1, 2, 3$.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $p_\phi(X) = X(X-2)(X-3)$ e quindi vi sono tre autovalori distinti per ϕ e perciò, necessariamente, tre sottospazi di autovettori ciascuno di dimensione 1. Precisamente, si ha

Autovalori	0	2	3
Autovettori	$\langle 2e_1 + 3e_3 \rangle$	$\langle 2e_1 - 2e_2 - e_3 \rangle$	$\langle e_1 \rangle$

Quindi i tre vettori $v_1 = 2e_1 + 3e_3$, $v_2 = 2e_1 - 2e_2 - e_3$, $v_3 = e_1$ e le costanti $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ e $c_3 = 3$ sono le quantità cercate. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} y - x = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad e \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}.$$

(a) Si mostri che le due rette sono sghembe.
(b) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ *dei punti dello spazio equidistanti da* r *ed* s.
(c) Si mostri che l'intersezione tra $\mathcal{Q}$ *ed il piano* π, *di equazione* $z = 1$, *è una coppia di rette perpendicolari e si determinino le equazioni cartesiane di tali rette.*

Svolgimento. (a). La retta r passa per il punto $R = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mentre la retta s passa per il punto $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque le due rette non sono parallele tra loro ed ovviamente non hanno punti in comune, perchè r giace nel piano $z = 0$, mentre s giace nel piano $z = 2$.

(b). Un punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è equidistante dalle due rette se, e solo se, $\frac{\|\overrightarrow{RX} \times \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\|\overrightarrow{SX} \times \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|}$; quindi le coordinate di un punto $X \in \mathcal{Q}$ devono soddisfare l'equazione $\mathcal{Q} : 4xy - 2x + 2y - 8z + 7 = 0$.

(c). I punti di intersezione tra $\mathcal{Q}$ e π sono soluzioni del sistema (di secondo grado)

$$\begin{cases} z = 1 \\ 4xy - 2x + 2y - 8z + 7 = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} z = 1 \\ (2x + 1)(2y - 1) = 0 \end{cases}$$

ed è chiaro perciò che $\mathcal{Q}\cap\pi$ si decompone nel prodotto delle due rette t_1 e t_2, di equazioni

$$t_1 : \begin{cases} z = 1 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad t_2 : \begin{cases} z = 1 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}.$$

La prima è parallela al vettore $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, mentre la seconda è parallela al vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e quindi si tratta di due rette perpendicolari che si intersecano nel punto $Q = \begin{pmatrix}-1/2\\1/2\\1\end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 8. *Si calcoli*

$$\int_0^4 x \sinh\sqrt{x}\, dx.$$

Svolgimento. Dopo il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$, ci si riduce a calcolare

$$\int_0^2 2y^3 \sinh y\, dy = \left[2y^3\cosh y - 6y^2\sinh y + 12y\cosh y - 12\sinh y\right]_0^2 = 2e^2 + \frac{38}{e^2};$$

ove la primitiva è stata determinata integrando per parti. □

ESERCIZIO 9. *Si calcoli*

$$\int_1^{+\infty} \frac{2e^x - 6e^{2x}}{e^{3x} - 7e^x + 6}\, dx.$$

Svolgimento. Dopo il cambiamento di variabile $y = e^x$, l'integrale assume la forma

$$\int_e^{+\infty} \frac{2 - 6y}{y^3 - 7y + 6}\, dy$$

ed osservando che

$$\frac{2 - 6y}{y^3 - 7y + 6} = \frac{1}{y-1} - \frac{2}{y-2} + \frac{1}{y+3},$$

si conclude che una primitiva della funzione integranda è la funzione $\lg\frac{(y-1)(y+3)}{(y-2)^2}$ e quindi l'integrale proposto è uguale a

$$\lim_{b\to\infty} \lg\frac{(b-1)(b+3)}{(b-2)^2} - \lg\frac{(e-1)(e+3)}{(e-2)^2} = \lg\frac{(e-2)^2}{(e-1)(e+3)}.$$

□

ESERCIZIO 10. *Si determinino tutte le funzioni $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, soddisfacenti alle condizioni*

$$\begin{cases} y'' - y' - 6y = 8 - 16x - 12x^2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{2x^2} = 1 \end{cases}.$$

Si determini, se esiste, una funzione soddisfacente alle condizioni dette e che si annulli nell'origine assieme alla sua derivata prima.

Svolgimento. La soluzione generale dell'equazione differenziale è uguale a $(2x^2 + 2x - 1) + c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ e la condizione sul limite impone che si abbia $c_1 = 0$. Dunque le funzioni cercate sono tutte e sole quelle del tipo $y_c(x) = (2x^2 + 2x - 1) + ce^{-2x}$, al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Una tale funzione si annulla nell'origine se, e solo se, $c = 1$; e si verifica con un calcolo diretto che anche la derivata prima di $y_1(x) = (2x^2 + 2x - 1) + e^{-2x}$ si annulla nell'origine. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 30 settembre 1997

ESERCIZIO 1. Si dica se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{(1+2n)\pi}{4}\right)}{5^n}$$

converge assolutamente ed, in caso affermativo, se ne calcoli la somma.

ESERCIZIO 2. Siano dati due numeri reali $0 < a \leq b$ e si considerino le due successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definite ponendo

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y_1 = b \\ y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2} \end{cases}.$$

Si mostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ e si deduca da ciò che $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(e^{x^2}-1)\sqrt{x(\cosh x - 1)}}{(\sin x - x)\sqrt{\log(1+x)}}.$$

ESERCIZIO 4. Si studi l'andamento della funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

ESERCIZIO 5. Si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione

$$z^3 - (2+i)z^2 + (7i-1)z = 0,$$

e si determini l'area di tale triangolo.

ESERCIZIO 6. Si determinino gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si dica se esiste una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ e delle costanti c_1, c_2, c_3 tali che $\phi(v_i) = c_i v_i$, per $i = 1, 2, 3$.

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} y - x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

(a) Si mostri che le due rette sono sghembe.
(b) Si scriva l'equazione cartesiana del luogo $\mathcal{Q}$ dei punti dello spazio equidistanti da r ed s.
(c) Si mostri che l'intersezione tra $\mathcal{Q}$ ed il piano π, di equazione $z = 1$, è una coppia di rette perpendicolari e si determinino le equazioni cartesiane di tali rette.

ESERCIZIO 8. Si determini il volume del solido che si ottiene facendo ruotare la porzione di piano posta al di sotto della curva $y = \frac{1}{2x}$ e limitata dalle curve $y = x^2$ ed $y = \sqrt{x}$.

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/x)}{(1+x^2)^{1/\alpha}}\, dx.$$

ESERCIZIO 10. Si determini la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + y' + 2y = 2x^2 + 2x + 4 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$