Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 27 gennaio 1999

ESERCIZIO 1. *Si determinino i numeri reali x per cui vale la disuguaglianza*

$$\left|\frac{2|x|-3}{3x-2}\right| > 1.$$

Svolgimento. Sia $x \neq \frac{2}{3}$. La disuguaglianza è equivalente a $(2|x|-3)^2 > (3x-2)^2$ e quindi a $5x^2 - 12(x - |x|) - 5 < 0$. Dunque, ricordando che $x - |x| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, la disuguaglianza proposta equivale alle condizioni

$$\begin{cases} 5(x^2-1) < 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 5x^2 - 24x - 5 < 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{5} < x < 0 \end{cases}.$$

Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta per $x \in (-\frac{1}{5}, 1) \setminus \{\frac{2}{3}\}$. □

ESERCIZIO 2. *Al variare di t tra i numeri reali, si calcoli il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{3t}{n}\right).$$

Svolgimento. Qualunque sia il valore di t, si ha

$$n \log\left(1 + \frac{3t}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{3t}{n}\right)^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{3t}{n}\right)^n = e^{3t}.$$

Per la continuità della funzione logaritmo si conclude che il limite proposto è uguale a $3t$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio del confronto asintotico e lo si applichi allo studio della convegenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}.$$

Svolgimento. Cominciamo ricordando il

Teorema. (Criterio del Confronto Asintotico). *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi. Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e solo se, converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1,$$

e quindi, per il criterio testé enunciato, si ha che la serie proposta converge, così come converge la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \tanh x}{\sinh x - \sin x}.$$

Svolgimento. Ricordiamo gli sviluppi di McLaurin delle funzioni coinvolte nel limite, ovvero

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Da ciò si deduce che

$$\frac{\operatorname{tg} x - \tanh x}{\sinh x - \sin x} = \frac{\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{2x^3}{3!} + o(x^3)}$$

e quindi applicando il principio di cancellazione delle funzioni trascurabili, si ottiene che il limite proposto è uguale a 2. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2}\cos(\pi x) & \text{se } |x| \geq 1 \\ a + bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *pari* (ovvero $f(x) = f(-x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = -1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}[2x\cos(\pi x) + \pi\sin(\pi x)] & \text{se } |x| > 1 \\ 2bx & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = -1 \\ 2b = 2 \end{cases}$, ovvero quando $a = -2$ e $b = 1$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = -2$ ed $r_1 : y = 2x - 3$. □

ESERCIZIO 6. *Si calcoli*

$$\int_0^1 \log(x^2 + 5)\, dx.$$

Svolgimento. Integrando per parti, si ha

$$\int \log(x^2 + 5)\, dx = x\log(x^2 + 5) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 5} = x\log(x^2 + 5) - 2x + \int \frac{10}{x^2 + 5}.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x}{\sqrt{5}}$, l'integrale

$$\int \frac{10}{x^2+5}\,dx \qquad \text{diventa} \qquad 2\sqrt{5}\int \frac{dy}{y^2+1} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,y + c.$$

Si ha quindi

$$\int \log(x^2+5)\,dx = x\log(x^2+5) - 2x + 2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + c,$$

ed applicando la Formula di Barrow si ottiene che il valore dell'integrale definito è $\log 6 - 2 + 2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$. □

ESERCIZIO 7. *Si dica se converge l' integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^3+4x^2+3x}\,dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Svolgimento. La funzione integranda si decompone nella forma

$$\frac{1-x}{x^3+4x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

ove le costanti A, B, C sono soggette alle condizioni

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 4A+3B+C=-1 \\ 3A=1 \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-1 \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Dunque, ricordando le proprietà elementari della funzione logaritmo, si ha

$$\int \frac{1-x}{x^3+4x^2+3x}\,dx = \log\sqrt[3]{\frac{x(x+3)^2}{(x+1)^3}} + c;$$

e quindi, applicando la Formula di Barrow, si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-x}{x^3+4x^2+3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\sqrt[3]{\frac{x(x+3)^2}{(x+1)^3}}\right]_{x=1}^{x=b}.$$

Infine, osservando che

$$\lim_{b\to+\infty}\log\sqrt[3]{\frac{b(b+3)^2}{(b+1)^3}} = \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\log\frac{b(b+3)^2}{(b+1)^3} = \frac{1}{3}\log 1 = 0,$$

si conclude che l'integrale proposto converge al numero reale $-\frac{\log 2}{3}$. □

ESERCIZIO 8. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda \mathbf{1}) = -\lambda(\lambda+1)^2$ e quindi gli autovalori sono 0, con molteplicità 1 e -1, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$. Vi sono quindi tre autovettori linearmente indipendenti e perciò ϕ è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & + & \lambda y & + & z & = & 0 \\ x & + & 2\lambda y & + & (\lambda+1)z & = & 1 \\ \lambda x & & & + & (\lambda-1)z & = & -1 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,1,-1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{-2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{1}{\lambda(1+\lambda)}, \qquad z = \frac{1}{1+\lambda} \qquad (\lambda \notin \{0,1,-1\}).$$

Per $\lambda = 1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni $\begin{cases} x & = & -1 \\ y & = & 1-t \\ z & = & t \end{cases}$.
Per $\lambda = 0$ e $\lambda = -1$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 10. *Siano date le rette*

$$r_1 : \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \qquad ed \qquad r_2 : \begin{cases} 3x-y+z+1=0 \\ 2x+z=0 \end{cases},$$

(a) Verificare che r_1 ed r_2 sono incidenti e determinarne il punto P di intersezione.
(b) Trovare l'equazione del piano π contenente r_1 e r_2 e la sua distanza dall'origine.
(c) Dato il punto $R(0,1,0)$ di r_2, determinare i punti Q di r_1 tali che la piramide con vertici in P, Q, R e nell'origine abbia volume 1.

Svolgimento. (a). Il punto di intersezione è $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(*b*). Le rette r_1 e r_2 hanno equazioni parametriche

$$r_1 \ : \begin{cases} x & = & -1+2t \\ y & = & t \\ z & = & 2-5t \end{cases} \qquad r_1 \ : \begin{cases} x & = & -1+t \\ y & = & t \\ z & = & 2-2t \end{cases}$$

Il piano π è quindi perpendicolare al vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dalla condizione di passaggio per un punto arbitrario di r_1 o r_2, otteniamo

$$\pi \ : \ 3x - y + z + 1 = 0 \quad \text{ e } \quad d(O,\pi) = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

(c). Al variare del punto $Q(-1+2t, t, 2-5t)$ su r_1, l'area del triangolo PQR è $\frac{1}{2}||\vec{PQ} \times \vec{PR}||$ e l'altezza della piramide relativa alla base PQR è $d(O, \pi)$. Quindi

$$V = \frac{1}{2} \left|\left| \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ -5t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right|\right| \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{3} = \frac{|t|}{6} = 1$$

Le soluzioni di questa equazione sono $t = \pm 6$ e i punti cercati sono $Q_1(11, 6, -28)$ e $Q_2(-13, -6, 32)$. $\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 22 febbraio 1999

ESERCIZIO 1. *Si determinino i numeri reali x per cui vale la disuguaglianza*

$$\left|\frac{|x|-2}{2x-1}\right| < 1.$$

Svolgimento. Sia $x \neq \frac{1}{2}$. La disuguaglianza è equivalente a $(|x|-2)^2 < (2x-1)^2$ e quindi a $3x^2-4(x-|x|)-3 > 0$. Dunque, ricordando che $x-|x| = \begin{cases} 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 2x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, la disuguaglianza proposta equivale alle condizioni

$$\begin{cases} 3(x^2-1) > 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 3x^2-8x-3 > 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x > 1 \\ -\frac{1}{3} > x \end{cases}.$$

Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta per $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Al variare di t tra i numeri reali, si calcoli il limite*

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1-\frac{t^2}{n}\right).$$

Svolgimento. Qualunque sia il valore di t, si ha

$$n \log\left(1-\frac{t^2}{n}\right) = \log\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = e^{-t^2}.$$

Per la continuità della funzione logaritmo si conclude che il limite proposto è uguale a $-t^2$, per ogni $t \in \mathbb{R}$. □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio del confronto asintotico e lo si applichi allo studio della convegenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos(1/n))\sqrt{n}.$$

Svolgimento. Cominciamo ricordando il

Teorema. [Criterio del Confronto Asintotico]. *Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni di numeri reali positivi. Se $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e solo se, converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos(1/n)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

e quindi, per il criterio testé enunciato, si ha che la serie proposta converge, così come converge la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \tanh x}{(\cosh x - \cos x)\log(1+x)}.$$

Svolgimento. Ricordiamo gli sviluppi di McLaurin delle funzioni coinvolte nel limite, ovvero

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^2), \qquad \log(1+x) = x + o(x),$$
$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \tanh x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Da ciò si deduce che

$$\frac{\operatorname{tg} x - \tanh x}{(\cosh x - \cos x)\log(1-x)} = \frac{\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{(x^2 + o(x^2))(x + o(x))} = \frac{\frac{2x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

e quindi, applicando il principio di cancellazione delle funzioni trascurabili, si ottiene che il limite proposto è uguale a $2/3$. □

ESERCIZIO 5. *Si consideri la funzione $f(x)$ così definita*

$$f(x) = \begin{cases} e^{1-x^2} \sin \frac{\pi x}{2} & \text{se } |x| \geq 1 \\ ax + bx^3 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) le costanti a e b affinché la funzione $f(x)$ sia derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tracci un grafico indicativo dell'andamento di $f(x)$ e si disegnino le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$.

Svolgimento. $f(x)$ è una funzione *dispari* (ovvero $f(-x) = -f(x)$) ed è continua e derivabile per $x \neq \pm 1$, indipendentemente dal valore che si attribuisca ai parametri a e b; dunque $f(x)$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$ se, e solo se, lo è per $x = 1$. In base alla definizione di f, si ha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b.$$

Dunque f è continua(per $x = 1$) se i due limiti coincidono, ovvero se $a + b = 1$. Supponiamo soddisfatta questa condizione ed osserviamo che, per $x \neq 1$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{1-x^2}\left[2x \sin \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right] & \text{se } |x| > 1 \\ a + 3bx^2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

quindi (supponendo f continua per $x = 1$), si ha

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -2 \qquad \text{e} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = a + 3b.$$

In conclusione, $f(x)$ è continua e derivabile se, e solo se, $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 3b = -2 \end{cases}$, ovvero quando $a = \frac{5}{2}$ e $b = -\frac{3}{2}$. Le rette tangenti al grafico nei punti $x = 0$ ed $x = 1$ sono rispettivamente $r_0 : y = \frac{5}{2}x$ ed $r_1 : y = -2x + 3$). □

ESERCIZIO 6. *Si calcoli*

$$\int_{-1}^{1} \log(x^2 + 3)\, dx.$$

Svolgimento. Integrando per parti, si ha

$$\int \log(x^2+3)\,dx = x\log(x^2+3) - \int \frac{2x^2}{x^2+3} = x\log(x^2+3) - 2x + \int \frac{6}{x^2+3}\,dx.$$

Con la sostituzione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, l'integrale

$$\int \frac{6}{x^2+3}\,dx \qquad \text{diventa} \qquad 2\sqrt{3}\int \frac{dy}{y^2+1} = 2\sqrt{3}\operatorname{arctg} y + c.$$

Si ha quindi

$$\int \log(x^2+3)\,dx = x\log(x^2+3) - 2x + 2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c,$$

ed applicando la Formula di Barrow si ottiene che il valore dell'integrale definito è $2\log 4 - 4 + 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$. □

ESERCIZIO 7. *Si dica se converge l' integrale*

$$\int_2^{+\infty} \frac{4}{x^3+6x^2+8x}\,dx$$

e, in caso affermativo, lo si calcoli.

Svolgimento. La funzione integranda si decompone nella forma

$$\frac{4}{x^3+6x^2+8x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$$

ove le costanti A, B, C sono soggette alle condizioni

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 6A+4B+2C=0 \\ 8A=4 \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-1 \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dunque, ricordando le proprietà elementari della funzione logaritmo, si ha

$$\int \frac{4}{x^3+6x^2+8x}\,dx = \log\sqrt{\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}} + c;$$

e quindi, applicando la Formula di Barrow, si ottiene

$$\int_2^{+\infty} \frac{4}{x^3+6x^2+8x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\log\sqrt{\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}}\right]_{x=2}^{x=b}.$$

Infine, osservando che

$$\lim_{b\to+\infty}\log\sqrt{\frac{b(b+4)}{(b+2)^2}} = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\log\frac{b(b+4)}{(b+2)^2} = \frac{1}{2}\log 1 = 0,$$

si conclude che l'integrale proposto converge al numero reale $-\frac{1}{2}\log(3/4)$. □

ESERCIZIO 8. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda(\lambda - 1)^2$ e quindi gli autovalori sono 0, con molteplicità 1 e 1, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Non vi sono quindi tre autovettori linearmente indipendenti e perciò ϕ non è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x + \lambda y + z = -\lambda \\ -x + y = -1 \\ \lambda x + y + (\lambda+1)z = \lambda \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda+1 & 1 & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0, -1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = -\frac{1}{\lambda}, \qquad y = -\frac{1+\lambda}{\lambda}, \qquad z = \frac{1+\lambda}{\lambda} \qquad (\lambda \notin \{0, -1\}).$$

Per $\lambda = -1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

Per $\lambda = 0$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 10. *Siano dati piani*

$$\pi_1 : x + y + 2z - 1 = 0 \qquad e \qquad \pi_2 : x + z - 1 = 0$$

(a) Determinare le equazioni parametriche della retta r intersezione di π_1 e π_2.
(b) Dato il punto $P(5, -2, -4)$ di π_2, trovare le equazioni della retta r' per P, contenuta in π_2, e perpendicolare a r, e il punto Q di intersezione tra r e r'.
(c) Trovare le intersezioni di r con la circonferenza C, contenuta in π_2, di centro Q e passante per P.

Svolgimento. (a). $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$.

(*b*). La retta r' ha equazioni parametriche del tipo $r' : \begin{cases} x = 5 + lt \\ y = -2 + mt \\ z = -4 + nt \end{cases}$, dove $-l - m + n = 0$ (r' è perpendicolare a r) e $l + n = 0$ (r' è parallela a π_2). Quindi

$$r' : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = -4 - t \end{cases} \qquad e \qquad Q(3, 2, -2)$$

(c). Il raggio della circonferenza è la distanza $2\sqrt{6}$ tra P e Q e quindi il punto $R(1-t,-t,t)$ di r è sull'intersezione con la circonferenza se la sua distanza da Q è uguale a $2\sqrt{6}$. I corrispondenti valori di t sono le soluzioni dell'equazione: $2\sqrt{6} = \sqrt{3}|t+2|$ che è verificata per $t = -2 \pm 2\sqrt{2}$. Le intersezioni di r con la circonferenza sono quindi

$$R_1(3-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}) \qquad \text{e} \qquad R_2(3+2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$$

$\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 14 giugno 1999

ESERCIZIO 1. *Si determinino i numeri reali x per cui vale la disuguaglianza*

$$\left|\frac{2|x|-3}{x+1}\right| > 1.$$

Svolgimento. Sia $x \neq -1$. La disuguaglianza è equivalente a $(2|x|-3)^2 > (x+1)^2$ e quindi a $3x^2 - 2(x + 6|x|) + 8 > 0$. Dunque, ricordando che $x + 6|x| = \begin{cases} 7x & \text{se } x \geq 0 \\ -5x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, la disuguaglianza proposta equivale alle due condizioni

$$\begin{cases} 3x^2 - 14x + 8 > 0 & \text{se } x \geq 0 \\ 3x^2 + 10x + 8 > 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Quindi la disuguaglianza proposta è soddisfatta per $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) \cup (4, +\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le radici dell'equazione $x^4 + 1$ e si determini l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.*

Svolgimento. Si osservi che $x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i)$ e quindi le soluzioni dell'equazione proposta sono le radici quadrate di $\pm i$, ovvero i numeri complessi

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si tratta quindi dei vertici di un quadrato, inscritto nella circonferenza unitaria, con area uguale a 2. □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio di Leibniz e lo si applichi allo studio della convegenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n/4)^n}{n!}.$$

Svolgimento. Cominciamo formulando il

Teorema. [Criterio di Leibniz]. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri reali positivi. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge se, e solo se, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Posto, $a_n = \frac{(n/4)^n}{n!}$, si ha $a_n > 0$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}4^n n!}{4^{n+1}(n+1)!n^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{4} < 1.$$

Dunque(†) $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ e quindi la successione è decrescente. Inoltre, essendo costituita da termini positivi, la successione è inferiormente limitata e quindi convergente. Poichè si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{4} = \frac{e}{4} < 1,$$

(†) Per l'ultima disuguaglianza, si veda ad esempio Bertsch, Lemma 6.1, p.188.

si conclude che deve aversi necessariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Per il criterio di Leibniz, ciò significa che la serie converge. $\square$

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - x\tanh(1/x)}{e^{1/x^2} - 1}.$$

Svolgimento. Con il cambiamento di variabile, $y = 1/x$ il limite proposto risulta uguale a $\lim_{y\to 0^+} \frac{y - \tanh y}{y(e^{y^2} - 1)}$. Gli sviluppi di McLaurin delle funzioni coinvolte, sono

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + o(y^2) \qquad \text{e} \qquad \tanh y = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3).$$

Da ciò si deduce che

$$\frac{y - \tanh y}{y(e^{y^2} - 1)} = \frac{\frac{y^3}{3} + o(y^3)}{y^3 + o(y^3)}$$

e quindi, applicando il principio di cancellazione delle funzioni trascurabili, si ottiene che il limite proposto è uguale a $1/3$. $\square$

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = \left|\operatorname{arctg}(1 - \frac{1}{x})\right|$ *e se ne tracci un grafico indicativo. Si dica se f si estende ad una funzione continua su tutta la retta reale e se f si estende ad una funzione derivabile su tutta la retta reale.*

Svolgimento. La funzione proposta è definita per $x \neq 0$ ed è continua perchè composizione di funzioni continue. Ricordando che $\operatorname{arctg} x$ è una funzione dispari e crescente, possiamo concludere che il segno di $\operatorname{arctg}(1 - \frac{1}{x})$ dipende solo dal segno dell'argomento e che quindi si ha

$$f(x) = \left|\operatorname{arctg}(1 - \tfrac{1}{x})\right| = \begin{cases} \operatorname{arctg}(1 - \frac{1}{x}) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(\frac{1}{x} - 1) & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Con facili applicazioni del teorema sul limite di funzioni composte, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{4} = \lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Quindi f si può estendere ad una funzione continua $F(x)$ su tutta la retta reale, ponendo $F(0) = \frac{\pi}{2}$ ed $F(x) = f(x)$ per $x \neq 0$.

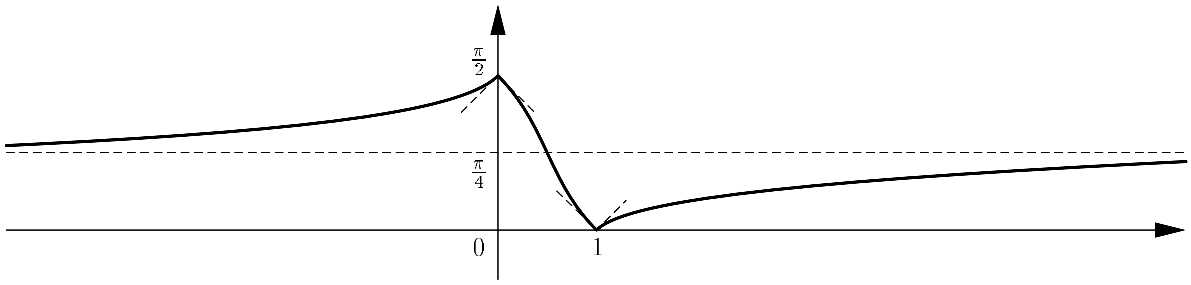
Inoltre, $f(x)$ è composizione di funzioni derivabili per $x \notin \{0, 1\}$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \frac{-1}{2x^2 - 2x + 1} & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}.$$

Poichè il polinomio al denominatore non ha zeri reali, si conclude che $f(x)$ è crescente nelle semirette $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, mentre è decrescente nell'intervallo $(0, 1)$. Dunque per $x = 1$ ha un punto di minimo relativo (ed assoluto) con $f(1) = 0$. Nel punto $x = 0$ tende all'estremo superiore dei suoi valori, che è quindi un massimo relativo ed assoluto per la funzione estesa $F(x)$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x\to 1^+} f'(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 = \lim_{x\to 1^-} f'(x)$$

da cui si conclude che f non può essere estesa ad una funzione derivabile su tutta la retta. Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione $f(x)$.



Uno studio della derivata seconda di $f(x)$ avrebbe permesso di determinare la presenza di un flesso per $x = \frac{1}{2}$ e di giustificare le concavità e convessità del grafico tracciato. □

ESERCIZIO 6. *Si determini la primitiva della funzione* $\operatorname{arctg}(x-2)$, *che si annulla per* $x = 1$.

Svolgimento. Integrando per parti, si ottengono tutte le primitive di $\operatorname{arctg}(x-2)$, ovvero:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg}(x-2)\,dx &= x\operatorname{arctg}(x-2) - \int \frac{x}{(x-2)^2+1} = \\ &= x\operatorname{arctg}(x-2) - \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{(x-2)^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx \\ &= (x-2)\operatorname{arctg}(x-2) - \frac{1}{2}\log[(x-2)^2+1] + c.\end{aligned}$$

La funzione cercata si annulla per $x = 1$ e deve quindi aversi

$$-\operatorname{arctg}(-1) - \frac{\log 2}{2} + c = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad c = \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Si conclude che la primitiva cercata è $F(x) = (x-2)\operatorname{arctg}(x-2) - \frac{1}{2}\log[(x-2)^2+1] + \log\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$. □

ESERCIZIO 7. *Si dica per quali valori di* $\alpha \in \mathbb{R}$ *converge l' integrale*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{x}}{(1+\sqrt{x})^\alpha}\,dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è asintoticamente equivalente ad $\frac{1}{2x^{2+\frac{\alpha}{2}}}$. Infatti, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-\cos\frac{1}{x}}{(1+\sqrt{x})^\alpha}}{\frac{1}{2x^{2+\frac{\alpha}{2}}}} = \lim_{y\to 0} \frac{2(1-\cos y)}{y^{2+\frac{\alpha}{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^\alpha} = 1.$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{2+\frac{\alpha}{2}}}\,dx$ e ciò accade se, e solo se, $2 + \frac{\alpha}{2} > 1$, cioè $\alpha > -2$. □

ESERCIZIO 8. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo* ϕ *di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

Dire se ϕ è diagonalizzabile e se i vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *sono combinazione lineare di autovettori di ϕ.*

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (1-\lambda)^3$. L'unico autovalore è quindi 1 e ha molteplicità 3. Il sottospazio di autovettori è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ che ha dimensione 1 e perciò ϕ non è diagonalizzabile.

Le combinazioni lineari di autovettori di ϕ sono tutti e solo i multipli di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di autovettori di ϕ, mentre $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non lo è. □

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = 3 \\ -\lambda^2 x = -2\lambda + 1 \\ \lambda x + (1-\lambda) y - z = -\lambda + 2 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,2\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{2\lambda - 1}{\lambda^2}, \qquad y = \frac{\lambda+1}{\lambda}, \qquad z = 0 \qquad (\lambda \notin \{0,2\}).$$

Per $\lambda = 2$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni

$$x = \frac{3}{4}, \qquad y = \frac{3-2t}{2}, \qquad z = t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Per $\lambda = 0$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 10. *Si consideri la retta* $r : \begin{cases} x = -3 + \sqrt{2}\, t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ *e i piani*

$$\pi_1 : x - z + 1 = 0 \qquad \pi_2 : x + y - 2 = 0 \qquad \pi_3 : y - 3 = 0$$

(a) *Verificare che r contiene il centro C di una sfera di raggio 2 e tangente ai tre piani, e trovare le coordinate di C.*
(b) *Detto T il punto di tangenza della sfera con il piano π_3, calcolare l'area del triangolo OCT.*
(c) *Determinare le equazioni dei piani paralleli al piano Oxy che intersecano la sfera su una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$.*

Svolgimento. (a). La retta r deve contenre un punto, C, a distanza 2 da tutti e tre i piani; deve cioè esistere un valore di t che verifica il sistema

$$\begin{cases} \frac{|-3+\sqrt{2}\,t-2+2t+1|}{\sqrt{2}} = 2 \\ \frac{|-3+\sqrt{2}\,t+3+t-2|}{\sqrt{2}} = 2 \\ |3 + t - 3| = 2 \end{cases}$$

Questo sistema è verificato per $t = 2$ e quindi il centro della sfera è $C(-3 + 2\sqrt{2}, 5, -2)$.
(b). La perpendicolare a π_3 condotta per C interseca questo piano in $T(-3+2\sqrt{2}, 3, -2)$. L'area del triangolo OCT è quindi data da

$$\frac{1}{2}||\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{TC}|| = \frac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} -3+2\sqrt{2} \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{21 - 2\sqrt{2}}$$

(c). I piani paralleli al piano Oxy hanno equazione $z + k = 0$ $(k \in \mathbb{R})$. La distanza tra il centro di una sfera di raggio 2 e un piano che interseca la sfera su una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ è uguale a $\sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$. I valori di k corrispondenti ai piani cercati sono quindi determinati dall'equazione $|-2+k| = 1$, per cui le equazioni di questi piani sono $z + 3 = 0$ e $z + 1 = 0$. $\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 28 giugno 1999

ESERCIZIO 1. *Si determinino i numeri reali x per cui vale la disuguaglianza*

$$|x^2-4|^x > 3^{-x/2}.$$

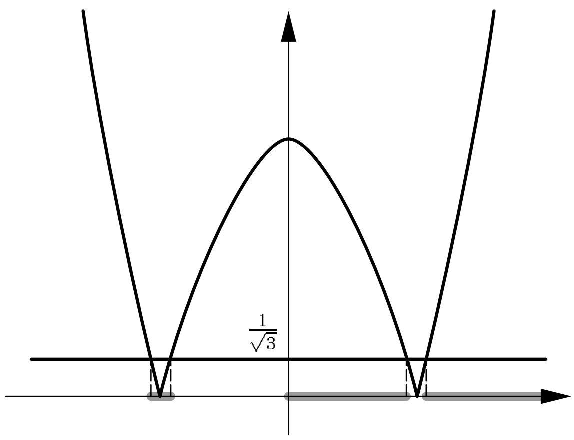
Svolgimento. Ricordiamo che, per qualunque coppia di numeri reali a, b, con $a > 0$, $a^b = e^{b \log a}$.

Quindi, applicando ad ambo i membri la funzione logaritmo (che è strettamente crescente), la disuguaglianza proposta risulta equivalente a

$$x \log|x^2-4|^x > -\frac{x}{2}\log 3.$$

Possiamo cancellare il fattore x dai due termini, se teniamo conto del suo segno. Dunque, ricordando ancora una volta il fatto che il logaritmo è una funzione strettamente crescente, la disuguaglianza proposta risulta equivalente ai due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ |x^2-4| > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ |x^2-4| < \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$



Si conclude facilmente che i numeri reali cercati sono contenuti nell'insieme

$$\left(-\sqrt{4+\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\,,\,-\sqrt{4-\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\right) \cup \left(0\,,\,\sqrt{4-\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\right) \cup \left(\sqrt{4+\tfrac{1}{\sqrt{3}}}\,,\,+\infty\right)$$

ovvero il sottoinsieme dell'asse orizzontale evidenziato nel disegno qui sopra. □

ESERCIZIO 2. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le soluzioni dell'equazione $x^4 + 16x^2 + 100 = 0$ e si determini l'area del quadrilatero (convesso) avente tali punti come vertici.*

Svolgimento. Si osservi che le radici del polinomio $t^2 + 16t + 100$ sono i numeri complessi $8 + 6i$ ed $8 - 6i$. Quindi le soluzioni dell'equazione proposta sono le radici quadrate di tali numeri, ovvero i numeri complessi

$$z_1 = 1 + 3i, \qquad z_2 = -1 - 3i, \qquad z_3 = 1 - 3i, \qquad z_4 = 3i - 1.$$

Si tratta quindi dei vertici di un rettangolo di area uguale a 12. □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio di Leibniz e lo si applichi allo studio della convegenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(n/2)^n}.$$

Svolgimento. Cominciamo formulando il

Teorema. [Criterio di Leibniz]. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione decrescente di numeri reali positivi. Allora la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *converge se, e solo se,* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Posto, $a_n = \frac{n!}{(n/2)^n}$, si ha $a_n > 0$ e

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!2^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!2^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq 1.$$

Dunque[†] $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ e quindi la successione è (debolmente) decrescente, ed essendo costituita da termini positivi, la successione è inferiormente limitata e quindi convergente. Poichè si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1,$$

si conclude che deve aversi necessariamente $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Per il criterio di Leibniz, ciò significa che la serie converge. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tanh x}{(\cosh x-\cos x)\log(1+x))}.$$

Svolgimento. Gli sviluppi di McLaurin delle funzioni coinvolte, sono

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \cosh x = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \log(1+x) = x+o(x), \tanh x = x-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Da ciò si deduce che

$$\frac{x-\tanh x}{(\cosh x-\cos x)\log(1+x))} = \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{(x^2+o(x^2))(x+o(x))} = \frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} =$$

e quindi, applicando il principio di cancellazione delle funzioni trascurabili, si ottiene che il limite proposto è uguale a 1/3. □

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = \left|\log(2-\frac{1}{x})\right|$ *e se ne tracci un grafico indicativo.*

Svolgimento. La funzione proposta è definita in $D = (-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},+\infty)$ ed è ivi continua perchè composizione di funzioni continue. In particolare, si ha

$$f(x) = \left|\log(2-\tfrac{1}{x})\right| = \begin{cases} \log(2-\frac{1}{x}) & \text{se } x \in (-\infty,0)\cup[1,+\infty) \\ -\log(2-\frac{1}{x}) & \text{se } x \in (\frac{1}{2},1) \end{cases}.$$

Con facili applicazioni del teorema sul limite di funzioni composte, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \log 2 = \lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty = \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x).$$

(†) Per l'ultima disuguaglianza, si consideri lo sviluppo del binomio di Newton, ovvero, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = 1^n + n1^{n-1}\tfrac{1}{n} + \cdots \leq 1+1;$$

ed inoltre, il quoziente è minore di 1 per $n > 1$.

Inoltre, $f(x)$ è composizione di funzioni derivabili per $x \neq 1$ e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x-1)x} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \frac{-1}{(2x-1)x} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}.$$

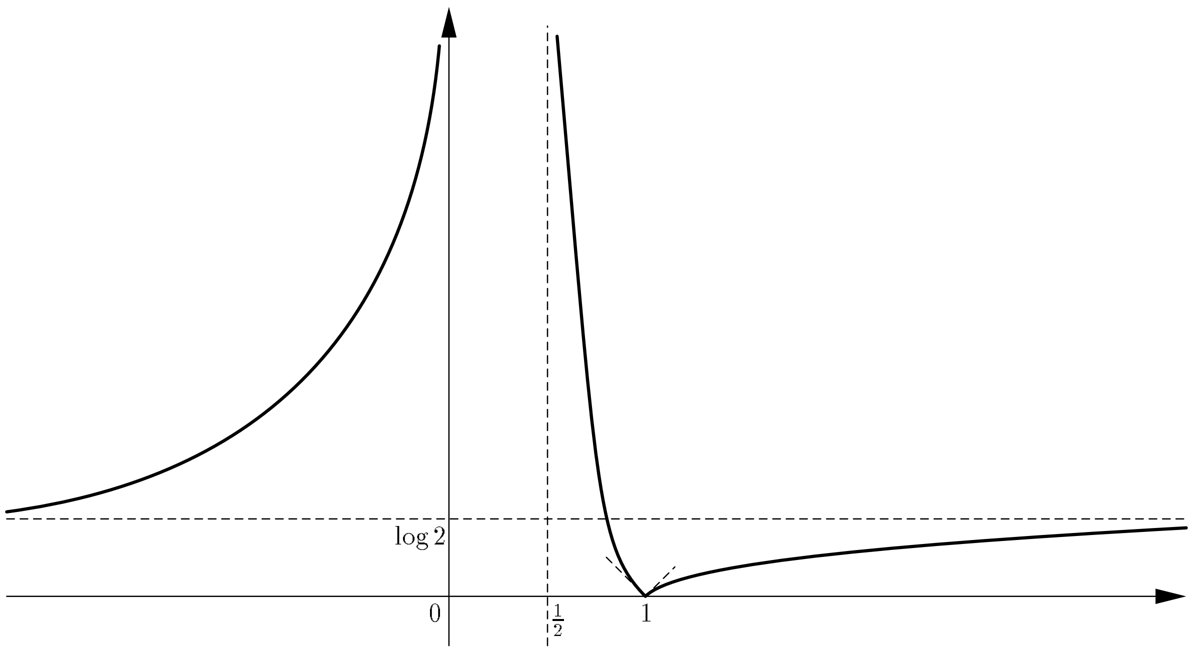
Per $x = 1$, la funzione non è derivabile perchè i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale (che, per la Regola di de L'Hôpital, coincidono con i corrispondenti limiti della derivata) sono distinti.

Poichè il polinomio al denominatore non si annulla all'interno di D, si conclude che $f(x)$ è crescente nelle semirette $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, mentre è decrescente nell'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$. Dunque per $x = 1$ la funzione ha un punto di minimo relativo (ed assoluto) con $f(1) = 0$, ma non è superiormente limitata in D. Infine

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1-4x}{(2x-1)^2x^2} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \\ \frac{4x-1}{(2x-1)^2x^2} & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases},$$

e quindi il grafico di $f(x)$ è convesso sulla semiretta $(-\infty, 0)$ e sull'intervallo $(\frac{1}{2}, 1)$, mentre è concavo sulla seimretta $(1, +\infty)$.

Possiamo quindi tracciare un grafico indicativo dell'andamento della funzione $f(x)$.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 6. *Si determini la primitiva della funzione* $\log(x^2 + 1)$, *che si annulla per* $x = 1$.

Svolgimento. È chiaro che si tratta della funzione $F(x) = \int_1^x \log(t^2+1)dt$. Si tratta di scrivere esplicitamente questa primitiva della funzione proposta. Integrando per parti, si ottengono tutte le primitive di $\log(x^2+1)$, ovvero:

$$\begin{aligned} \int \log(x^2 + 1)\, dx &= x \log(x^1 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} = \\ &= x \log(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx \\ &= x \log(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

La funzione cercata si annulla per $x = 1$ e deve quindi aversi

$$\log 2 - 2 + 2\operatorname{arctg} 1 + c = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad c = 2 - \log 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Si conclude che la primitiva cercata è $F(x) = x\log(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + 2 - \log 2 - \frac{\pi}{2}$. □

ESERCIZIO 7. *Si dica per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale*

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x\operatorname{tg}\frac{1}{x} - 1}{(\pi + \sqrt{x})^{\alpha}}\,dx.$$

Svolgimento. La funzione integranda è asintoticamente equivalente ad $\frac{1}{3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}$. Infatti, ricordando che per $y \to 0$ si ha $\operatorname{tg} y = y + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x\operatorname{tg}\frac{1}{x}-1}{(\pi+\sqrt{x})^{\alpha}}}{\frac{1}{3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}} = \lim_{y\to 0} \frac{3(\frac{\operatorname{tg} y}{y} - 1)}{y^{2+\frac{\alpha}{2}}\left(\pi + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{\alpha}} = 1.$$

Dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale proposto converge se, e solo se, converge l'integrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{3x^{2+\frac{\alpha}{2}}}\,dx$ e ciò accade se, e solo se, $2 + \frac{\alpha}{2} > 1$, cioè $\alpha > -2$. □

ESERCIZIO 8. *Calcolare gli autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica. Dire se ϕ è diagonalizzabile ed esprimere, se possibile, il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di autovettori.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (3-\lambda)(\lambda-2)^2$ e quindi gli autovalori sono 3, con molteplicità 1 e 2, con molteplicità 2. I sottospazi di autovettori corrispondenti sono $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e quindi ϕ è diagonalizzabile. Si ha infine $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} 2\lambda x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & \lambda + 1 \\ -2\lambda^2 x & - & y & + & (1-\lambda^2)z & = & -\lambda \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & \lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2-1 & 1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0, -1, 1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 ed il sistema ha quindi infinite soluzioni della forma

$$x = \frac{\lambda^2 - \lambda - 1 + t(-\lambda^3 + 2\lambda)}{2\lambda(\lambda^2-1)}, \qquad y = \frac{\lambda^2 - t}{\lambda^2 - 1}, \qquad z = t \qquad (\lambda \notin \{0,-1,1\},\ t \in \mathbb{R})$$

Per $\lambda = 0$, la matrice incompleta ha rango 1 e quella completa ha rango 2. Il sistema non ha quindi soluzioni. Per $\lambda = -1$ o $\lambda = 1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni, rispettivamente,

$$\begin{cases} x = & \frac{-1-t}{2} \\ y = & t \\ z = & 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad \begin{cases} x = & \frac{1-t}{2} \\ y = & t \\ z = & 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\square$

ESERCIZIO 10. *Si considerino il piano π e la retta r di equazioni:*

$$\pi : 2x - y + z - 1 = 0 \qquad e \qquad r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare le equazioni dei piani passanti per r ed inclinati di $\frac{\pi}{3}$ rispetto a π.
(b) Determinare le coordinate dei punti P e Q di r aventi distanza $2\sqrt{3}$ dall'origine.
(c) Dette P' e Q' le proiezioni ortogonali di P e Q su π, calcolare l'area del trapezio di vertici P, Q, P', Q'.

Svolgimento. (a). Il fascio di piani contenernte r ha equazione $\lambda(x - y) + \mu(y + z) = 0$. I piani del fascio inclinati di $\frac{\pi}{3}$ rispetto a π sono determinati dai valori di λ e μ che verificano l'equazione

$$\frac{|2\lambda - (\mu - \lambda) + \mu|}{\sqrt{6}\sqrt{\lambda^2 + (\mu - \lambda)^2 + \mu^2}} = \frac{1}{2}$$

Tutte le soluzioni di questa equazione sono proporzionali a $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -1 \end{cases}$ oppure a $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases}$, e quindi i piani cercati sono $x + y + 2z = 0$ e $x - 2y - z = 0$.

(b). La retta r ha equazioni parametriche $\begin{cases} x &= -t \\ y &= -t \\ z &= t \end{cases}$. I punti di r a distanza $2\sqrt{3}$ dall'origine corrispondono ai valori di t che risolvono l'equazione $\sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = 2\sqrt{3}$. Tali punti sono quindi $P(-2, -2, 2)$ e $Q(2, 2, -2)$.

(c). Le lunghezze delle basi PP' e QQ' del trapezio sono le distanze di P e Q da π. L'altezza del trapezio è la distanza tra P' e Q' che è uguale alla distanza tra le rette parallele passanti per P e Q e perpendicolari a π. Abbiamo quindi

$$\overline{PP'} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \overline{QQ'} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \qquad \overline{P'Q'} = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

e l'area del trapezio risulta uguale a $2\sqrt{2}$.

$\square$

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 7 settembre 1999

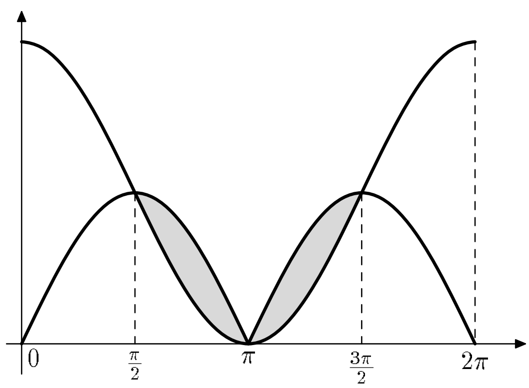
ESERCIZIO 1. *Si disegni in* $\mathbb{R}^2$ *la regione*

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2\pi,\ \ 1 + \cos x < y < |\sin x| \right\}$$

e se ne determini l'area.

Svolgimento. Si veda il disegno qui sotto, ove A è la regione ombreggiata.

La regione piana A è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$, come si verifica facilmente ricordando che $\cos(2\pi - x) = \cos x$ e $\sin(2\pi - x) = -\sin x$. È quindi sufficiente determinare la porzione di A al di sopra dell'intervallo $[0, \pi]$; e su tale intervallo si ha $1 + \cos x = \sin x = 1$ se $x = \frac{\pi}{2}$ e $1 + \cos x = \sin x = 0$ se $x = \pi$; Inoltre, $1 + \cos x > 1 > \sin x$ per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, ed $1 + \cos x < \sin x$ per $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, come si vede facilmente studiando la differenza tra le due funzioni.



Dunque l'area a dell'insieme A è uguale a

$$a = 2\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 1 - \cos x)\, dx\right] = 2\left[-\cos x - x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4 - \pi.$$

Ciò conclude la discussione. $\square$

ESERCIZIO 2. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le soluzioni dell'equazione*

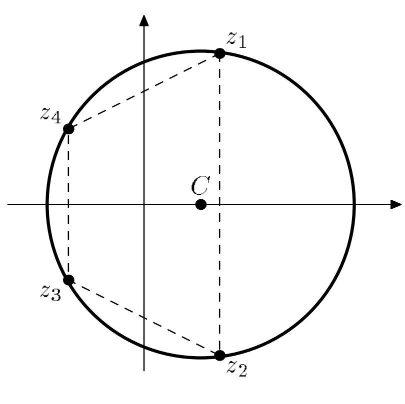
$$(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

e si determini (se esiste) la circonferenza passante per questi punti indicandone il centro, il raggio e l'equazione cartesiana.

Svolgimento. Le soluzioni dell'equazione proposta sono i numeri complessi

$$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = 1 - 2i, \qquad z_3 = -1 - i, \qquad z_4 = i - 1.$$

Nel piano di Argand-Gauß si tratta quindi dei vertici di un trapezio isoscele. Una generica circonferenza del piano ha equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, ove il punto (x_0, y_0) è il suo centro ed il numero reale positivo r è il raggio. Imponendo le condizioni che la circonferenza passi per i quattro punti dati, si ottiene il sistema



$$\begin{cases} (-1 - 1x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = r^2 \\ (-1 - x_0)^2 + (-1 - y_0)^2 = r^2 \\ (1 - x_0)^2 + (2 - y_0)^2 = r^2 \\ (1 - x_0)^2 + (-2 - y_0)^2 = r^2 \end{cases}.$$

Il sistema è verificato per $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 0$, $r^2 = \frac{65}{16}$; si tratta quindi della circonferenza di equazione $2x^2 + 2y^2 - 3x - 7 = 0$. □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio della radice e lo si applichi allo studio della convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Svolgimento. Cominciamo formulando il

Teorema. [Criterio della radice]. *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini reali positivi. Allora, se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *la serie converge; mentre, se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *la serie diverge*(†).

Nel caso in questione, si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\sin\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\log(\sin\frac{1}{n})}.$$

Essendo $\lim_{n\to\infty} n\log(\sin\frac{1}{n}) = -\infty$, si conclude che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0 < 1$ e quindi la serie proposta converge. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x - x + \sqrt[3]{(x+\sin x)^{10}}}{1 + x + \log(1-x) - \cos x}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, per $x \to 0^+$, si ha

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

e inoltre, $\sqrt[3]{(x+\sin x)^{10}}$ è trascurabile rispetto ad x^3. Dunque, cancellando gli addendi trascurabili al numeratore ed al denominatore, il limite in questione coincide con

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/3}{-x^3/3} = -1.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione* $f(x) = (x-2)^2 \log|x-2|$ *e se ne tracci un grafico indicativo. Si dica inoltre se* $f(x)$ *si estende ad una funzione continua e derivabile su tutta la retta reale.*

Svolgimento. Osserviamo che $f(x)$ è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, ed è continua e derivabile in ogni punto di D, essendo un prodotto di funzioni continue e derivabili su tale insieme. Inoltre, il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta $x = 2$, essendo $f(x) = f(4-x)$ per ogni $x \in D$. Possiamo quindi ridurci a studiare la funzione sulla semiretta $(2, +\infty)$.

Si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \text{e quindi} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty.$$

(†) Il criterio può essere enunciato in una forma più generale utilizzando i concetti di massimo e minimo limite per una successione. Si vedano il libro o gli appunti del corso per questa formulazione.

Quindi $f(x)$ si può estendere ad una funzione continua su tutta la retta reale, ponendo $f(2) = 0$, e supporremo tacitamente nel seguito di considerare questa funzione in luogo di f. Per $x \neq 2$, si ha

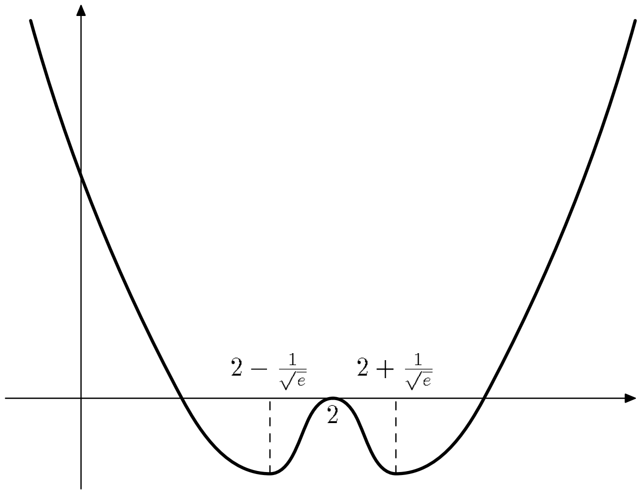
$$f'(x) = (x-2)(2\log|x-2|+1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^+} f'(x) = 0 = \lim_{x\to 2^-} f'(x);$$

dunque, poichè f è continua per $x = 2$, si conclude che f è anche derivabile per $x = 2$, con derivata nulla in tal punto. Possiamo quindi rispondere affermativamente all'ultima domanda e proseguire nello studio dell'andamento di f.

Per $x \neq 2$, si ha

$$f'(x) = 0 \iff x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$$

e inoltre, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}) \cup (0, 2 + \frac{1}{\sqrt{e}})$, mentre $f'(x) > 0$ per $x \in (2 - \frac{1}{\sqrt{e}}, 0) \cup (2 + \frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$. Dunque, $f(x)$ è decrescente in $(-\infty, 2 - \frac{1}{\sqrt{e}})$ e $(0, 2 + \frac{1}{\sqrt{e}})$, mentre è crescente in $(2 - \frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$ e $(2 + \frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$. Per $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$ si hanno dei punti di minimo relativo ed assoluto ($f(2 \pm \frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$), mentre $x = 2$ ($f(2) = 0$) è l'unico punto di massimo relativo della funzione estesa.



Osserviamo infine che, per $x \neq 2$, $f''(x) = 2\log|x-2| + 3$ e quindi $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ sono due punti di flesso nel grafico di f ed il grafico è convesso all'esterno di questi due punti, mentre è concavo all'interno. □

ESERCIZIO 6. *Si disegni la regione di piano S, i cui punti (x, y) soddisfano alle condizioni*

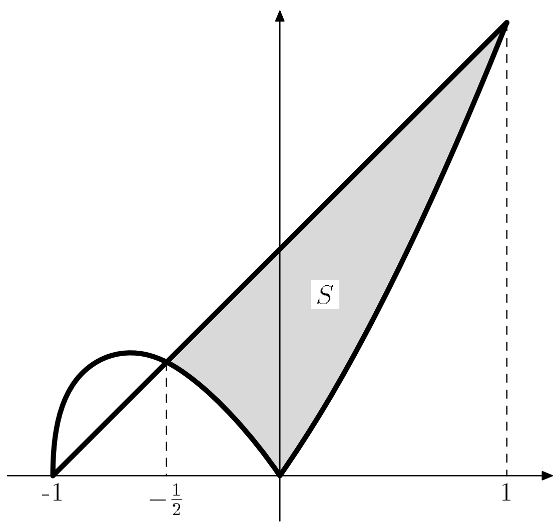
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq -1 \\ y < x+1 \\ y^2 > 2x^2(x+1) \end{cases}.$$

Si determini inoltre il volume del solido che si ottiene ruotando S attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. La retta $y = x + 1$ e la curva $y^2 > 2x^2(x + 1)$ si incontrano in tre punti e precisamente per $x = -1, -\frac{1}{2}, 1$.

La funzione $g(x) = \sqrt{2x^2(x+1)}$ è continua nell'intervallo $[-1, 1]$ ed è derivabile (nei punti interni) per $x \neq 0$, ove si ha $g'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{\sqrt{2x^2(x+1)}}$. Dunque g è crescente sull'intervallo $(-1, -\frac{2}{3})$ e decresce su $(-\frac{2}{3}, 0)$, mantenendosi al di sopra della retta $y = x + 1$ su $(-1, -\frac{1}{2})$, come si vede facilmente, ad esempio calcolando il valore massimo di $g(x)$ sull'intervallo $(-1, 0)$. Inoltre g è crescente su $(0, 1)$, ma il suo grafico è al di sotto della retta $y = x + 1$. Dunque la regione S è quella indicata in grigio nel disegno qui a fianco.

Dobbiamo quindi calcolare il volume V del solido che si ottiene ruotando la regione S attorno all'asse delle ascisse.



Poichè il bordo della regione S è costituito dal grafico di due funzioni continue, si ha

$$V = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \left[(x+1)^2 - 2x^2(x+1)\right]\, dx = \frac{45}{32}\pi$$

e questo è il volume cercato. $\square$

ESERCIZIO 7. *Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^\alpha} \int_0^x (t - [t])\, dt,$$

ove, come di consueto, $[t]$ indica la parte intera del numero reale t.

Svolgimento. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x (t - [t])\, dt$. Per ogni numero reale x fissato, si ha

$$\int_0^x (t - [t])\, dt = \frac{[x]}{2} + \frac{(x - [x])^2}{2}.$$

Inoltre, $\frac{(x-[x])^2}{2}$ è una funzione limitata (i cui valori sono compresi tra 0 ed $\frac{1}{2}$) e per $x > 0$, si ha

$$\frac{[x]}{[x]+1} \le \frac{[x]}{x} \le 1,$$

da cui si deduce $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]}{x} = 1$ e quindi

$$g(x) = \frac{x}{2} + o(x) \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque il limite proposto è equivalente al limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2(x^2+1)^\alpha},$$

che diverge per $\alpha < \frac{1}{2}$; converge ad $\frac{1}{2}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$; e converge a 0 per ogni altro valore di α. $\square$

ESERCIZIO 8. *Verificare che 2 è autovalore dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

nella base canonica.

Calcolare gli altri eventuali autovalori ed i relativi sottospazi di autovettori. Dire in particolare se ϕ è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $\det(A - \lambda\mathbf{1}) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8$ che si annulla per $\lambda = 2$.

Dividendo il polinomio caratteristico per $(\lambda - 2)$ otteniamo $4 - \lambda^2$ e quindi gli autovalori di ϕ sono: 2, con molteplicità 2, e -2, con molteplicità 1.

I relativi sottospazi di autovettori sono rispettivamente $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ che hanno dimensione 1 e perciò ϕ non è diagonalizzabile.

$\square$

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x & + & y & - & z & + & t & = & 1 \\ & & (\lambda-1)y & + & 2z & - & 2t & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & (\lambda+1)z & + & (-\lambda-1)t & = & 2 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi infinite soluzioni (dipendenti da un parametro, μ) della forma

$$x = \frac{\lambda-2}{\lambda-1}, \qquad y = \frac{1}{\lambda-1}, \qquad z = \mu, \qquad t = \mu \qquad (\lambda \notin \{0,1\}, \mu \in \mathbb{R}).$$

Per $\lambda = 0$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni (dipendenti da due parametri, μ e ν) della forma

$$x = 2-\mu+\nu, \qquad y = -1+2\mu-2\nu, \qquad z = \mu \qquad t = \nu \qquad (\mu, \nu \in \mathbb{R})$$

Per $\lambda = 1$, la matrice completa ha rango 3, mentre quella incompleta ha rango 2 e quindi il sistema non ha soluzioni. □

ESERCIZIO 10. *Si considerino le rette*

$$r : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = \tau \\ y = 3-\tau \\ z = 3+\tau \end{cases}$$

(a) *Verificare che r e s sono incidenti e trovare il punto P di intersezione.*
(b) *Trovare i punti Q e Q' di r a distanza $3\sqrt{2}$ da P ed i piani π e π', passanti rispettivamente per Q e Q' e perpendicolari a s.*
(c) *Determinare il volume del cilindro con le basi contenute nei piani π e π', con asse contenuto nella retta s, e con le circonferenze di base passanti per i punti Q e Q'.*

Svolgimento. (a). Il sistema lineare $\begin{cases} 2-t = \tau \\ 1+t = 3-\tau \\ 2 = 3+\tau \end{cases}$ ha soluzione $\begin{cases} t = 3 \\ \tau = -1 \end{cases}$ e quindi il punto P di intersezione ha coordinate $(-1,4,2)$.

(b). Usando le equazioni $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 4+t \\ z = 2 \end{cases}$ come equazioni parametriche della retta r, i punti Q e Q' corrispondono ai valori di t che verificano l'equazione $\sqrt{t^2+t^2} = 3\sqrt{2}$ che sono ± 3. Abbiamo quindi $Q(-4,7,2)$ e $Q'(2,1,2)$.

I piani perpendicolari alla retta s hanno equazione $x-y+z+d = 0$. Sostituendo le coordinate di Q e Q' otteniamo i valori di d corrispondenti ai piani π e π'. Si ha $\pi : x-y+z+9 = 0$ e $\pi : x-y+z-3 = 0$.
(c). L'altezza h del cilindro è uguale alla distanza di un punto qualsiasi di π, per esempio Q, da π', mentre il raggio R di base del cilindro è uguale alla distanza di Q da s. Quindi

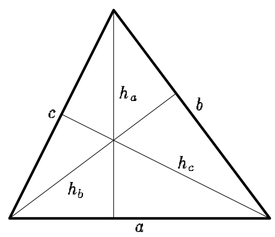
$$h = \frac{|-4-7+2-3|}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \qquad R = \frac{\left\| \overrightarrow{PQ} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

Il volume del cilindro è quindi $\pi(\sqrt{6})^2 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\,\pi$ □

Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova scritta del 28 settembre 1999

ESERCIZIO 1. *Si indichino con a, b, c i lati di un triangolo, con h_a, h_b, h_c le altezze ad essi relative e con A l'area del triangolo.*



Si dimostri che se

$$\frac{ah_b}{2} + \frac{bh_c}{2} + \frac{ch_a}{2} = 3A$$

allora il triangolo è necessariamente equilatero.

Svolgimento. Poniamo $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$ $z = \frac{c}{a}$. Dividendo per $A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ i due membri dell'uguaglianza, si ottiene la relazione $x + y + z = 3$; ed inoltre si ha $xyz = 1$. Osserviamo ora che x, y, z devono essere numeri reali positivi e quindi il problema è equivalente alle condizioni

$$\begin{cases} x + y = 3 - z \\ xy = 1/z \\ 0 < z < 3 \end{cases} \qquad \text{ove si cercano soluzioni } x, y \text{ reali e positive.}$$

Si tratta quindi di determinare soluzioni reali e positive all'equazione $t^2 - (3 - z)t + 1/z = 0$, al variare del parametro $z \in (0, 3)$. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = (z-3)^2 - \dfrac{4}{z}$, che non è mai positivo nell'intervallo considerato e si annulla solo per $z = 1^{(*)}$. Per tale valore di z, si ha $x = y = z = 1$ e quindi vi è soluzione al problema proposto solo quando i tre lati sono uguali tra loro. □

ESERCIZIO 2. *Si disegnino nel piano di Argand-Gauß le soluzioni dell'equazione*

$$[x^2 - 2(1 + i)x + 2i - 1][x^2 - 2(1 + 3i)x + 6i - 12] = 0$$

e si determini, se esiste, una parabola con asse verticale passante per questi punti indicandone il vertice e l'equazione cartesiana.

Svolgimento. $z_1 = 3i - 1$, $z_2 = 3i + 3$, $z_3 = i$, $z_4 = 2 + i$.

Vertice $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; equazione $3y = 2x^2 - 4x + 3$ □

ESERCIZIO 3. *Si enunci il criterio della radice e lo si applichi allo studio della convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}.$$

Svolgimento. Cominciamo formulando il

$^{(*)}$ Si ponga $g(z) = z(z - 3)^2 - 4$ e si osservi che $\Delta = \frac{g(z)}{z}$. Ora $g(z)$ è crescente per $z \in (0, 1)$ e decrescente per $z \in (1, 3)$ e si ha $g(0) = g(3) = -4$ e $g(1) = 0$. Ciò è sufficiente per determinare il segno del discriminante nell'intervallo in questione.

Teorema. [Criterio della radice]. *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie a termini reali positivi. Allora, se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, *la serie converge; mentre, se* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, *la serie diverge*[(†)].

Nel caso in questione, si ha

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log(\cos\frac{1}{n})}.$$

Essendo $\lim_{n\to+\infty} n^2\log(\cos\frac{1}{n}) = -\frac{1}{2}$, si conclude che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$ e quindi la serie proposta converge. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh x - x + \sqrt[3]{(x+\operatorname{tg} x)^{10}}}{1 + x - \log(1+x) - \cosh x}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, per $x \to 0^+$, si ha

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4),$$

e inoltre, $\sqrt[3]{(x+\operatorname{tg} x)^{10}}$ è trascurabile rispetto ad x^3. Dunque, cancellando gli addendi trascurabili al numeratore ed al denominatore, il limite in questione coincide con

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/6}{-x^3/3} = -\frac{1}{2}.$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 5. *Si studi l'andamento della funzione*

$$f(x) = \frac{x\, e^{\frac{x+2}{x-1}}}{x-1}$$

e se ne tracci un grafico indicativo (Non è richiesto lo studio della derivata seconda).

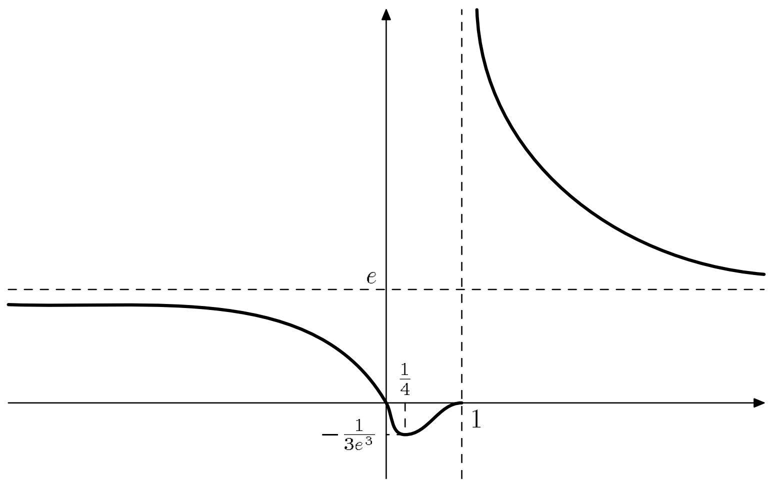
Svolgimento. La funzione proposta è definita, continua e derivabile per $x \neq 1$.

Inoltre, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0;$$

ove i primi due limiti sono immediati, mentre l'ultimo si può calcolare con la sostituzione $t = \frac{x+2}{x-1}$, tramite cui diventa

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{t+2}{3e^{-t}} = 0.$$



(†) Il criterio può essere enunciato in una forma più generale utilizzando i concetti di massimo e minimo limite per una successione. Si vedano il libro o gli appunti del corso per questa formulazione.

Nel dominio di definizione, si ha $f'(x) = \frac{e^{\frac{x+2}{x-1}}}{(x-1)^2}\frac{1-4x}{x-1}$ e quindi f è decrescente in $(-\infty, \frac{1}{4})$ ed in $(1, +\infty)$, mentre è crescente in $(\frac{1}{4}, 1)$. Dunque, il punto $x = \frac{1}{4}$ è un punto di minimo relativo ed $f(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{3e^3}$. Infine, $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$. Ciò giustifica il grafico tracciato qui sopra. □

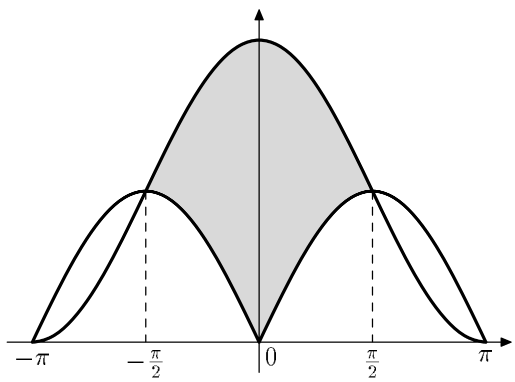
ESERCIZIO 6. *Si disegni in $\mathbb{R}^2$ la regione*

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi \le x \le \pi,\ |\sin x| < y < 1 + \cos x \right\}$$

e si determini il volume del solido che si ottiene ruotando A attorno all'asse delle ascisse.

Svolgimento. Si veda il disegno qui sotto, ove A è la regione ombreggiata.

La regione piana A è simmetrica rispetto all' asse verticale, come si verifica facilmente ricordando che $\cos(-x) = \cos x$ e $\sin(-x) = -\sin x$. È quindi sufficiente determinare la porzione di A al di sopra dell'intervallo $[0, \pi]$; e su tale intervallo si ha $1 + \cos x = \sin x = 1$ se $x = \frac{\pi}{2}$. Inoltre, $\sin x < 1 < 1 + \cos x$ per $x \in [0, \frac{\pi}{2})$, ed $1 + \cos x < \sin x$ per $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, come si vede facilmente studiando la differenza tra le due funzioni.



Dunque il volume V del solido che si ottiene ruotando l'insieme A attorno all'asse delle ascisse è uguale a

$$V = \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1 + \cos x)^2 - \sin^2 x]\, dx = \pi \Big[x + 2\sin x + \sin x \cos x \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi(4 + \pi).$$

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 7. *Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si calcoli il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\alpha^2}}{2(x^2+1)^\alpha} \int_0^x (2[t] + 1)\, dt,$$

ove, come di consueto, $[t]$ indica la parte intera del numero reale t.

Svolgimento. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x (2[t] + 1)\, dt$. Per ogni numero reale $x \ge 1$, fissato, si ha

$$\int_0^x (2[t] + 1)\, dt = \sum_{j=1}^{[x]} (2j - 1)\ +\ (x - [x])(2[x] + 1) = [x]^2 + (x - [x])(2[x] + 1).$$

Si osservi che, $x - [x]$ è una funzione limitata (i cui valori sono compresi tra 0 ed 1) e quindi, per $x \to +\infty$, si ha $[x] = x + o(x)$. Da ciò si deduce che $g(x) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to +\infty$ e dunque il limite proposto coincide con il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3-\alpha^2}}{2(x^2+1)^\alpha}$, che diverge per $-3 < \alpha < 1$; converge ad $\frac{1}{2}$ per $\alpha = -1 \pm 2$; e converge a 0 per ogni altro valore di α. □

ESERCIZIO 8. *Verificare che il vettore* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *è autovettore dell'endomorfismo ϕ di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nella base canonica e determinarne il relativo autovalore. Calcolare gli altri eventuali autovalori di ϕ e dire se è diagonalizzabile.

Svolgimento. Si ha $A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$; quindi $\mathbf{v}$ è autovettore ed il relativo autovalore è -2.

Dividendo $\det(A - \lambda\mathbf{1})$ per $\lambda + 2$ otteniamo $-(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ e quindi gli altri autovalori di ϕ sono 1 e 2. Poiché ϕ ha tre autovalori distinti, possiamo concludere che è diagonalizzabile. □

ESERCIZIO 9. *Trovare le soluzioni del sistema lineare*

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ \lambda x + 4\lambda y + (2-\lambda)z = 2+\lambda \\ x + (\lambda+3)y + \lambda z = 3 \end{cases}$$

al variare del parametro λ in $\mathbb{R}$.

Svolgimento. La matrice completa è equivalente alla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix}$. Per $\lambda \notin \{0,1\}$, matrice completa ed incompleta hanno rango 3 ed il sistema ha quindi un'unica soluzione della forma

$$x = \frac{\lambda-6}{\lambda}, \qquad y = \frac{1}{\lambda}, \qquad z = 0 \qquad (\lambda \notin \{0,,1\})$$

Per $\lambda = 0$, la matrice incompleta ha rango 2 e quella completa ha rango 3. Il sistema non ha quindi soluzioni. Per $\lambda = 1$, matrice completa ed incompleta hanno rango 2 e il sistema ha infinite soluzioni:

$$x = -5 + 7t, \qquad y = 2 - 2t, \qquad z = t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

□

ESERCIZIO 10. *Si considerino il piano π e la retta r di equazioni:*

$$\pi : x + y + 2z + 1 = 0 \qquad e \qquad r : \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r è contenuta in π.

(b) Determinare le coordinate dei punti P e Q di intersexione di r, rispettivamente, con i piani xy e yz e l'area del triangolo OPQ.

(c) Determinare le equazioni parametriche della retta s passante per l'origine e perperdicolare a π, e i punti S di s tali che il parallelepipedo di spigoli OP, OQ, OS abbia volume 27

Svolgimento. (a). Il sistema lineare $\begin{cases} x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{cases}$ ha infinite soluzioni e quindi r è contenuta in π.

(b). Le coordinate dei punti P e Q si trovano ponendo rispettivamente $z = 0$ e $x = 0$ nelle equazioni cartesiane di r; quindi: $P(1,-2,0)$ e $Q(0,-3,1)$. L'area A del triangolo OPQ è metà dell'area del parallelogramma di lati OP e OQ:

$$A = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|| = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

(c). Le equazioni parametriche di s sono $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$. Le coordinate del generico punto T di s sono quindi $(t,t,2t)$ $(t \in \mathbb{R})$. Il volume del parallelepipedo con spigoli OP, OQ e OT è dato dal prodotto misto

$$\left|\left\langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OT} \right\rangle\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ t & t & 2t \end{pmatrix}\right| = |-9t|$$

Risolvendo l'equazione $|-9t| = 27$ otteniamo i punti $(3,3,6)$ e $(-3,-3,-6)$. □