Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 30 ottobre 2001 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme dei numeri reali x per cui si abbia*

$$\log\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x-3}}{2|x|-3}\right) \geq 0,$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. Affinché sia definito il termine di sinistra della disuguaglianza, deve aversi

$$\begin{cases} 2|x|-3>0 \\ 2x^2-2x-3>0 \end{cases} \qquad \text{che vale per } x > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ oppure per } x < -\frac{3}{2}.$$

Il logaritmo (qualunque sia la base) non è negativo se il suo argomento è maggiore o uguale ad 1; quindi la disuguaglianza proposta è equivalente al problema di determinare i numeri reali x per cui

$$\begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2x^2-2x-3}}{2|x|-3} \geq 1 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2x^2-2x-3}}{2|x|-3} \geq 1 \end{cases}.$$

Poichè, nelle condizioni poste, i due termini nella frazione sono entrambi positivi, le disuguaglianze sono equivalenti a

$$\begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ 2x^2-2x-3 \geq (2|x|-3)^2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ 2x^2-2x-3 \geq (2|x|-3)^2 \end{cases}.$$

Dobbiamo quindi risolvere i due problemi:

$$\begin{cases} x > \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ x^2-5x+6 \leq 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x^2+7x+6 \leq 0 \end{cases},$$

che danno l'insieme delle soluzioni al problema iniziale, ovvero $[-6, -\frac{3}{2}) \cup [2, 3]$ (si osservi che $\frac{1+\sqrt{7}}{2} < 2$, perchè $\sqrt{7} < 3$). □

ESERCIZIO 2. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x^2)}{x \cos\frac{\pi}{x^2}} & \textit{se } |x| \geq \sqrt{3} \\ ax + bx^3 & \textit{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Se $|x| \geq \sqrt{3}$, il denominatore $x \cos\frac{\pi}{x^2}$ non si annulla (tutti i suoi zeri sono nell'intervallo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$) e quindi $f(x)$ è definita e continua per tali valori della x e derivabile nei punti interni, ovvero per $|x| > \sqrt{3}$. Per $|x| < \sqrt{3}$, $f(x)$ coincide con un polinomio e quindi è certamente continua e derivabile, qualsiasi siano le costanti a e b. Resta quindi il problema del comportamento della funzione e della sua derivata per $|x| = \sqrt{3}$, ed essendo f una funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$), possiamo limitarci a studiarla per $x = \sqrt{3}$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\sin(\pi x^2)}{x\cos\frac{\pi}{x^2}} = 0 = f(\sqrt{3}), \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} ax + bx^3 = (a+3b)\sqrt{3};$$

quindi f è continua nel punto x se, e solo se, $a + 3b = 0$.

Supponiamo soddisfatta questa condizione e studiamo la derivabilità di f. Per $x \neq \sqrt{3}$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2\pi x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}\cos(\pi x^2) - \sin(\pi x^2)\left(\cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2\pi}{x^2}\sin\frac{\pi}{x^2}\right)}{x^2(\cos\frac{\pi}{x^2})^2} & \text{se } |x| > \sqrt{3} \\ a + 3bx^2 & \text{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}.$$

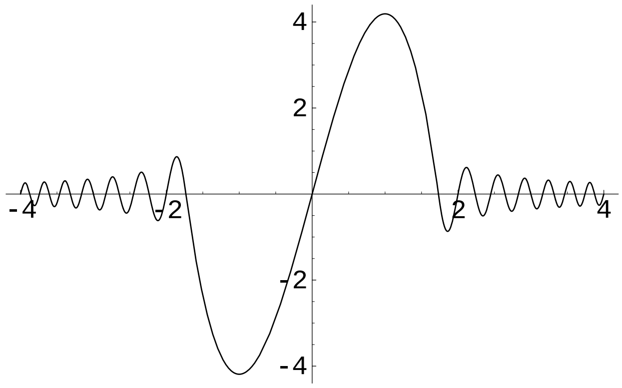
Se f è continua per $x = \sqrt{3}$, il limite del rapporto incrementale in questo punto coincide con il limite della derivata prima (*se quest'ultimo esiste!*). Possiamo quindi considerare

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f'(x) = -4\pi \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f'(x) = a + 9b.$$

Dunque, affinchè f sia continua e derivabile, le due costanti a e b devono soddisfare alle condizioni:

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ a + 9b = -4\pi \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = 2\pi \\ b = -\frac{2}{3}\pi \end{cases}.$$

Qui sotto mostriamo un grafico indicativo del comportamento di $f(x)$.



Fine della discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione* $f(x) = \left|\frac{2+x}{1-x}\right| e^{\frac{1}{x-1}}$ *e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.*

Svolgimento. Per prima cosa osserviamo che f è definita e continua per $x \neq 1$ perchè composizione di funzioni continue ed è certamente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, perchè composizione di funzioni derivabili. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$

Inoltre, con la sostituzione $y = \frac{1}{1-x}$, si ha

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \left|y(3 - \frac{1}{y})\right| e^{-y} = 0.$$

e ciò conclude lo studio del comportamento di f al bordo del dominio di definizione.

Consideriamo ora la derivata prima, ovvero la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(1-x)^2} \dfrac{1-4x}{1-x} & \text{se } x \in (-2,1) \\ \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(1-x)^2} \dfrac{1-4x}{x-1} & \text{se } x \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty) \end{cases}$$

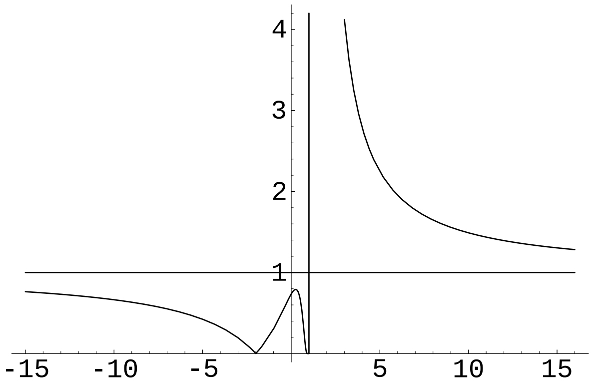
ed osserviamo che

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \frac{e^{-1/3}}{3} \neq -\frac{e^{-1/3}}{3} = \lim_{x\to -2^-} f'(x).$$

Poiché la funzione f è continua per $x = -2$, i limiti considerati coincidono con i limiti del rapporto incrementale (Regola di de l'Hôpital) e quindi f non è derivabile al di fuori dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Per quanto riguarda il segno della derivata, abbiamo messo in evidenza i termini che ne caratterizzano il segno e possiamo quindi scrivere che

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (-2, \tfrac{1}{4}) \cup (1, +\infty) \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -2) \cup (\tfrac{1}{4}, 1).$$

Dunque, $x = -2$ è un punto di minimo relativo ed assoluto per $f(x)$, mentre $x = \frac{1}{4}$ è un punto di massimo relativo, con $f(\frac{1}{4}) = 3\sqrt[3]{e^4}$. Osserviamo che si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$.



Il grafico qui sopra è indicativo del comportamento di $f(x)$. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 30 ottobre 2001 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme dei numeri reali x per cui si abbia*

$$\log\left(\frac{2|x|-2}{\sqrt{3x^2+2x-1}}\right) \geq 0,$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. Affinché sia definito il termine di sinistra della disuguaglianza, deve aversi

$$\begin{cases} 2|x|-2>0 \\ 3x^2+2x-1>0 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad |x|>1.$$

Il logaritmo (qualunque sia la base) non è negativo se il suo argomento è maggiore o uguale ad 1; quindi la disuguaglianza proposta è equivalente al problema di determinare i numeri reali x per cui

$$\begin{cases} |x|>1 \\ \dfrac{2|x|-2}{\sqrt{3x^2+2x-1}} \geq 1 \end{cases}.$$

Poichè i due termini nella frazione sono entrambi positivi, la condizione è equivalente a

$$\begin{cases} |x|>1 \\ (2|x|-2)^2 \geq 3x^2+2x-1 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} |x|>1 \\ x^2-8|x|-2x+5 \geq 0 \end{cases}.$$

Dobbiamo quindi risolvere i due problemi:

$$\begin{cases} x>1 \\ x^2-10x+5 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x<-1 \\ x^2+6x+5 \geq 0 \end{cases},$$

che danno l'insieme delle soluzioni al problema iniziale, ovvero $(-\infty,-5] \cup [5+2\sqrt{5},+\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si determinino (se esistono) due numeri reali a e b tali che la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x^2)}{x^2 \cos\frac{\pi}{x^2}} & \text{se } |x| \geq \sqrt{3} \\ a+bx^2 & \text{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

sia continua e derivabile su tutti i punti della retta reale.

Svolgimento. Se $|x| \geq \sqrt{3}$, il denominatore $x\cos\frac{\pi}{x^2}$ non si annulla (tutti i suoi zeri sono nell'intervallo $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$) e quindi $f(x)$ è definita e continua per tali valori della x e derivabile nei punti interni, ovvero per $|x|>\sqrt{3}$. Per $|x|<\sqrt{3}$, $f(x)$ coincide con un polinomio e quindi è certamente continua e derivabile, qualsiasi siano le costanti a e b. Resta quindi il problema del comportamento della funzione e della sua derivata per $|x|=\sqrt{3}$, ed essendo f una funzione pari ($f(-x)=f(x)$), possiamo limitarci a studiarla per $x=\sqrt{3}$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{\cos(\pi x^2)}{x^2\cos\frac{\pi}{x^2}} = -\frac{2}{3} = f(\sqrt{3}), \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\sqrt{3}^-} a+bx^2 = a+3b;$$

quindi f è continua nel punto x se, e solo se, $a+3b=-\frac{2}{3}$.

Supponiamo soddisfatta questa condizione e studiamo la derivabilità di f. Per $x \neq \sqrt{3}$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2\pi x^3 \cos\frac{\pi}{x^2}\sin(\pi x^2) - \cos(\pi x^2)\left(2x\cos\frac{\pi}{x^2} + \frac{2}{x}\pi\sin\frac{\pi}{x^2}\right)}{x^4(\cos\frac{\pi}{x^2})^2} & \text{se } |x| > \sqrt{3} \\ 2bx & \text{se } |x| < \sqrt{3} \end{cases}.$$

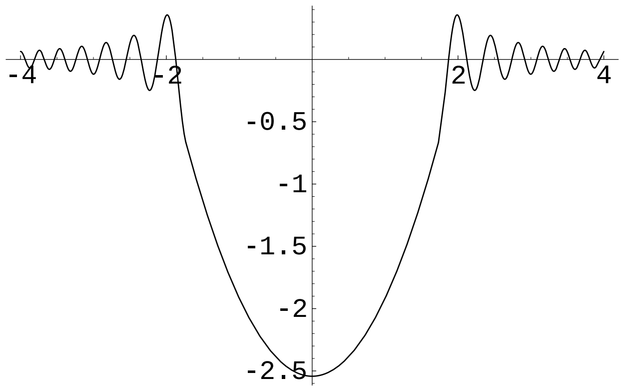
Se f è continua per $x = \sqrt{3}$, il limite del rapporto incrementale in questo punto coincide con il limite della derivata prima (*se quest'ultimo esiste!*). Possiamo quindi considerare

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} f'(x) = \frac{4}{9}(\sqrt{3}+\pi) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\sqrt{3}^-} f'(x) = 2\sqrt{3}b.$$

Dunque, affinchè f sia continua e derivabile, le due costanti a e b devono soddisfare alle condizioni:

$$\begin{cases} a + 3b = -\frac{2}{3} \\ 2\sqrt{3}b = \frac{4}{9}(\sqrt{3}+\pi) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = -\frac{2}{3\sqrt{3}}(2\sqrt{3}+\pi) \\ b = \frac{2}{9\sqrt{3}}(\sqrt{3}+\pi) \end{cases}.$$

Qui sotto mostriamo un grafico indicativo del comportamento di $f(x)$.



Fine della discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione* $f(x) = \left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| e^{\frac{1}{2-x}}$ *e si tracci un grafico indicativo del suo andamento.*

Svolgimento. Per prima cosa osserviamo che f è definita e continua in $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ perchè composizione di funzioni continue ed è certamente derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$, perchè composizione di funzioni derivabili. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty.$$

Inoltre, con la sostituzione $y = \frac{1}{x-2}$, si ha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{y\to+\infty} \left|y(3 + \frac{1}{y})\right| e^{-y} = 0;$$

e ciò conclude lo studio del comportamento di f al bordo del dominio di definizione.

Consideriamo ora la derivata prima, ovvero la funzione

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(x-2)^2}\dfrac{7-2x}{x-2} & \text{se } x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty) \\ \dfrac{e^{\frac{1}{2-x}}}{(x-2)^2}\dfrac{7-2x}{2-x} & \text{se } x \in (-1,2) \end{cases}$$

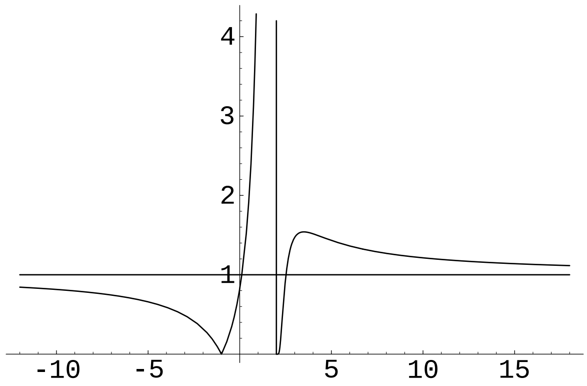
ed osserviamo che

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \frac{e^{1/3}}{3} \neq -\frac{e^{1/3}}{3} = \lim_{x\to -1^-} f'(x).$$

Poiché la funzione f è continua per $x = -1$, i limiti considerati coincidono con i limiti del rapporto incrementale (Regola di de l'Hôpital) e quindi f non è derivabile al di fuori dell'insieme $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$. Per quanto riguarda il segno della derivata, abbiamo messo in evidenza i termini che ne caratterizzano il segno e possiamo quindi scrivere che

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad x \in (2, \tfrac{7}{2}) \cup (-1, 2) \qquad \text{e} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{se} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (\tfrac{7}{2}, +\infty).$$

Dunque, $x = -1$ è un punto di minimo relativo ed assoluto per $f(x)$, mentre $x = \frac{7}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(\frac{7}{2}) = \frac{3}{\sqrt[3]{e^2}}$. Osserviamo che si ha $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$.



Il grafico qui sopra è indicativo del comportamento di $f(x)$. □