Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 20 novembre 2001 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si calcoli*

$$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \arcsin x \, dx.$$

Svolgimento. Ricordiamo che con $\arcsin x$ si intende la funzione definita in $[-1, 1]$ e crescente che inverte $\sin t$ quando $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, ovvero quella che, per quei valori di t, soddisfa alla condizione $t = \arcsin(\sin(t))$. La sua derivata è quindi (cf. la derivazione delle funzioni inverse), $\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Integrando per parti, si ha:

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Quindi, ricordando che, per $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si ha $\sin t = \frac{1}{2}$ per $t = \frac{\pi}{6}$, e $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ per $t = \frac{\pi}{4}$, si ha

$$\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \arcsin x \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi(3 - \sqrt{2}) + 12 - 6\sqrt{6}}{12\sqrt{2}};$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni sul piano di Gauss il segmento che congiunge le due soluzioni dell'equazione* $x^2 - (2+i)x + 2 - 2i = 0$ *e si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione del segmento attorno all'asse orizzontale.*

Svolgimento. Le soluzioni dell'equazione sono i due numeri complessi

$$\frac{(2+i) \pm [(2+i)^2 - 4(2-2i)]^{1/2}}{2} = \frac{(2+i) \pm [-5+12i]^{1/2}}{2},$$

ove $z^{\frac{1}{2}}$ sta ad indicare una qualunque delle radici quadrate del numero complesso z. Ora, dato un numero complesso $x + iy$, si ha $(x+iy)^2 = -5 + 12i$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Quindi i due numeri complessi cercati sono: $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + 2i$.

Il solido generato dalla rotazione del segmento $z_1 z_2$ attorno all'asse orizzontale è costituito da due coni (retti) contrapposti ed il suo volume, V, si può determinare a partire dall'equazione $y = \frac{3}{2}x - 1$ della retta passante per z_1 e z_2, tramite l'integrale

$$V = \pi \int_0^2 \frac{9}{4} \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 dx = \frac{9\pi}{4} \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)^3\right]_0^2 = 2\pi.$$

Fine dell'esercizio. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{A}{n-2} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2B-3C=1 \\ 2C=2 \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{n+2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n-2} - \frac{3}{n-1} + \frac{1}{n} \qquad \text{per ogni intero } n \geq 3.$$

Da ciò si deduce che, per k elevato si ha,

$$\begin{aligned} s_k = \sum_{n=3}^{k} \frac{n+2}{n(n-1)(n-2)} &= \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \\ &+ \frac{2}{2} - \frac{3}{3} + \frac{1}{4} \\ &+ \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \\ &+ \frac{2}{4} - \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{2}{k-3} - \frac{3}{k-2} + \frac{1}{k-1} \\ &+ \frac{2}{k-2} - \frac{3}{k-1} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

e quindi la somma della serie è $\lim_{k \to +\infty} s_k = \frac{3}{2}$. □

ESERCIZIO 4. *Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 - \cos \frac{1}{x}} \, dx.$$

Svolgimento. Sia $y = \frac{1}{x}$; per $x \to +\infty$, si ha che $y \to 0$ e quindi, per le Formule di Mc Laurin, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$. Se ne deduce che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{1-\cos\frac{1}{x}}}{x^{\alpha+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2(\frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2}))} = 2$$

e quindi, per il *Criterio del Confronto Asintotico*, l'integrale proposto converge se, e solo se converge

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha+2} \, dx.$$

e ciò accade se, e solo se, $\alpha + 2 < -1$, ovvero $\alpha < -3$. □

Istituzioni di Matematiche (CH-CI-MT) - Mod A

prova di accertamento del 20 novembre 2001 – Compito B

ESERCIZIO 1. *Si calcoli*

$$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Svolgimento. Ricordiamo che con $\operatorname{arctg} x$ si intende la funzione definita su tutta la retta reale, che inverte $\operatorname{tg} t$ quando $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ovvero quella che, per quei valori di t, soddisfa alla condizione $t = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(t))$. La sua derivata è quindi (cf. la derivazione delle funzioni inverse), $\frac{d \operatorname{arctg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$.

Integrando per parti, si ha:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Quindi, ricordando che, per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, si ha $\operatorname{tg} t = 1$ per $t = \frac{\pi}{4}$, e $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$ per $t = \frac{\pi}{3}$, si ha

$$\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx = \sqrt{3}\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\log 4 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2 = \frac{\pi(4\sqrt{3}-3) - 6\log 2}{12};$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni sul piano di Gauss il segmento che congiunge le due soluzioni dell'equazione* $x^2 + ix + 1 + 3i = 0$ *e si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione del segmento attorno all'asse orizzontale.*

Svolgimento. Le soluzioni dell'equazione sono i due numeri complessi

$$\frac{-i \pm [(-i)^2 - 4(1+3i)]^{1/2}}{2} = \frac{-i \pm [-5-12i]^{1/2}}{2},$$

ove $z^{\frac{1}{2}}$ sta ad indicare una qualunque delle radici quadrate del numero complesso z. Ora, dato un numero complesso $x + iy$, si ha $(x+iy)^2 = -5 - 12i$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Quindi i due numeri complessi cercati sono: $z_1 = i - 1$, $z_2 = 1 - 2i$.

Il solido generato dalla rotazione del segmento $z_1 z_2$ attorno all'asse orizzontale è costituito da due coni (retti) contrapposti ed il suo volume, V, si può determinare a partire dall'equazione $y = -\frac{3}{2}(x + \frac{1}{3})$ della retta passante per z_1 e z_2, tramite l'integrale

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \frac{9}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 dx = \frac{9\pi}{4}\left[\frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{3}\right)^3\right]_{-1}^{1} = 2\pi.$$

Fine dell'esercizio. □

ESERCIZIO 3. *Si calcoli la somma della serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)}.$$

Svolgimento. Si osservi che

$$\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \qquad \text{ove} \qquad \begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=5 \\ 2A=4 \end{cases}$$

e quindi

$$\frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{n+2} \qquad \text{per ogni intero } n \geq 1.$$

Da ciò si deduce che, per k elevato si ha,

$$\begin{aligned} s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{5n+4}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{3}{3} \\ &+ \frac{2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \\ &+ \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \\ &+ \frac{2}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} \\ &+ \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} = \frac{7}{2} - \frac{2}{k+1} - \frac{3}{k+2}. \end{aligned}$$

e quindi la somma della serie è $\lim_{k \to +\infty} s_k = \frac{7}{2}$. □

ESERCIZIO 4. *Si dica per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ converge*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\cosh \frac{1}{x} - 1}\, dx.$$

Svolgimento. Sia $y = \frac{1}{x}$; per $x \to +\infty$, si ha che $y \to 0$ e quindi, per le Formule di Mc Laurin, $\cosh y = 1 + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$. Se ne deduce che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{\cosh \frac{1}{x} - 1}}{x^{\alpha+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2\left(\frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = 2$$

e quindi, per il *Criterio del Confronto Asintotico*, l'integrale proposto converge se, e solo se converge

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha+2}\, dx.$$

e ciò accade se, e solo se, $\alpha + 2 < -1$, ovvero $\alpha < -3$. □