Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 3 febbraio 1998

ESERCIZIO 1. Si calcoli, al variare di x in $\mathbb{R}$ il limite della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, di termine generale[(†)]

$$a_n = \frac{1}{n^x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

ESERCIZIO 2. Si mostri che, per $|x| < 1$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2};$$

e se ne deduca la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

ESERCIZIO 3. Si calcoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x}.$$

ESERCIZIO 4. Si studi l'andamento della funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

ESERCIZIO 5. Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione

$$z^4 + 4(1+i)z^2 + 3 + 4i = 0,$$

e si determini l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.

ESERCIZIO 6. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'endomorfismo di matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si determinino gli autovalori di ϕ e si trovi (se esiste) una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale ϕ abbia matrice diagonale.

(†) **Suggerimento**: Si osservi che $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{[x]}}$ e si utilizzi la disuguaglianza

$$\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}} \le \int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{[x]}} \le 1 + \int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

ESERCIZIO 7. Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la retta r, passante per $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e parallela al vettore $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ed il piano $\pi : x - y + 2z = 0$.

(a) Si determinino le rette per P, parallele a π, e distanti 1 da r.

(b) Si scriva il vettore $\overrightarrow{v}$ come somma di un vettore $\overrightarrow{u}$ parallelo al piano π e di un vettore $\overrightarrow{w}$ perpendicolare a π.

ESERCIZIO 8. Si disegni la porzione di piano determinata dalle condizioni

$$\begin{cases} 1 - y2^x < 0 \\ 0 \leq 2x < 3 \\ y \leq \cos \frac{\pi x}{3} \end{cases},$$

e si determini il volume del solido che si ottiene facendo ruotare tale regione attorno all'asse x.

ESERCIZIO 9. Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cosh(1/x) - 1}{(1+x)^{1/\alpha}}\, dx.$$

ESERCIZIO 10. Si calcoli

$$\int \cos(\lg x)\, dx.$$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 18 febbraio 1998

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x) = 3x\log(\cos x)$ e siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ed $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le successioni così definite.

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{\pi}{4} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + (\pi/4)}{2} \end{cases} \qquad \text{ed} \qquad y_n = \frac{f(\pi/4) - f(x_n)}{(\pi/4) - x_n}.$$

Si calcoli (se esiste) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

ESERCIZIO 2. Si dica se converge la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-n}{n^3 - 3n^2 + 2n}$ e se ne calcoli la somma.

ESERCIZIO 3. Si considerino il polinomio $P(X) = 1 + X - X^3$ e la funzione composta $f(x) = P(x - [x])$, ove $[x]$ denota, come di consueto, la parte intera del numero reale x.

Posto

$$a_n = \frac{1}{3^n}\int_0^{3n} f(x)dx,$$

si calcoli $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ESERCIZIO 4. Si studi l'andamento della funzione

$$f(x) = x^2 + 2 - \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

ESERCIZIO 5. Si consideri l'insieme

$$I = \left\{ z^i \in \mathbb{C} \,|\, z^4 + 2 + 2i\sqrt{3},\ i = 1,2,3,4 \right\}.$$

Si disegni il poligono convesso avente come vertici gli elementi di $V = \left\{ z \in I \,|\, |z| = 2\sqrt{2} \right\}$ e se ne calcoli il perimetro.

ESERCIZIO 6. Si discutano, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \lambda x - \lambda z = 1 \\ x + (\lambda - 1)y - z = \lambda \\ -x + y + (\lambda + 1)z = \lambda - 1 \end{cases}.$$

ESERCIZIO 7. Si determini la retta s, simmetrica della retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z + 1 = 0 \end{cases}$ rispetto al piano $\pi : x + y = 2$. Si calcoli inoltre il coseno dell'angolo tra r ed s.

ESERCIZIO 8. Si calcoli

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \left[\frac{\cos x}{x(2 + \sin x)} - \frac{\lg(2 + \sin x)}{x^2}\right] dx.$$

ESERCIZIO 9. Sia S la porzione di piano comune al cerchio di centro $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ e raggio 5 ed al cerchio di ugual raggio, centrato nell'origine.

Si disegni S e si determini il volume del solido che si ottiene ruotando S attorno all'asse delle ascisse.

ESERCIZIO 10. Si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{6-7x}{x^3+2x^2+x+2}\,dx.$$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 18 giugno 1998

ESERCIZIO 1. *Si consideri la funzione* $f(x) = 2e^{\cos x - \sin x}$ *e siano* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ed* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *le successioni così definite.*

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{\pi}{4} \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + (\pi/4)}{2} \end{cases} \qquad ed \qquad y_n = \frac{f(\pi/4) - f(x_n)}{(\pi/4) - x_n}.$$

Si calcoli (se esiste) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Svolgimento. La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è caratterizzata dal fatto che il punto x_{n+1} è il punto medio tra x_n e $\pi/4$ è quindi chiaro che la successione tende (crescendo) al punto $\pi/4$. Inoltre $f(x)$ è derivabile indefinitamente su tutta la retta reale e quindi, ricordando il *Teorema del valor medio*, si può affermare che $y_n = f'(\xi_n)$ per qualche punto ξ_n, compreso tra x_n e $\pi/4$. Si conclude quindi che

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f'(x) = f'(\pi/4) = -2\sqrt{2};$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si mostri che, per* $|x| < 1$, *si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2};$$

e se ne deduca la somma della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{3n-1}{3^n}$.

Svolgimento. Per valori di $x \in \mathbb{C}$ nel disco $|x| < 1$ la serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ converge assolutamente e coincide con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. La serie che si ottiene derivando termine a termine la serie detta, converge quindi alla derivata della funzione $f(x)$ e si ottiene così l'uguaglianza richiesta.

Infine, per quanto riguarda la somma della serie, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^{n-1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{(1-\frac{1}{3})} = \frac{3}{4};$$

ove la prima uguaglianza ha senso perchè entrambo le serie a destra del segno di uguale convergono. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos(1/x)}{1-\cos x}.$$

Svolgimento. Il limite vale 0. Infatti, si ha

$$\frac{x^3 \cos(1/x)}{1-\cos x} = \frac{x^2}{1-\cos x}\, x \cos(1/x)$$

ed è immediato verificare che il primo fattore tende a 2 (tramite lo sviluppo di McLaurin, ad esempio), mentre il secondo tende a zero perchè è prodotto di una funzione limitata ($\cos(1/x)$) con la funzione x, che tende a zero. □

ESERCIZIO 4. *Si studi l'andamento della funzione*

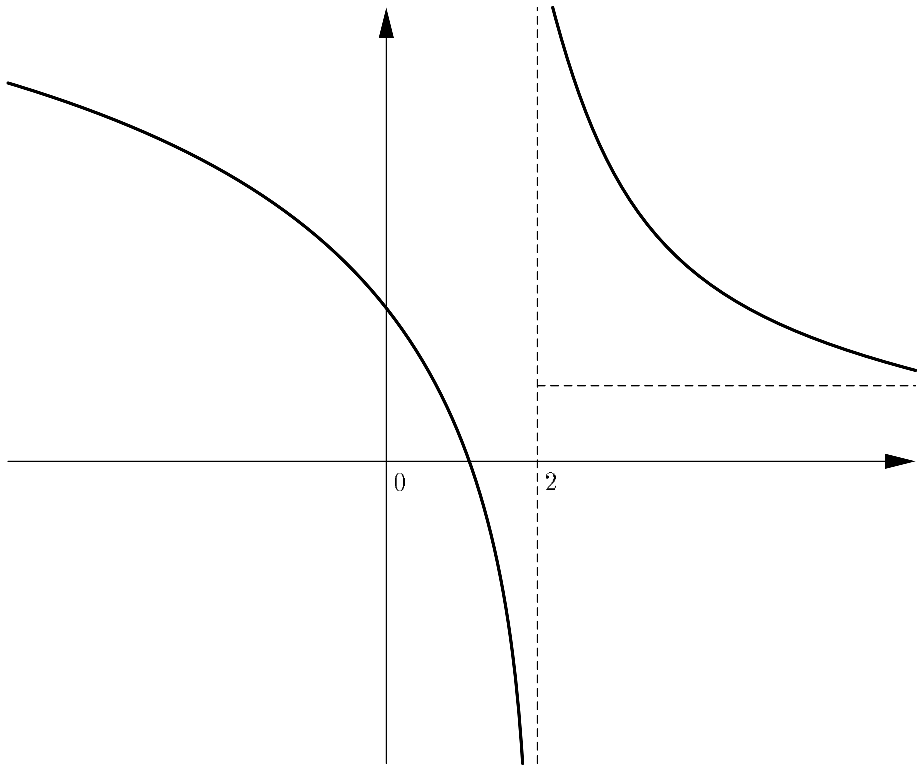
$$f(x) = \frac{2\sinh x - 3}{e^x - e^2}$$

e se ne tracci un grafico indicativo.

Svolgimento. Ricordando che $2\sinh x = e^x - e^{-x}$, si verifica facilmente che $f(x)$ è la funzione composta $g(h(x))$, ove $h(x) = e^x$ e $g(y) = \frac{y^2-3y-1}{y(y-e^2)}$. In particolare, f è definita per $x \neq 2$. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^+} g(y) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = 1,$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{y\to e^{2-}} g(y) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{y\to e^{2+}} g(y) = +\infty.$$

Inoltre, $f'(x) = g'(h(x))h'(x)$ e $g'(y) = -\dfrac{(e^2-3)y^2 - 2y + e^2}{y^2(y-e^2)^2}$, da cui si deduce che $f(x)$ è decrescente nelle due semirette $(-\infty, 2)$ e $(2, \infty)$. Si può quindi tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione.



La risposta è ora completa. □

ESERCIZIO 5. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione*

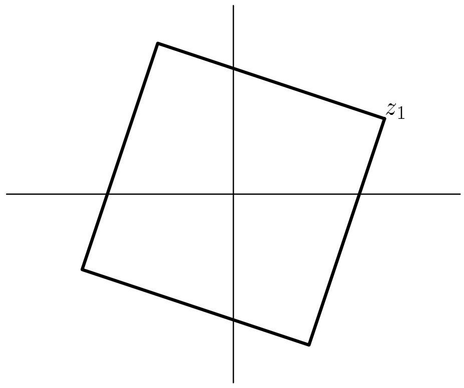
$$z^4 + 7 - 24i = 0,$$

e si determinino il perimetro e l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.

Svolgimento. Si tratta di determinare le quattro radici quarte del numero complesso $-7+24i$.

Se z_1 è una di queste radici, i quattro numeri cercati sono $z_1, iz_1, -z_1, -iz_1$, che formano i vertici di un quadrato, centrato nell'origine e con la diagonale uguale a $2|z_1|$. Dunque, l'area ed il perimetro del quadrato sono rispettivamente $2|z_1|^2$ e $4\sqrt{2}|z_1|$.

Non ci resta quindi altro da fare che determinare $z_1 = 2+i$, tramite due successive estrazioni di radice quadrata, e concludere che Area $= 10$, Perimetro $= 4\sqrt{10}$. A fianco tracciamo il disegno della situazione. La risposta è ora completa.



□

ESERCIZIO 6. *Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'endomorfismo di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

rispetto alla base canonica.

Si determinino gli autovalori di ϕ e si trovi (se esiste) una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale ϕ abbia matrice diagonale.

Svolgimento. Il polinomio caratteristico è $(3-x)(x+3)(x-1)$, e si ha

Autovalori	-3	1	3
Autovettori	$\langle e_1 - 7e_2 + 6e_3 \rangle$	$\langle e_1 + 5e_2 + 2e_3 \rangle$	$\langle e_1 - e_2 \rangle$

□

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i piani $\pi_1 : x - y + 2z = 0$ e $\pi_2 : x + 2y - z = 0$.*

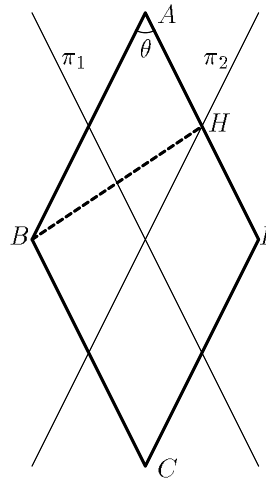
(a) Si determinino (se esistono) le rette aventi distanza $\frac{1}{\sqrt{6}}$ da entrambo i piani.

(b) Fissato un piano τ, perpendicolare alla retta $\pi_1 \cap \pi_2$, si determini il perimetro del poligono avente come vertici le intersezioni di τ con le rette del punto precedente.

Svolgimento. Le rette cercate sono le intersezioni tra i piani che hanno distanza $1/\sqrt{6}$ dai piani dati. Poichè la distanza tra due piani paralleli, $ax+by+cz=d_1$ e $ax+by+cz=d_2$, è uguale a $\delta = \dfrac{|d_2-d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (perchè?), si conclude che dobbiamo considerare le intersezioni tra i quattro piani

$$\sigma_1 : x - y + 2z = 1, \quad \tau_1 : x - y + 2z = -1, \quad \sigma_2 : x + 2y - z = 1, \quad \tau_2 : x + 2y - z = -1.$$

Le quattro rette così ottenute sono parallele alla retta $\pi_1 \cap \pi_2$ e quindi tagliano su ogni piano perpendicolare a $\pi_1 \cap \pi_2$ la stessa figura (cf. il disegno indicativo di una tale sezione qui a fianco). Dalla costruzione si conclude che si tratta di un parallelogramma ed in particolare di un rombo, perchè le due altezze del parallelogramma sono entrambo uguali a $2/\sqrt{6}$, dovendo coincidere con le distanze tra σ_1 e τ_1 e tra σ_2 e τ_2. Si conclude così che il lato del rombo è uguale a $|AB| = \frac{|BH|}{\sin\theta}$, ove θ è uguale all'angolo tra i due piani π_1 e π_2. Indicati con n_1 ed n_2 dei vettori ortogonali ai piani π_1 e π_2, rispettivamente, si ha



$$\cos\theta = \frac{|\langle n_1, n_2\rangle|}{\|n_1\|\|n_2\|} = \frac{1}{2}, \quad |AB| = \frac{2/\sqrt{6}}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Il perimetro del rombo è quindi $4|AB| = \frac{8\sqrt{2}}{3}$. □

ESERCIZIO 8. *Si indichi con $V(\alpha)$ il volume del solido ottenuto ruotando il sottografico della funzione x^α per $0 \le x \le 2$. Si dia una formula esplicita per la funzione $V(\alpha)$ e se ne determinino i punti di massimo e di minimo, al variare di α in* $[0,1]$.

Svolgimento. Si ha

$$V(\alpha) = \pi \int_0^2 x^{2\alpha} dx = \pi \left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right]_0^2 = \pi \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}, \qquad \text{se } \alpha \neq -\frac{1}{2}.$$

Dunque, $V(\alpha)$ è una funzione continua e derivabile per $\alpha \in [0,1]$, e si ha $V'(\alpha) = \frac{2^{2\alpha+2}}{(2\alpha+1)^2}(2\alpha\log 2 + \log 2 - 1)$, che si annulla in $\alpha_0 = \frac{1-\log 2}{2\log 2} \in (0,1)$ che è un punto di minimo relativo (ed assoluto) per $V(\alpha)$. Calcolando $V(0) = 2\pi$ e $V(1) = \frac{8}{3}\pi$, si vede che il punto di massimo assoluto è $\alpha_1 = 1$. □

ESERCIZIO 9. *Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - x\,\mathrm{arctg}(1/x)}{x(1+x)^{1/\alpha}}\, dx.$$

Svolgimento. L'integrale converge per $\alpha < -\dfrac{1}{2}$ oppure per $\alpha > 0$, perchè la funzione integranda è asintoticamente equivalente ad $\frac{1}{x^{3+\frac{1}{\alpha}}}$. Infatti, si ha $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}(1/x)}{\frac{1}{x^3}} = \dfrac{1}{3}$. □

ESERCIZIO 10. *Si calcoli*

$$\int \sin(\lg x)\, dx.$$

Svolgimento. Applicando due volte il metodo di integrazione per parti, si ottiene

$$\int \sin(\lg x)\, dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + c.$$

□

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 8 luglio 1998

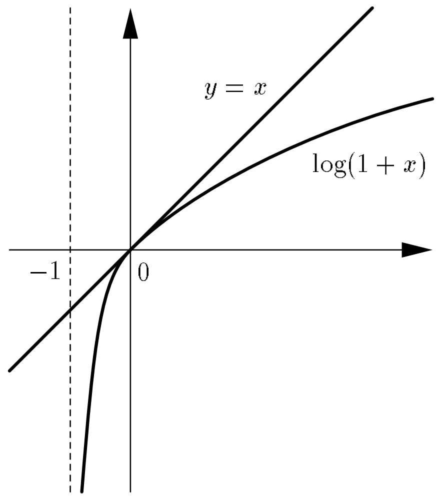
ESERCIZIO 1. *Si consideri la successione definita ricorsivamente ponendo*

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \log(1 + |x_n|) \end{cases}$$

Si mostri che la successione è a termini positivi e decrescente e se ne calcoli il limite.

Svolgimento. Si veda la figura qui a lato.

Il logaritmo di $1 + x$ è positivo se, e solo se, $x > 0$; quindi, per la formula ricorsiva, se il termine x_n è positivo, tale deve essere anche x_{n+1}. Poichè $x_0 = 1 > 0$, si conclude *per induzione* che tutti i termini della successione sono positivi. In particolare, ciò significa che $x_{n+1} = \log(1 + x_n)$ e ricordando che $\log(1 + x) \leq x$ per ogni numero reale $x > -1$, si conclude che la successione è decrescente. Dunque, essendo una successione monotòna e limitata deve convergere ed indichiamo con ℓ il suo limite. Per la continuità della funzione logaritmo, ed il teorema di unicità del limite, si ricava dalla relazione ricorsiva che $\ell = \log(1 + \ell)$ e quindi $\ell = 0$ essendo questo l'unico punto di intersezione tra il grafico della funzione concava $\log(1 + x)$ e la sua tangente nell'origine $y = x$.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{\pi}{5n} + n\pi)}{n}$$

.

Svolgimento. Dalla formula di addizione per la funzione coseno e dall'osservazione che $\cos(n\pi) = (-1)^n$, si deduce che il termine generale della serie è uguale a $(-1)^n \frac{\cos(\frac{\pi}{5n})}{n}$. Si tratta quindi di una serie a termini di segno alterno, ed il termine generale è decrescente in valore assoluto. Infatti,

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{5n})}{n} \geq \frac{\cos(\frac{\pi}{5(n+1)})}{n+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{n+1}{n} \geq \frac{\cos(\frac{\pi}{5(n+1)})}{\cos(\frac{\pi}{5n})};$$

e

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{5(n+1)})}{\cos(\frac{\pi}{5n})} \leq \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{5n})} \leq \frac{1}{1 - \frac{(\pi/5n)^2}{2}} \leq 1 + \left(\frac{\pi}{5n}\right)^2 < \frac{n+1}{n}.$$

Dunque, si può applicare il *Criterio di Leibniz*, e si ha che la serie converge se, e solo se, $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(\pi/5n)}{n} = 0$. Ciò è vero perchè il numeratore è una successione limitata (convergente ad 1), mentre il denominatore è una successione divergente. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 \sinh x - (\operatorname{tg} x)^2\sqrt{x^5}}{\cos x + \cosh x - 2}.$$

Svolgimento. Ricordando che

$$\begin{aligned} \sinh x &= x + o(x), & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),\\ \operatorname{tg} x &= x + o(x), & \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \end{aligned}$$

si ha che il limite in questione coincide, per il *Principio di cancellazione degli infinitesimi superiori*, con il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{x^4/12} = 12$. □

ESERCIZIO 4. *Si determinino (se esistono) delle costanti reali a e b per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} - 2 & \text{se } |x| \le 4 \\ ax^2 + b & \text{se } |x| > 4 \end{cases}$$

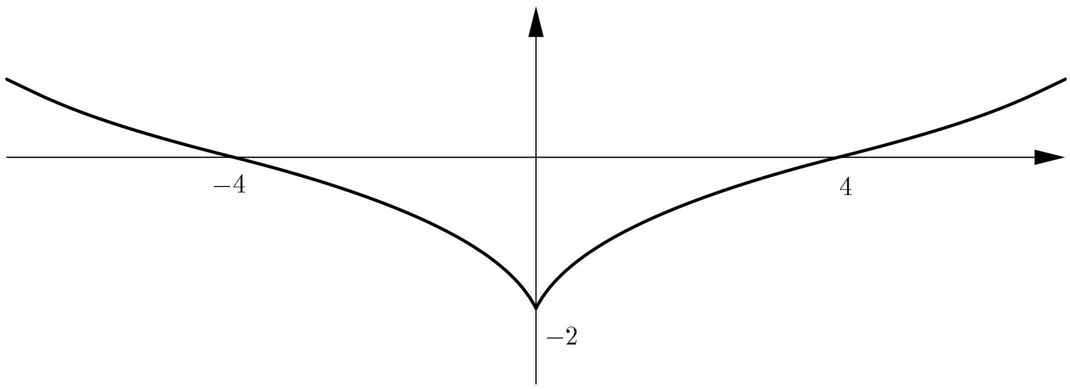
sia continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si tracci un grafico indicativo dell'andamento di tale funzione.

Svolgimento. Qualunque siano a e b, si ha $f(x) = f(-x)$ e quindi è sufficiente studiare il problema sulla semiretta $(0, +\infty)$. La funzione $\sqrt{|x|} - 2$ è continua per ogni numero reale x ed è derivabile per $x \neq 0$. Quindi restringendoci all'intervallo $[0, 4]$, si ha che f è continua in tale intervallo e derivabile in $(0, 4)$, con derivata uguale a $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. In particolare, si ha $f(4) = 0$ ed $f'_-(4) = \lim_{x\to 4^-} f'(x) = 1/4$.

D'altro canto, qualsiasi siano a e b, il polinomio $ax^2 + b$ è una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale, con derivata uguale a $2ax$. Dunque si ha

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = 16a + b \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 4^+} f'(x) = 8a,$$

e si conclude che, affinchè f sia continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, deve aversi $a = 1/32$, e $b = -1/2$.



Qui sopra abbiamo tracciato un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$. □

ESERCIZIO 5. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauss i quattro punti corrispondenti alle soluzioni dell'equazione*

$$z^4 + 3iz^2 - 2 = 0,$$

e si determini il raggio del più piccolo disco chiuso, centrato nell'origine, contenente i quattro punti.

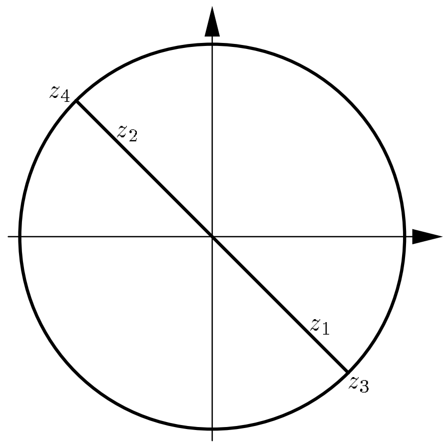
Svolgimento. Si tratta di un'equazione biquadratica.

Posto $w = z^2$, deve aversi, $w^2 + 3iw - 2 = 0$, e quindi $w = \dfrac{-3i \pm i}{2}$.

Si ha così $z^2 = -i$, oppure $z^2 = -2i$, e le soluzioni di queste due ultime equazioni sono

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1),$$
$$z_3 = 1-i, \quad z_4 = i-1.$$

I quattro punti sono tutti multipli di $1-i$ e quindi sono allineati e determinano così un quadrilatero di area nulla, contenuto nel disco di raggio $\sqrt{2}$. Si veda il disegno qui a fianco.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo di matrice*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'endomorfismo ϕ_α ha tre autovalori distinti.
(b) Si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui ϕ_3 abbia matrice diagonale.

Svolgimento. Sviluppando il determinante di $A_\alpha - x\mathbf{1}$ relativamente alla seconda riga, si ottiene il polinomio caratteristico di ϕ_α

$$((\alpha+1) - x)(2-x)(\alpha - x)$$

che ammette radici tutte distinte per $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 2$. In particolare per $\alpha = 3$ si hanno i tre autovalori distinti $2, 3, 4$ con i relativi sottospazi di autovettori, generati da $e_1 - e_3$, e_3, $3e_1 - 2e_2 - 3e_3$. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e la retta $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$.*

Si determinino i punti $C \in r$ per cui il triangolo ABC risulti rettangolo in C e si calcoli l'area di tali triangoli.

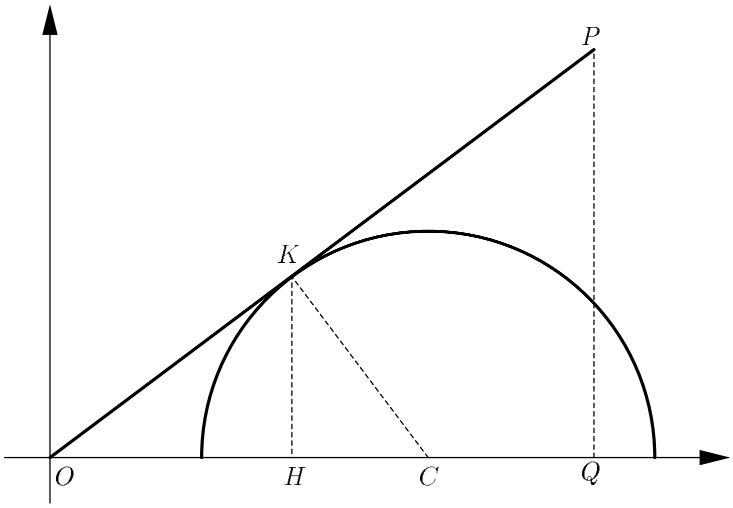
Svolgimento. Equazioni parametriche per r sono $\begin{cases} x = t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$. Dunque se $C = \begin{pmatrix} t \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$ è il generico punto su r, il triangolo ABC risulta rettangolo in C se e solo se $\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle \begin{pmatrix} t+1 \\ -2 \\ t-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t-3 \\ 2 \\ t-5 \end{pmatrix} \rangle = 2t^2 - 10t + 8 = 0$.

Si trovano le due soluzioni $t_1 = 1$ e $t_2 = 4$, alle quali corrispondono i due punti $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Infine l'area è data da $1/2\,||\overrightarrow{AC}||\,||\overrightarrow{BC}|| = 1/2\,[(t+1)^2+4+(t-3)^2]^{1/2}\,[(t-3)^2+4+(t-5)^2)]^{1/2}$, perciò si trova che l'area di ABC_1 è $6\sqrt{2}$ e quella di ABC_2 è $3\sqrt{5}$. □

ESERCIZIO 8. *Si consideri il cono ottenuto ruotando attorno all'asse delle ascisse il grafico della funzione* $f(x) = \frac{3x}{4}$ *sull'intervallo* $[0, 12]$. *Si inserisca all'interno del cono una sfera di raggio* 5, *facendola aderire alle pareti e si determinino le ascisse del centro della sfera e dei punti di contatto tra la sfera ed il cono. Si misuri infine il volume compreso tra la superficie esterna della sfera e la base del cono.*

Svolgimento. Tracciamo un disegno della situazione descritta nel problema.



Per determinare il centro C della sfera, si possono considerare i due triangoli simili OPQ ed OCK, da cui si ottiene che C è il punto di ascissa $\frac{25}{3}$. Analogamente, considerando i triangoli simili OPQ ed HCK, si ricava che il punto H ha ascissa $\frac{16}{3}$.

Il volume cercato si ottiene facendo ruotare la porzione di piano al di sotto del grafico di $f(x) = \frac{3x}{4}$ ed al di sopra della semicirconferenza –grafico di $g(x) = \sqrt{25 - (x - \frac{25}{3})^2}$– quando $x \in [\frac{16}{3}, 12]$. Si tratta quindi di calcolare

$$V = \pi \int_{16/3}^{12} [f(x)^2 - g(x)^2] dx = 25\pi \int_{16/3}^{12} \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{16}{9} \right) dx = \frac{1300}{3}\pi.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 9. *Si dica per quali valori del parametro* α *converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sinh(1/x) - 1}{x^2(1+x)^{1/\alpha}}\, dx.$$

Svolgimento. Osservando che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\sinh(1/x)-1}{x^2(1+x)^{1/\alpha}}}{\frac{1}{x^{4+1/\alpha}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{\sinh y - y}{y^3} \frac{1}{y+1} = \frac{1}{3!},$$

ed applicando il *criterio del confronto asintotico*, si conclude che l' integrale in questione converge se, e solo se, $4 + \frac{1}{\alpha} > 1$ e quindi per $\alpha > 0$, oppure per $\alpha < -\frac{1}{3}$. □

ESERCIZIO 10. *Si calcoli*

$$\int x^2 \cos(\lg x)\, dx.$$

Svolgimento. Integrando due volte per parti, si ha

$$\int x^2 \cos(\lg x)\, dx = \frac{x^3}{10}\,[3\cos(\log x) + \sin(\log x)]) + c.$$

□

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 10 settembre 1998

ESERCIZIO 1. *Al variare di t tra i numeri reali non negativi, si calcoli il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{\sqrt{t}}{n}\right).$$

Svolgimento. Osserviamo che

$$n\log\left(1+\frac{\sqrt{t}}{n}\right) = \log\left(1+\frac{\sqrt{t}}{n}\right)^n$$

e che, per ogni numero reale c, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n = e^c.$$

Per la continuità della funzione logaritmo, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{\sqrt{t}}{n}\right) = \sqrt{t}$$

per ogni $t \geq 0$. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\tfrac{1}{n}+\tfrac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{1}{n}-\tfrac{n\pi}{2}\right)\right].$$

Svolgimento. Dalle formule di prostaferesi, si ricava che il termine generale della serie è uguale a

$$\sin\left(\frac{1}{n}+n\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}-n\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2(-1)^k\sin\left(\frac{1}{2k}\right) & \text{se } n=2k \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}.$$

Si tratta quindi di studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k \sin\left(\frac{1}{2k}\right).$$

La serie ha i termini di segno alterno, ed il termine generale è decrescente in valore assoluto, perchè la funzione $\sin x$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0,1]$. Dunque, si può applicare il *Criterio di Leibniz*, e si ha che la serie converge se, e solo se, $\lim_{k\to\infty}\sin\left(\frac{1}{2k}\right) = 0$ e ciò è vero. $\square$

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x(\operatorname{tg} x - \sinh x) - \log(1-x)\sqrt{2x^7+x^{11}}}{1-\cos x\cosh x}.$$

Svolgimento. Ricordando che

$$\log(1-x) = x + o(x), \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \sin x = x + o(x), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

ed osservando che, per x tendente a 0, la funzione $\log(1-x)\sqrt{2x^7+x^{11}}$ è un infinitesimo trascurabile rispetto ad x^4, si ha che il limite in questione coincide, per il *Principio di cancellazione degli infinitesimi superiori* con il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4/3!}{x^4/3!} = 1$. □

ESERCIZIO 4. *Si determinino (se esistono) delle costanti reali a e b per cui la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \log \frac{1+x^2}{5} & \textit{se } |x| \le 2 \\ ax^2+b & \textit{se } |x| > 2 \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutta la retta reale e si tracci un grafico indicativo dell'andamento di tale funzione.

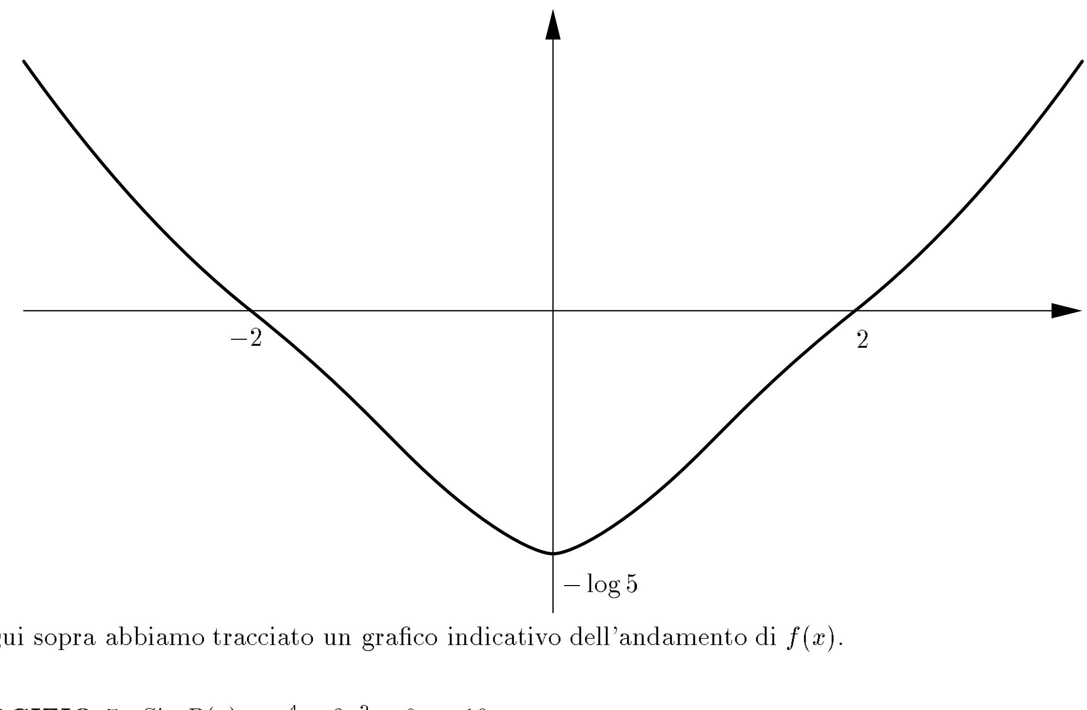
Svolgimento. La funzione $\log \frac{1+x^2}{5}$ è continua e derivabile per ogni numero reale x. Quindi, restringendoci all'intervallo $[-2,2]$, si ha che f è continua in tale intervallo e derivabile in $(-2,2)$, con derivata uguale a $\frac{2x}{1+x^2}$. In particolare, si ha

$$f(\pm 2) = 0, \qquad f'_-(2) = \lim_{x\to 2^-} f'(x) = 4/5, \qquad f'_+(-2) = \lim_{x\to -2^+} f'(x) = -4/5$$

D'altro canto, qualsiasi siano a e b, il polinomio ax^2+b è una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale, con derivata uguale a $2ax$; e si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x) = 4a+b, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 4a, \quad \lim_{x\to -2^-} f'(x) = -4a.$$

Si conclude che, affinchè f sia continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, deve aversi $a = 1/5$, e $b = -4/5$.



Qui sopra abbiamo tracciato un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$. □

ESERCIZIO 5. *Sia $P(z) = z^4 + 3z^2 - 6z + 10$.*
(a) Si determini il polinomio $Q(z)$ tale che $P(z) = Q(z)(z^2 - 2z + 2)$.
(b) Si disegni nel piano di Argand-Gauss il quadrilatero avente come vertici le soluzioni dell'equazione $P(z) = 0$.
(c) Si determini il volume del solido che si ottiene ruotando il quadrilatero detto attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. Osserviamo che $P(z)$ è un polinomio a coefficienti reali e quindi che, se z_0 è una radice di $P(z)$ anche $\overline{z}_0$ è radice di $P(z)$.

(a). Applicando l'algoritmo euclideo di divisione, si ottiene che $Q(z) = z^2 + 2z + 5$.

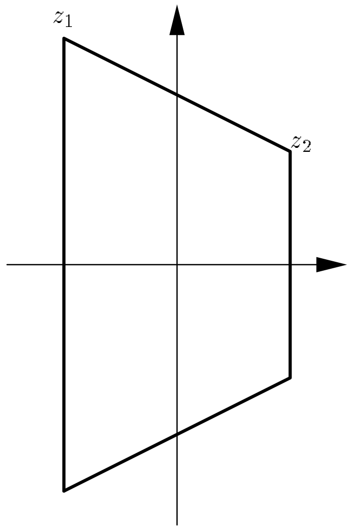
(b). le radici di $Q(z)$ sono

$$z_1 = -1 + 2i \quad \text{e} \quad \overline{z}_1 = -1 - 2i,$$

mentre le radici di $z^2 - 2z + 2$ sono

$$z_2 = 1 + i \quad \text{e} \quad \overline{z}_2 = 1 - i.$$

Dunque i quattro punti sono i vertici di un trapezio isoscele, simmetrico rispetto all'asse delle ascisse. Tracciamo qui a fianco un disegno del quadrilatero.



(c). Si tratta di determinare il volume del solido (tronco di cono) che si ottiene ruotando attorno all'asse delle ascisse il grafico della funzione $f(x) = \frac{3-x}{2}$ sull'intervallo $[-1, 1]$. Dunque

$$\text{Vol} = \pi \int_{-1}^{1} \frac{(3-x)^2}{4}\, dx = \frac{3\pi}{2}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo $\phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determinino gli autovalori di ϕ.

(b) ϕ risulta diagonalizzabile?

Svolgimento. Sviluppando il determinante di $A - x\mathbf{1}$ relativamente alla terza riga, si ottiene il polinomio caratteristico di ϕ

$$(1-x)[(2-x)^2 - 1] = (1-x)[(2-x)+1][(2-x)-1] = (1-x)^2(3-x).$$

Gli autovalori di ϕ sono dunque 1 con molteplicitá due, e 3 con molteplicitá uno.

L'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 si determina risolvendo il sistema omogeneo di matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e si ottiene quindi lo spazio monodimensionale $V_1 = \langle (1, -1, 0) \rangle$. Perció ϕ non è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino il piano $\pi : x + y - 2 = 0$ e la retta $r : 2x = 2y = -z - 1$.*

(a) Si determini la retta r' proiezione ortogonale di r su π.
(b) Si calcoli il coseno dell'angolo tra le rette r ed r'.

Svolgimento. Poiché equazioni parametriche per r sono $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1-2t \end{cases}$, il generico punto su r è $P_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 1-2\lambda \end{pmatrix}$, con λ reale. Inoltre, un vettore normale al piano π è $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta per P_λ e normale a π è dunque $s_\lambda : \begin{cases} x = \lambda + t \\ y = \lambda + t \\ z = -1-2\lambda \end{cases}$. Perció il punto $s_\lambda \cap \pi$ si ottiene su s_λ per l'ascissa t tale che $(\lambda+t)+(\lambda+t)-2 = 0$, cioè $t = 1-\lambda$. Si ottiene così la retta $r' : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1-2t \end{cases}$.

Infine, poichè vettori paralleli ad r ed r' sono, rispettivamente, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, si ottiene $\cos\alpha(r, r') = \frac{|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle|}{||\vec{v}||,||\vec{w}||} = 2/\sqrt{6}$ □

ESERCIZIO 8. *Si calcolino la lunghezza dell'arco della parabola $y = x^2 + 1$, quando x varia in $[0, 1]$, ed il volume del solido prodotto dalla rotazione di tale arco attorno all'asse delle ascisse.*

Svolgimento. Indicati rispettivamente con L e V la lunghezza ed il volume cercati, si ha

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \frac{1}{16}\left(4\log(2+\sqrt{5}) + (2+\sqrt{5})^2 - \frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}\right);$$
$$V = \pi \int_0^1 (1+x^2)^2\, dx = \frac{28}{15}\pi.$$

Il primo integrale può essere calcolato, ad esempio, tramite la sostituzione $2x = \sinh t$ e si ha

$$\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\log(2+\sqrt{5})} (\cosh t)^2\, dt \qquad \text{e} \qquad \int (\cosh t)^2\, dt = \frac{1}{2}(t + \sinh t \cosh t) + c.$$

Il secondo integrale non presenta nessuna difficoltà di calcolo. □

ESERCIZIO 9. *Si dica per quali valori del parametro α converge l'integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 - x\log(\frac{x+1}{x})}{x(1+x)^{1/\alpha}}\, dx.$$

Svolgimento. Osservando che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-x\log(\frac{x+1}{x})}{x(1+x)^{1/\alpha}}}{\frac{1}{x^{2+1/\alpha}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{y - \log(1+y)}{y^2} = \frac{1}{2},$$

ed applicando il *criterio del confronto asintotico*, si conclude che l' integrale in questione converge se, e solo se, $2 + \frac{1}{\alpha} > 1$ e quindi per $\alpha > 0$, oppure per $\alpha < -1$. □

ESERCIZIO 10. *Sapendo che* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, *si calcoli*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx.$$

Svolgimento. Integrando per parti, si ha

$$\int \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx = \frac{\cos x - 1}{x} + \int \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Se si osserva che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Si conclude che l'integrale proposto coincide con $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 28 settembre 1998

ESERCIZIO 1. *Al variare di t tra i numeri reali, si calcoli il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left[\left(1+\frac{t}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^t\right].$$

Svolgimento. Si ha

$$n^2 \log\left[\left(1+\frac{t}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^t\right] = n^2\left[\log\left(1+\frac{t}{n}\right) + t\log\left(1-\frac{1}{n}\right)\right].$$

Sia $y = \frac{1}{n}$ ed osserviamo che $y \to 0^+$ quando $n \to \infty$ e quindi possiamo utilizzare gli sviluppi di McLaurin delle funzioni coinvolte nel limite. In particolare, per $y \to 0^+$, si ha

$$\log(1+ty) = ty - \frac{(ty)^2}{2} + o(y^2) \qquad \text{e} \qquad \log(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Si conclude quindi che il limite proposto coincide con

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\log(1+ty) + t\log(1-y)}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-\frac{(ty)^2}{2} - \frac{ty^2}{2} + o(y^2)}{y^2} = -\frac{t^2+t}{2}$$

che è quanto dovevamo calcolare. □

ESERCIZIO 2. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\frac{(1+n^2)\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{(1-n^2)\pi}{2n}\right)\right].$$

Svolgimento. Dalle formule di prostaferesi, si ricava che il termine generale della serie è uguale a

$$\cos\left(\frac{(1+n^2)\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{(1-n^2)\pi}{2n}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 2(-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right) & \text{se } n = 2k-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si tratta quindi di studiare la convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right).$$

La serie ha i termini di segno alterno, ed il termine generale è decrescente in valore assoluto, perchè la funzione $\sin x$ è strettamente crescente nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dunque, si può applicare il *Criterio di Leibniz*, e si ha che la serie converge se, e solo se, $\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2(2k-1)}\right) = 0$ e ciò è vero. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\log x}}{e^{1/x} + \frac{1}{\tanh^2 x}}.$$

Svolgimento. Per $x \to 0^+$, si ha $\tanh x = x + o(x)$; quindi $\dfrac{1}{\tanh^2 x} = \dfrac{1}{x^2} + o(1/x^2)$ ed $\dfrac{1}{x^2}$ è trascurabile rispetto ad $e^{1/x}$, come si verifica facilmente osservando che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x^2}{e^{1/x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0.$$

In base al principio di cancellazione delle funzioni trascurabili, si ha quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\log x}}{e^{1/x} + \frac{1}{\tanh^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\log x}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\log x)^2 - 1/x}.$$

A questo punto, basta ricordare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x(\log x)^2 - 1}{x} = -\infty$$

per concludere che il limite in questione è uguale a zero. □

ESERCIZIO 4. *Si studi la funzione*

$$f(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x+2}}}{x+2},$$

facendo particolare attenzione al comportamento al bordo dell'insieme di definizione e ad eventuali valori massimi e minimi. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$.

Svolgimento. La funzione è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, e si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty;$$

inoltre, utilizzando la sostituzione

$$t = \frac{x-1}{x+2} \qquad \text{e quindi} \quad x+2 = \frac{3}{1-t}, \quad x-1 = \frac{3t}{1-t},$$

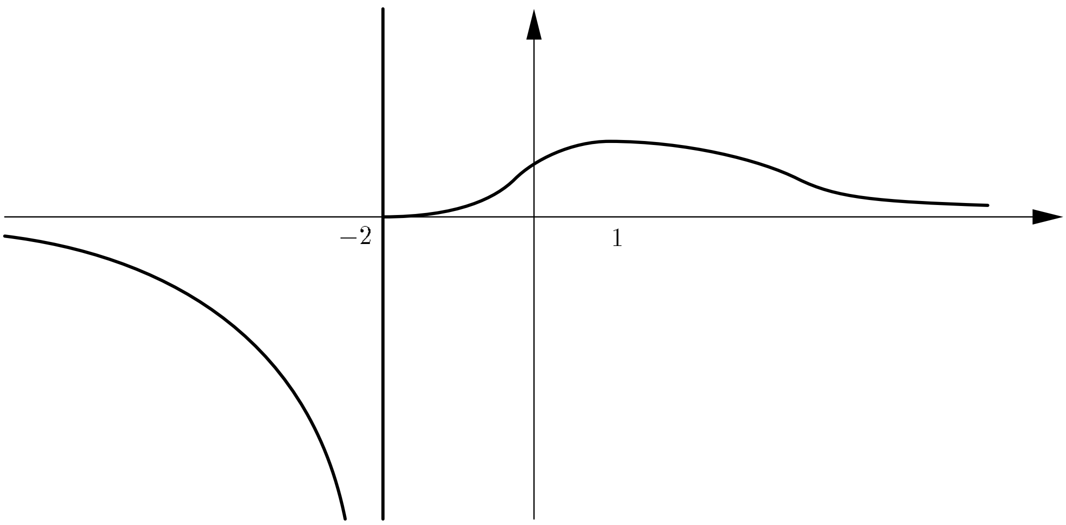
si ha

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{t\to-\infty} \tfrac{1}{3}(1-t)e^t = 0.$$

La funzione è derivabile in ogni punto di D e si ha

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x-1}{x+2}}}{(x+2)^2}\,\frac{1-x}{x+2};$$

dunque f è decrescente nelle semirette $(-\infty,-2)$, $(1,+\infty)$, mentre è crescente nell'inervallo $(-2,1)$. Si conclude quindi che per $x=1$ la funzione assume un valore massimo (relativo ed assoluto), uguale ad $f(1) = \frac{1}{3}$. Osserviamo in particolare che, tramite la sostituzione scritta sopra è facile verificare che $\lim_{x\to-2^+} f'(x) = 0$ e quindi siamo già in grado di tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione.



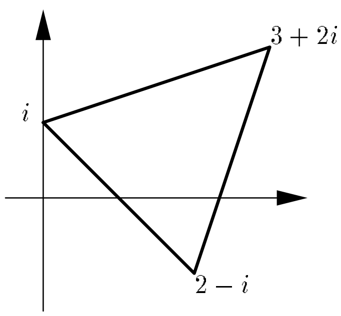
Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Sia* $P(z) = z^3 - (5+2i)z^2 + (7+6i)z + (1-8i)$.

(a) Si verifichi che $P(i) = 0$ *e si disegni nel piano di Argand-Gauss il triangolo avente come vertici le soluzioni dell'equazione* $P(z) = 0$.

(b) Si determini l'area di tale triangolo.

Svolgimento. (a). La verifica che $P(i) = 0$ è un facile calcolo ed implica che $P(z)$ è divisibile per $z - i$.



In particolare, si ha

$$P(z) = (z-i)(z^2-(5+i)z+(8+i)) = (z-i)(z-2+i)(z-3-2i).$$

Il triangolo che ha come vertici le soluzioni dell'equazione è quindi disegnato qui a fianco.

(b). I vertici del triangolo sono i punti di coordinate

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dunque l'area del triangolo è $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = 4$ e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Si consideri l'endomorfismo* $\phi_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *di matrice*

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica.

(a) Si determini il valore reale α_0 *per cui* ϕ_{α_0} *non è invertibile.*

(b) Si determinino gli autovalori ed autovettori di ϕ_{α_0}.

Svolgimento. L'endomorfismo ϕ_α non è invertibile se e solo se il determinante della matrice A_α associata a ϕ_α è nullo. Si trova dunque il valore reale $\alpha_0 = 2$.

Sviluppando quindi il determinante di $A_2 - x\mathbb{1}$ relativamente alla prima riga, si ottiene il polinomio caratteristico di ϕ_2

$$(1-x)[(1-x)(2-x)-1] - (1-x) = (1-x)(x^2-3x) = (1-x)x(x-3).$$

Gli autovalori di ϕ_2 sono dunque 1, 0 e 3.

L'autospazio V_1 relativo all'autovalore 1 si determina risolvendo il sistema omogeneo associato alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, e si ottiene quindi il primo autospazio $V_1 = \langle (1,1,0) \rangle$. Analogamente si ottengono gli altri autospazi $V_0 = \langle (1,-1,-1) \rangle$ e $V_3 = \langle (1,-1,2) \rangle$. □

ESERCIZIO 7. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino la retta* r *ed il punto* P, *ove*

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 4 = 0 \end{cases} \qquad e \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determinino i piani per P *che distano 1 da* r.

(b) Si determinino le rette per P, ortogonali ad r, che distano 1 da r.

Svolgimento. Il generico piano per r è $\pi_{\lambda,\mu}\colon \lambda x - \lambda y + \mu z + 4\mu = 0$. Poichè la distanza di $\pi_{\lambda,\mu}$ da P è data da $\frac{|2\lambda+7\mu|}{\sqrt{2\lambda^2+\mu^2}}$, si ottiene che $\pi_{\lambda,\mu}$ ha distanza 1 da P se e solo se $(2\lambda+7\mu)^2 = 2\lambda^2+\mu^2$, cioè se e solo se $\lambda^2+14\lambda\mu+24\mu^2=0$, che ha per soluzioni $\lambda/\mu=-12$ e $\lambda/\mu=-2$. Si ottengono perciò due piani per r, che distano 1 da P, di equazioni, rispettivamente, $12x-12y-z-4=0$ e $2x-2y-z-4=0$. I piani cercati in (a) sono quindi paralleli a questi ultimi, e passanti per P. Essi sono dunque $\sigma_1\colon 12x-12y-z-21=0$ e $\sigma_2\colon 2x-2y-z-1=0$.

Le rette richieste in (b) si ottengono intersecando rispettivamente i piani σ_1 e σ_2 con il piano σ per P ed ortogonale ad r. Poichè un vettore parallelo ad r è $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, si trova subito che σ ha equazione $x+y=0$.

Si trovano dunque le due rette $s_1=\sigma_1\cap\sigma\colon \begin{cases} 12x-12y-z-21=0\\ x+y=0\end{cases}$ e $s_2=\sigma_2\cap\sigma\colon \begin{cases} 2x-2y-z-1=0\\ x+y=0\end{cases}$.

□

ESERCIZIO 8. *Si disegni il triangolo equilatero ABC, inscritto nella circonferenza unitaria, ove $A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.*

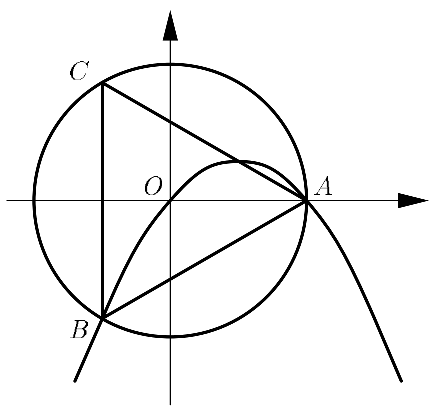
(a) Si determini la parabola $y=ax^2+bx+c$ passante per i punti A, O e B.

(b) Si determini l'area della regione racchiusa tra la parabola e la circonferenza.

Svolgimento. Tracciamo qui sotto il disegno ed osserviamo che i tre vertici del triangolo equilatero hanno coordinate

$$A=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-\frac12\\-\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-\frac12\\\frac{\sqrt3}{2}\end{pmatrix}.$$

In particolare, da ciò si deduce con facili argomenti di simmetria, che lo scambio tra B e C inverte il segno dei coefficienti a, b e c della parabola, ma non modifica l'area della superficie delimitata dalle due figure.



(a). Le costanti a, b e c nell'equazione della parabola, si determinano imponendo le condizioni di passaggio per i punti A, O e B. Così si ottiene che l'equazione della parabola è

$$y=\frac{2}{\sqrt3}(x-x^2).$$

(b). Per calcolare l'area della porzione di piano racchiusa tra la parabola e la circonferenza è sufficiente osservare che quest'area si può ottenere come differenza dell'area dei sottografici di due funzioni sull'intervallo $[-\frac12,1]$. Precisamente, la parabola è il grafico della funzione $f(x)=\frac{2}{\sqrt3}(x-x^2)$, mentre l'arco di circonferenza è il grafico della funzione $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

Dobbiamo quindi calcolare l'integrale

$$\int_{-\frac12}^{1}\left[\frac{2}{\sqrt3}(x-x^2)+\sqrt{1-x^2}\right]dx = \left[\frac{1}{3\sqrt3}(3x^2-2x^3)\right]_{-\frac12}^{1} + \left[\frac12(t+\sin t\cos t)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3}+\frac{1}{6\sqrt3}+\frac{\sqrt3}{4};$$

ove il secondo integrale è stato calcolato tramite la sostituzione $x=\sin t$. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 9. *Si calcoli*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{x^2-2x+5}\,dx.$$

Svolgimento. Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{x^2-2x+5}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1/2}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg}(\tfrac{b-1}{2}) - \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg}(\tfrac{a-1}{2}) = \pi$$

e ciò è quanto volevamo. □

ESERCIZIO 10. *Sapendo che* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ *(integrale di Dirichlet), si calcoli*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}\, dx.$$

Svolgimento. Integrando per parti, si ha

$$\int \frac{x-\sin x}{x^3}\, dx = \frac{\sin x - x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx \qquad \text{e} \qquad \int \frac{1-\cos x}{x^2}\, dx = \frac{\cos x - 1}{x} + \int \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Se si osserva che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{2x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x - x}{2x^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Si conclude che l'integrale proposto coincide con $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{4}$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)
prova orale del 3 febbraio 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	
Chimica Industriale	
Scienza dei Materiali	

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a,b), tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$ e si consideri la funzione $g(x) = \frac{f(x)}{f(x)-f(a)}$.

(i) Allora, se $f(a) > 0$, la funzione g è decrescente in (a,b). .... ☐

(ii) Allora $\lim_{x\to b^-} g(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$. .... ☐

(iii) Allora $g(x)$ è definita sull'intervallo $(a,b]$. .... ■

2. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutti punti di (a,b), ad eccezione al più del punto x_0, e si abbia $\lim_{x\to x_0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$.

(i) Allora, $f'_-(x_0) = c = f'_+(x_0)$ e quindi f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ☐

(ii) Se f è monotona in (a,b), allora f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ☐

(iii) Se f è continua in x_0, allora f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ■

3. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione (debolmente) crescente di numeri reali positivi e minori di 10.

(i) La successione $(x_n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $x \leq 1000$. .... ■

(ii) La successione $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a zero. .... ☐

(iii) La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e solo se, $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. .... ☐

4. Sia x un numero reale positivo e si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\sqrt[n^2]{x})$.

(i) La serie converge solo se $x \geq 1$. .... ☐

(ii) La serie converge solo se $0 < x \leq 1$. .... ☐

(iii) La serie converge. .... ■

5. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni (strettamente) decrescenti di numeri reali.

(i) La successione $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. .... ☐

(ii) La successione $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. .... ☐

(iii) La successione $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente monotona; ovvero, esiste un intero n_0 per cui la sottosuccessione $(x_ny_n)_{n\geq n_0}$ è monotona. .... ■

6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f'(x) > 0 < f''(x)$ per ogni $x \in (a, b)$ ed $f(a) = a$, $f(b) = b$. Fissato un punto $c \in (a, b)$, si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}.$$

(i) Allora, indipendentemente da c, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$. ■

(ii) Allora, indipendentemente da c, non esiste $\lim_{n\to+\infty} x_n$. □

(iii) Allora, se $c < \frac{a+b}{2}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$ e se $c \geq \frac{a+b}{2}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$. □

7. È vero o falso che

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{i+j=n} \frac{x^i}{i!} \frac{y^j}{j!}.$$

(i) È vero solo se $x, y \in (0, 1)$. □

(ii) È vero per ogni coppia di numeri reali x, y. ■

(iii) È falso se $x = 1 = y$, mentre è vero in ogni altro caso. □

8. Quante sono le diagonali di un poligono convesso di n lati?

(i) $\frac{(n+1)(n+2)}{6}$. □

(ii) $\frac{n(n-3)}{2}$ ■

(iii) $\binom{n}{2}$. □

9. Un individuo assume quotidianamente 300mg di un farmaco ed espelle il 30% della quantità accumulata. Se continuasse ad assumere indefinitamente il farmaco e si mantenesse la stessa percentuale di espulsione, che cosa succederebbe?

(i) Il farmaco accumulato non supererebbe mai i 300mg □

(ii) La quantità di farmaco accumulata crescerebbe col passare dei giorni, ma restando al di sotto di 1g. ■

(iii) Il farmaco accumulato raggiungerebbe quantità indefinitamente elevate. □

10. Si consideri la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita ponendo $g(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) la funzione g è illimitata. □

(ii) La funzione g è crescente sulla semiretta positiva. ■

(iii) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)
prova orale del 18 febbraio 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	☐
Chimica Industriale	☐
Scienza dei Materiali	☐

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti dell'intervallo (a, b).

(i) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in (a, b)$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. .... ■

(ii) Se f è limitata in (a, b) e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in [a, b]$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. .... ☐

(iii) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in [a, b]$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. .... ☐

2. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione (debolmente) decrescente di numeri reali maggiori di 10.

(i) La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se, e solo se, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$. .... ☐

(ii) La successione $(1/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. .... ■

(iii) La successione $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad un numero $10 \leq x < 100$. .... ☐

3. Sia x un numero reale positivo e si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2\sqrt{n^2+n}} + \frac{\pi}{4}\right)\right]^n$.

(i) La serie è indeterminata. .... ☐

(ii) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente .... ☐

(iii) La serie converge assolutamente. .... ■

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, derivabile in (a, b), tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

(i) Allora, esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a} = 0$. .... ☐

(ii) Allora $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. .... ☐

(iii) Allora $\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| > 0$ per ogni $x \in (a, b)$. .... ■

5. Sia ζ il numero complesso $\zeta = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ e si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$.

(i) La serie è indeterminata. .... ■

(ii) La serie diverge. .... ☐

(iii) La serie converge. .... ☐

6. Sia $f:[1,3]\to\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=2+(x-2)^3$. Fissato un punto $c\in(1,3)$, si consideri la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} x_1 = c \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}.$$

(i) Allora, se $c<2$, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$, se $c>2$, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 3$. .... ☐

(ii) Allora, indipendentemente da c, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. .... ☐

(iii) Allora, indipendentemente da c, si ha $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$. .... ■

7. Siano $0<k<n$ due numeri naturali. Allora

(i) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{k+1}{n}$. .... ☐

(ii) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{n-1}$. .... ☐

(iii) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{n}{k}$. .... ■

8. Si consideri, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ \alpha & 2 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Allora:

(i) Per qualunque $\alpha\in\mathbb{R}$, A_α ha tre autovalori reali distinti. .... ■

(ii) Per $\alpha=1$, A_α non è diagonalizzabile. .... ☐

(iii) Per opportuni $\alpha\in\mathbb{R}$, il rango di A_α è minore di 3. .... ☐

9. Siano $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$ e sia $\alpha = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\rangle$. Allora:

(i) $\alpha=0$ se, e solo se, $\overrightarrow{v}$ è parallelo a $\overrightarrow{w}$. .... ☐

(ii) Se $\overrightarrow{u}\neq 0$, $\overrightarrow{v}\neq 0$, $\overrightarrow{w}\neq 0$ allora $\alpha\neq 0$. .... ☐

(iii) $\alpha=0$ se, e solo se, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sono complanari. .... ■

10. Si consideri la funzione $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita ponendo $g(x)=\int_{-x}^{x}(1+\sin^2 t)dt$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. .... ☐

(ii) La funzione g è decrescente sulla semiretta negativa. .... ☐

(iii) la funzione g è illimitata. .... ■

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)
prova orale del 18 giugno 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	
Chimica Industriale	
Scienza dei Materiali	

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Sia x un numero reale positivo e si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\sqrt{n}}$.

(i) La serie converge assolutamente per $0 < x < 1$. .... ■
(ii) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente per ogni valore di x. .... □
(iii) La serie converge assolutamente per $x \geq 1$. .... □

2. Una palla elastica (in assenza di attriti) rimbalza risalendo l'80% dell'altezza da cui è caduta. Supponendo (sempre in assenza di attriti) di lasciar cadere la palla da un'altezza di 5 metri, quanta strada percorre prima di fermarsi?

(i) 215 metri. .... □
(ii) Percorre una strada infinita, perchè continua a rimbalzare all'infinito. .... □
(iii) 45 metri. .... ■

3. Sia ζ il numero complesso $\zeta = \frac{1+i}{2}$ e si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$.

(i) La serie diverge. .... □
(ii) La serie è indeterminata. .... □
(iii) La serie converge. .... ■

4. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua assieme alla sua derivata e tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

(i) Allora $f(x)$ è monotona in senso stretto sull'intervallo $[a, b]$. .... ■
(ii) Allora $f(x)$ non si annulla mai sull'intervallo (a, b). .... □
(iii) Allora $f(b) = f(a)$. .... □

5. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di punti dell'intervallo (a, b).

(i) Se f è limitata in (a, b) e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in [a, b]$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. .... □
(ii) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in [a, b]$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. .... □
(iii) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x_0 \in (a, b)$, allora $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. .... ■

6. Si consideri la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^n$.

(i) La serie è indeterminata. .... ☐
(ii) La serie converge. .... ☐
(iii) La serie diverge. .... ■

7. Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in tutti punti di (a, b), ad eccezione al più del punto x_0, e si abbia $\lim_{x \to x_0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$.

(i) Se f è continua in x_0, allora f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ■
(ii) Allora, $f'_-(x_0) = c = f'_+(x_0)$ e quindi f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ☐
(iii) Se f è monotona in (a, b), allora f è derivabile in x_0 ed $f'(x_0) = c$. .... ☐

8. Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2\alpha-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha-3 & \alpha \end{pmatrix}$. Allora:

(i) Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, A_α ha tre autovalori reali distinti. .... ☐
(ii) Per $\alpha = 0, \frac{1}{2}, 3$, A_α non è diagonalizzabile. .... ☐
(iii) Per opportuni $\alpha \in \mathbb{R}$, il rango di A_α è minore di 3. .... ■

9. Siano $r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ una retta e $\pi : a_3x+b_3y+c_3z = d_3$ un piano nello spazio tridimensionale e si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

(i) r e π sono ortogonali se $rk\, A = 3$ e $rk\, B = 3$.. .... ☐
(ii) r e π sono sghembi se $rk\, A = 2$ e $rk\, B = 3$. .... ☐
(iii) r e π sono paralleli se $rk\, A = 2$. .... ■

10. Si dica per quali valori del parametro α converge $\int_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$.

(i) per ogni valore di α. .... ■
(ii) solo per $\alpha > 0$. .... ☐
(iii) solo per $\alpha < -1$. .... ☐

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova orale del 8 luglio 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	
Chimica Industriale	
Scienza dei Materiali	

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Sia α un numero reale positivo e si consideri $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(\pi x)|}{x^\alpha}$.

(i) L'integrale converge per $0 < \alpha \leq 1$. ☐

(ii) L'integrale converge semplicemente, ma non assolutamente per ogni valore di α. ☐

(iii) L'integrale converge per $\alpha > 1$. ■

2. Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice $A_\alpha = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3\alpha \\ 0 & 2\alpha-1 & 0 \\ 0 & \alpha-4 & \alpha+3 \end{pmatrix}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa:

(i) Per qualunque $\alpha \in \mathbb{R}$, A_α è diagonalizzabile. ☐

(ii) Per $\alpha > \frac{1}{2}$, la matrice A_α ha solo autovalori positivi. ☐

(iii) Per $\alpha = -3, 0, \frac{1}{2}, 4$, A_α non ha tre autovalori distinti. ■

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^{\sin x}$.

(i) Allora f è derivabile in $(0, +\infty)$ ed $f'(x) = x^{\sin x}(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x})$. ■

(ii) Allora f è derivabile solo se $\sin x > 0$ ed $f'(x) = x^{\sin x} \log(x \cos x)$. ☐

(iii) Allora f è derivabile in $(0, +\infty)$ ed $f'(x) = x^{\sin x - 1} \sin x \cos x$. ☐

4. I numeri complessi $3 - 2i$ ed $i - 2$ sono le due soluzioni dell'equazione

(i) $x^2 - (4 - 7i)x + i - 1 = 0$. ☐

(ii) $x^2 + ix + 7 = 0$. ☐

(iii) $x^2 - (1 - i)x + 7i - 4 = 0$. ■

5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si consideri la funzione $g(x) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ sull'intervallo $[a, b]$.

(i) Allora g ed f differiscono per una costante sull'intervallo $[a, b]$. ☐

(ii) Allora i grafici di f e g sull'intervallo $[a, b]$ si intersecano. ☐

(iii) Allora f e g hanno almeno un valore comune in $[a, b]$. ■

6. Siano $r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$ due rette nello spazio tridimensionale e si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

(i) r ed s sono sghembe se $rk\, B = 4$. .... ■
(ii) r ed s sono ortogonali se $rk\, A = 2$ e $rk\, B = 3$. .... □
(iii) r ed s sono sghembe se $rk\, A > rk\, B$. .... □

7. Da un sacchetto contenente 90 palline numerate, vengono estratte e tenute al di fuori del sacchetto 5 palline. Quante sono (indipendentemente dall'ordine di estrazione) le diverse cinquine che si possono ottenere in tal modo?
(i) 90^5. .... □
(ii) $\frac{90^2}{5}$. .... □
(iii) $\binom{90}{5}$. .... ■

8. Sia x un numero reale. Allora $\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ è uguale a:
(i) $\sin(ix)$. .... □
(ii) $\cosh x$. .... □
(iii) $\cos x$. .... ■

9. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva, e si consideri la disuguaglianza $f(x) \geq \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, al variare di x in $[0,1]$.
(i) Esistono funzioni per cui questa disuguaglianza vale per ogni $x \in [0,1]$. .... ■
(ii) Esiste un punto $\xi \in (0,1)$ per cui la disuguaglianza è verificata per $x \in (\xi, 1]$. .... □
(iii) La disuguaglianza non è mai verificata se f non è identicamente nulla. .... □

10. Sia ζ il numero complesso $\zeta = \frac{1+2i}{2}$ e si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$.
(i) La serie converge. .... □
(ii) La serie è indeterminata. .... □
(iii) La serie diverge. .... ■

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)
prova orale del 10 settembre 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	
Chimica Industriale	
Scienza dei Materiali	

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Sia α un numero reale positivo e si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^\alpha}$.

(i) La serie converge solo se $0 < \alpha \leq 1$. ☐
(ii) La serie converge solo se $\alpha > 1$. ☐
(iii) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente per ogni valore di α. ■

2. Si consideri la funzione $g(x) = \int_{-x}^{x} \log(\cos t)dt$, al variare di x in $[0, \frac{\pi}{2})$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

(i) $g(x)$ è decrescente nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$. ■
(ii) $g(x)$ è una funzione oscillante nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$. ☐
(iii) $g(x)$ è decrescente nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{4})$ e crescente nell'intervallo $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. ☐

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^{\cos x}$.

(i) Allora f è derivabile in $(0, +\infty)$ ed $f'(x) = -x^{\cos x - 1} \sin x \cos x$. ☐
(ii) Allora f è derivabile solo se $\cos x > 0$ ed $f'(x) = x^{\cos x} \log(x \sin x)$. ☐
(iii) Allora f è derivabile in $(0, +\infty)$ ed $f'(x) = x^{\cos x}(\frac{\cos x}{x} - \sin x \log x)$. ■

4. Il parallelo fondamentale del globo terrestre (equatore) è lungo circa 40.000 km. A quale altezza ci si deve spostare verso Nord, affinchè il parallelo corrispondente sia lungo la metà dell'equatore?

(i) all'altezza di Suez ($\sim 30^o N$). ☐
(ii) all'altezza di Piacenza ($\sim 45^o N$). ☐
(iii) all'altezza di Oslo ($\sim 60^o N$). ■

5. Si considerino le successioni definite ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n} \end{cases}$$

al variare di c tra i numeri reali positivi.

(i) Allora, indipendentemente da c, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. ■
(ii) Allora, se $0 < c \leq 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ mentre, se $c > 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ☐

(iii) Allora, se $0 < c < 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mentre, se $c \geq 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. .... □

6. Siano $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ e $\pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ tre piani nello spazio tridimensionale e sia

$$rk\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2.$$

(i) I tre piani sono a due a due paralleli. .... □
(ii) I tre piani sono a due a due ortogonali. .... □
(iii) I tre piani sono paralleli ad una stessa retta. .... ■

7. Un signore vuole acquistare delle obbligazioni per 100.000.000 di lire sapendo che il capitale e l'interesse composto gli saranno versati in un'unica soluzione allo scadere di tre anni. Qual è la più remunerativa tra le seguenti offerte?

(i) Un interesse annuale dell'$8,5\%$. .... □
(ii) Un interesse semestrale del $4,2\%$. .... □
(iii) Un interesse mensile dello $0,7\%$. .... ■

8. Sia x un numero reale. Allora $\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ è uguale a:

(i) $\sin x$. .... ■
(ii) $\cos(ix)$. .... □
(iii) $\sinh x$. .... □

9. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile (infinite volte) in $(0,1)$ e supponiamo che, fissati comunque a e b con $0 < a < b < 1$, si abbia

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \text{per ogni } x \in (a,b).$$

Allora

(i) $f(x)$ è una funzione concava in $[0,1]$. .... □
(ii) Non può esistere una funzione soddisfacente a queste condizioni. .... □
(iii) $f(x)$ è una funzione convessa in $[0,1]$. .... ■

10. Sia ζ il numero complesso $\zeta = \frac{3-2i}{4}$ e si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n$.

(i) La serie è indeterminata. .... □
(ii) La serie diverge. .... □
(iii) La serie converge. .... ■

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova orale del 28 settembre 1998

Nome	Cognome	N. Matricola

Corso di Laurea:

Chimica pura	
Chimica Industriale	
Scienza dei Materiali	

ATTENZIONE: *Ogni risposta corretta aggiunge un punto ed ogni risposta sbagliata sottrae un punto. Per superare la prova è necessario rispondere ad almeno cinque domande ed ottenere un punteggio positivo.*

---

1. Siano $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni strettamente crescenti di numeri reali.

(i) La successione $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definitivamente monotona; ovvero, esiste un intero n_0 per cui la sottosuccessione $(x_n y_n)_{n\geq n_0}$ è monotona. .... ■

(ii) La successione $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. .... □

(iii) La successione $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. .... □

2. Si consideri la funzione $f(x) = x^{\log x}$.

(i) Allora f è derivabile in $(0,+\infty)$ ed $f'(x) = x^{\log x - 1}$. .... □

(ii) Allora f è derivabile solo se $\log x > 0$ ed $f'(x) = x^{\log x - 1}\frac{\log x}{x}$. .... □

(iii) Allora f è derivabile in $(0,+\infty)$ ed $f'(x) = 2x^{\log x - 1}\log x$. .... ■

3. Un cavo sospeso tra due sostegni posti alla stessa altezza sulle rette $x = -b$ ed $x = b$, descrive una curva di equazione $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, ove a è una costante (positiva) che dipende dall'altezza dei sostegni e dal materiale di cui è fatto il cavo. Allora la lunghezza del cavo è uguale a

(i) $2ab$. .... □

(ii) $ab\cosh\left(\frac{b}{a}\right)$ .... □

(iii) $2a\sinh\left(\frac{b}{a}\right)$. .... ■

4. La massa di una sostanza radioattiva (Potassio-42) si modifica nel tempo secondo la legge $M(t) = e^{-0.055t}M_0$, ove t è il tempo misurato in ore ed M_0 è la massa iniziale. In quanto tempo si dimezzano 85 grammi di tale sostanza?

(i) circa 12 ore e mezza. .... ■

(ii) circa 15 minuti. .... □

(iii) circa 30 giorni. .... □

5. Una casa farmaceutica produce delle confezioni di pennicillina che vende a 200.000 lire l'una. Il costo di produzione (in lire) di x confezioni è stimato dalla formula:

$$C(x) = 500.000.000 + 80.000x + 3x^2.$$

Tenendo conto che la capacità di produzione annua è al massimo di 30.000 unità, quante confezioni devono essere prodotte e vendute ogni anno per massimizzare i profitti? (profitto=ricavo-costo)

(i) 30.000 unità. .... □

(ii) 6.000 unità. .... □
(iii) 20.000 unità. .... ■

6. Si considerino le successioni definite ricorsivamente ponendo

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_{n+1} = x_n^2 - x_n \end{cases}$$

al variare di c tra i numeri reali positivi.

(i) Allora, se $0 < c \leq 1$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ mentre, se $c > 1$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. .... □
(ii) Allora, indipendentemente da c, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. .... □
(iii) Allora, se $0 < c < 2$ si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mentre, se $c > 2$, si ha $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. .... ■

7. Nello spazio tridimensionale siano

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \quad \pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

tre piani che si intersecano in uno ed un solo punto. Posto

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

si ha

(i) $rk\, B = rk\, A = 3$. .... ■
(ii) $rk\, B > rk\, A = 2$. .... □
(iii) $rk\, B = rk\, A = 2$. .... □

8. Sia α un numero reale positivo e si consideri la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\pi n)(\sinh \frac{1}{n})^\alpha$.

(i) La serie converge solo se $\alpha > 1$. .... □
(ii) La serie converge solo se $0 < \alpha \leq 1$. .... □
(iii) La serie converge semplicemente, ma non assolutamente per ogni valore di α. .... ■

9. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quale tra le seguente affermazioni è vera.

(i) f è derivabile, con derivata continua a tratti. .... □
(ii) f è derivabile con derivata continua. .... □
(iii) f è la derivata di una funzione continua in $[a, b]$. .... ■

10. Siano k un numero intero positivo e $\zeta_k = \cos \frac{2\pi}{k} - i \sin \frac{2\pi}{k}$. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_k^n$.

(i) La serie è indeterminata. .... ■
(ii) La serie converge. .... □
(iii) La serie diverge. .... □