Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 26 aprile 2001 – Compito **A**

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) Si scrivano l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti e le coordinate del baricentro G del triangolo PQR.

(b) Sia O l'origine del riferimento. Al variare del punto X nella retta $O + G$, si determini il rapporto tra il volume del tetraedro di vertici $XPQR$ e l'area del triangolo di vertici XPQ.

(c) Nelle notazioni del punto precedente, si determinino i punti X per cui il rapporto detto, vale $\frac{2}{3}$. In tal caso, qual è la distanza di R dal piano per P, Q ed X?

Svolgimento. (a). Si considerino i vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il piano passante per P, Q ed R deve essere ortogonale al vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$, e passare per uno qualunque dei punti dati, quindi l'equazione del piano è $y + 2z = 1$. Il baricentro del triangolo ha coordinate baricentriche $\frac{P+Q+R}{3}$, e quindi è il punto $G = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b). I punti della retta $O + G$ hanno coordinate $X_t = \begin{pmatrix} 4t \\ 3t \\ 0 \end{pmatrix}$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Il volume V del tetraedro di vertici $XPQR$ è

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4t \\ 1 & 3 & -1 & 3t \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-3t \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{2|1-3t|}{3}.$$

L'area A del triangolo di vertici X_tPQ, si calcola a partire dalla matrice $Y = \begin{pmatrix} 1 & 4t \\ 2 & 3t-1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{PX_t}$, ricordando che

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)} = \frac{\sqrt{50t^2+4t+2}}{2}.$$

Dunque il rapporto cercato è $\frac{4|1-3t|}{3\sqrt{50t^2+4t+2}}$(*).

(c). Ora $\frac{4|1-3t|}{3\sqrt{50t^2+4t+2}} = \frac{2}{3}$ se, e solo se, $4(1-3t)^2 = 50t^2 + 4t + 2$; ovvero se, e solo se, $7t^2 + 14t - 1 = 0$, ovvero per $t = -1 \pm 2\sqrt{\frac{2}{7}}$. La distanza del punto R dal piano per P, Q ed X, come osservato nella nota, è il triplo del rapporto tra il volume del tetraedro e l'area della faccia PQX, cioè 2. □

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(*) Si può osservare che il rapporto tra il volume del tetraedro e l'area di una delle sue facce, altro non è che un terzo dell'altezza relativa e tale faccia, ovvero che il rapporto cercato è uguale ad un terzo della distanza del punto R dal piano per P, Q ed X_t.

rispetto alle basi canoniche dei due spazi.

(a) *Si determinino nucleo ed immagine di ϕ, esibendo delle basi di tali sottospazi.*

(b) *Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determinino le matrici (rispetto alle basi canoniche dei due spazi) di tutte le applicazioni lineari $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, per cui si abbia $\phi \circ \chi = \psi$.

Svolgimento. (a). La matrice A ha rango 2, come si può verificare facilmente con operazioni elementari sulle righe. Dunque $\ker\phi$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2, che è anche la dimensione del sottospazio $\operatorname{im}\phi$ di $\mathbb{R}^3$. In particolare, si ha

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b). Perchè una tale applicazione lineare $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ esista, deve aversi che le colonne della matrice C appartengano all'immagine di A. Ciò accade, ed una possibile applicazione χ ha matrice

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Inoltre, sommando a χ tutte le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ a valori nel sottospazio $\ker\phi$, si ottengono tutte le soluzioni a questo problema. Le matrici delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ a valori in $\ker\phi$, formano un sottospazio di dimensione 6 nello spazio $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, ed una sua base è formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ciò risponde pienamente al quesito posto. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il triangolo, avente come vertici i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) *Si scrivano le equazioni cartesiane della retta h, perpendicolare al piano π contenente il triangolo e passante per il centro della circonferenza $\mathscr{C}$, circoscritta al triangolo stesso.*

(b) *Si determinino il centro C ed il raggio r di $\mathscr{C}$.*

(c) *Si determinino i punti V della retta h che sono vertice di un cono di semiapertura $\frac{\pi}{6}$, che taglia sul piano π la circonferenza $\mathscr{C}$ e si scriva l'equazione cartesiana di un tale cono.*

Svolgimento. (a). Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo. Quindi la retta h è contenuta in ognuno dei piani perpendicolari ai lati del triangolo, passanti per i rispettivi punti medii degli stessi. Il punto medio del lato PQ è $M = \dfrac{P+Q}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ e quindi il piano perpendicolare al lato e passante per il punto medio è il luogo dei punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MX} = 0$, ovvero $x - 2y + z = 0$. Analogamente, il piano perpendicolare al lato QR e passante per il punto medio ha equazione cartesiana $x - y + 1 = 0$, e quindi la retta h ha equazioni cartesiane

$$h : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(b). La retta h interseca il piano $\pi : x + y + z = 3$ nel punto $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, centro della circonferenza $\mathscr{C}$, ed il raggio r è uguale alla distanza di C da P, ovvero $r = \sqrt{2}$.
(c). La retta h è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi un suo generico punto ha coordinate $V_t = \begin{pmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{pmatrix}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. I punti cercati devono soddisfare alla condizione

$$\frac{|\overrightarrow{V_t R} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_t R}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|3t|}{\sqrt{3t^2 + 2}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I possibili vertici del cono sono i due punti V_t per $t = \pm\sqrt{2}$, ovvero $V_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $V_{-\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$, che sono i vertici dei due coni

$$\mathcal{C}' = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \frac{|\overrightarrow{V_{\sqrt{2}} X} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_{\sqrt{2}} X}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}'' = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \frac{|\overrightarrow{V_{-\sqrt{2}} X} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_{-\sqrt{2}} X}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \right\}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &: 4(x + y + z - 3 - 3\sqrt{2})^2 - 9[(x - \sqrt{2})^2 + (y - 1 - \sqrt{2})^2 + (z - 2 - \sqrt{2})^2] = 0 \\ \mathcal{C}'' &: 4(x + y + z - 3 + 3\sqrt{2})^2 - 9[(x + \sqrt{2})^2 + (y - 1 + \sqrt{2})^2 + (z - 2 + \sqrt{2})^2] = 0. \end{aligned}$$

$\square$

ESERCIZIO 1. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) *Si scrivano l'equazione cartesiana del piano passante per i tre punti e le coordinate del baricentro G del triangolo PQR.*

(b) *Sia O l'origine del riferimento. Al variare del punto X nella retta $O + G$, si determini il rapporto tra il volume del tetraedro di vertici $XPQR$ e l'area del triangolo di vertici XPQ.*

(c) *Nelle notazioni del punto precedente, si determinino i punti X per cui il rapporto detto, vale $\frac{2}{\sqrt{3}}$. In tal caso, qual è la distanza di R dal piano per P, Q ed X?*

Svolgimento. (a). Si considerino i vettori $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il piano passante per P, Q ed R deve essere ortogonale al vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, e passare per uno qualunque dei punti dati, quindi l'equazione del piano è $y + z = 2$. Il baricentro del triangolo ha coordinate baricentriche $\frac{P+Q+R}{3}$, e quindi è il punto $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b). I punti della retta $O + G$ hanno coordinate $X_t = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$, al variare di t in $\mathbb{R}$. Il volume V del tetraedro di vertici $XPQR$ è

$$V = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & t \\ 0 & 2 & 1 & t \\ 2 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1-t \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right| = |1 - t|.$$

L'area A del triangolo di vertici X_tPQ, si calcola a partire dalla matrice $Y = \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 2 & t \\ -2 & t-2 \end{pmatrix}$, che ha come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{PX_t}$, ricordando che

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det({}^tYY)} = \frac{\sqrt{26t^2 - 60t + 36}}{2}.$$

Dunque il rapporto cercato è $\frac{2|1-t|}{\sqrt{26t^2-60t+36}}$(*).

(c). Ora $\frac{2|1-t|}{\sqrt{26t^2-60t+36}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ se, e solo se, $3(1-t)^2 = 26t^2 - 60t + 36$; ovvero se, e solo se, $23t^2 - 54t + 33 = 0$. Il discriminante di questa equazione è negativo e quindi non ci sono punti reali della retta $O + G$ per cui questa condizione sia soddisfatta. Non esistendo un tale piano PQX non possiamo calcolarne la distanza dal punto R. □

(*) Si può osservare che il rapporto tra il volume del tetraedro e l'area di una delle sue facce, altro non è che un terzo dell'altezza relativa e tale faccia, ovvero che il rapporto cercato è uguale ad un terzo della distanza del punto R dal piano per P, Q ed X_t.

ESERCIZIO 2. *Si consideri l'applicazione lineare $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, di matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi.

(a) *Si determinino nucleo ed immagine di ϕ, esibendo delle basi di tali sottospazi.*

(b) *Si consideri l'endomorfismo $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, di matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determinino le matrici (rispetto alle basi canoniche dei due spazi) di tutte le applicazioni lineari $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, per cui si abbia $\phi \circ \chi = \psi$.

Svolgimento. (a). La matrice A ha rango 2, come si può verificare facilmente con operazioni elementari sulle righe. Dunque $\ker\phi$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2, che è anche la dimensione del sottospazio $\operatorname{im}\phi$ di $\mathbb{R}^3$. In particolare, si ha

$$\ker\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad \operatorname{im}\phi = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

(b). Perchè una tale applicazione lineare $\chi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ esista, deve aversi che le colonne della matrice C appartengano all'immagine di A. Ciò accade, ed una possibile applicazione χ ha matrice

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Inoltre, sommando a χ tutte le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ a valori nel sottospazio $\ker\phi$, si ottengono tutte le soluzioni a questo problema. Le matrici delle applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ a valori in $\ker\phi$, formano un sottospazio di dimensione 6 nello spazio $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, ed una sua base è formata dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ciò risponde pienamente al quesito posto. □

ESERCIZIO 3. *Nello spazio euclideo tridimensionale si consideri il triangolo, avente come vertici i punti P, Q, R, di coordinate*

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

rispetto ad un riferimento ortonormale.

(a) *Si scrivano le equazioni cartesiane della retta h, perpendicolare al piano π contenente il triangolo e passante per il centro della circonferenza $\mathscr{C}$, circoscritta al triangolo stesso.*

(b) *Si determinino il centro C ed il raggio r di $\mathscr{C}$.*

(c) *Si determinino i punti V della retta h che sono vertice di un cono di semiapertura $\frac{\pi}{6}$, che taglia sul piano π la circonferenza $\mathscr{C}$ e si scriva l'equazione cartesiana di un tale cono.*

Svolgimento. (a). Il centro della circonferenza circoscritta al triangolo è l'intersezione degli assi dei lati del triangolo. Quindi la retta h è contenuta in ognuno dei piani perpendicolari ai lati del triangolo, passanti per i rispettivi punti medii degli stessi. Il punto medio del lato PQ è $M = \frac{P+Q}{2} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ e quindi il piano perpendicolare al lato e passante per il punto medio è il luogo dei punti $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MX} = 0$, ovvero $x + 2y - z = 0$. Analogamente, il piano perpendicolare al lato QR e passante per il punto medio ha equazione cartesiana $y - z = 1$, e quindi la retta h ha equazioni cartesiane

$$h : \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(b). La retta h interseca il piano $\pi : x - y - z = -3$ nel punto $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, centro della circonferenza $\mathscr{C}$, ed il raggio r è uguale alla distanza di C da P, ovvero $r = \sqrt{2}$.

(c). La retta h è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e quindi un suo generico punto ha coordinate $V_t = \begin{pmatrix} -t-2 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}$, al variare di $t \in \mathbb{R}$. I punti cercati devono soddisfare alla condizione

$$\frac{|\overrightarrow{V_tR} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_tR}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{|3t|}{\sqrt{3t^2+2}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

I possibili vertici del cono sono i due punti V_t per $t = \pm\sqrt{2}$, ovvero $V_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $V_{-\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, che sono i vertici dei due coni

$$\mathcal{C}' = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{|\overrightarrow{V_{\sqrt{2}}X} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_{\sqrt{2}}X}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \right\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{C}'' = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, \frac{|\overrightarrow{V_{-\sqrt{2}}X} \cdot \mathbf{v}|}{\|\overrightarrow{V_{-\sqrt{2}}X}\| \, \|\mathbf{v}\|} = \cos\frac{\pi}{6} \right\}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{C}' &: 4(x+y+z+3+3\sqrt{2})^2 - 9[(x+2+2\sqrt{2})^2 + (y-1-\sqrt{2})^2 + (z-\sqrt{2})^2] = 0 \\ \mathcal{C}'' &: 4(x+y+z-3-3\sqrt{2})^2 - 9[(x+2-2\sqrt{2})^2 + (y-1+\sqrt{2})^2 + (z+\sqrt{2})^2] = 0. \end{aligned}$$

□