## Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 5 giugno 2001 – Compito **A**

**ESERCIZIO 1**. *Sullo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^4$, *si consideri l'applicazione bilineare simmetrica* $g$, *di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

$(a)$ *Si determini la segnatura (indice di inerzia) di* $g$.

*Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.*

$(b_1)$ *Vi è una base ortonormale di* $\mathbb{R}^4$ *relativamente a* $g$.

$(b_2)$ *Vi è una base di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto a cui* $g$ *ha matrice* $J = \begin{pmatrix} 0&2&0&0 \\ 2&0&0&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}$.

$(b_3)$ *Vi è una base di* $\mathbb{R}^4$ *rispetto a cui* $g$ *ha matrice* $K = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

*Svolgimento.* (a). Si osservi che i sottospazi $W_1 = \langle e_1, e_3 \rangle$ e $W_2 = \langle e_2, e_4 \rangle$ sono mutuamente ortogonali e le matrici della restrizione di $g$ a tali sottospazi sono $G_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ rispettivamente. Nel primo caso la restrizione di $g$ è definita positiva, mentre nel secondo è definita negativa e quindi, per il Teorema di Sylvester $i(g) = 0$.

$(b)$. L'unica affermazione compatibile con il valore di $i(g)$ è $(b_2)$. Per trovare una base del tipo richiesto, consideriamo la base ortogonale $\{e_3, e_1 + e_3, e_2, 2e_2 + e_4\}$, rispetto alla quale $g$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Allora i vettori

$$v_1 = e_3 + e_2, \quad v_2 = e_3 - e_2, \quad v_3 = (e_1 + e_3) + \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 + e_4), \quad v_4 = (e_1 + e_3) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 + e_4),$$

sono una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui $g$ ha matrice $J$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'endomorfismo* $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, *avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

*rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di* $\phi$, *una matrice di Jordan* $J$ *di* $\phi$ *ed una matrice invertibile* $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ *tale che* $J = P^{-1}AP$.

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x-3)^4$ e si ha

$$A - 3\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, , \quad (A - 3\mathbf{1}_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

ed $(A - 3\mathbf{1}_4)^3 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(x-3)^3$e, considerando il rango delle potenze di $A - 3\mathbf{1}_4$, si conclude che

$$\dim\ker(\phi - 3) = 2, \qquad \dim\ker(\phi-3)^2 = 3, \qquad \dim\ker(\phi-3)^3 = 4;$$

e perciò la matrice di Jordan di $\phi$ è

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Preso il vettore $e_1 \notin \ker(\phi-3)^2$, si ha che i vettori

$$v_4 = e_1, \quad v_3 = (\phi-3)(e_1) = -2e_1 + 2e_2 + 2e_3, \quad v_2 = (\phi-3)^2(e_1) = -6e_2 + 6e_4,$$

sono linearmente indipendenti. Inoltre, il vettore $v_1 = e_1 + 2e_2 - e_3$ è un autovettore indipendente da $v_2$; quindi, rispetto alla base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$, l'endomorfismo $\phi$ ha matrice $J$. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$$

*Svolgimento.* $\mathcal{C}$ è la conica di matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

con $\det A = -144$ e $\det A' = 24$. Si tratta quindi di un'ellisse (non degenere), che ha sicuramente punti reali perchè la forma quadratica associata non è definita, come si vede facilmente guardando ai segni degli elementi posti sulla diagonale di $A$.

Il centro di $A$ è il punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ per cui si abbia ${}^tCA = (\rho, 0, 0)$ per qualche $\rho \neq 0$; ovvero il punto le cui coordinate sono soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ -x + 5y = 2 \end{cases}.$$

Dunque, in coordinate omogenee, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'equazione degli assi, ovvero

$$(p, q) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} = q^2 - p^2 = 0,$$

dice che le direzioni degli assi sono $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $Q_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si han così i due assi

$$h_1 = C + Q_\infty : x - y = 0 \text{(asse focale)}, \qquad h_2 = C + P_\infty : x + y = 1.$$

Considerando la matrice (associata al riferimento ortonormale con origine nel centro ed assi $h_1$ ed $h_2$)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

si ha

$${}^tPAP = 6 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi $h_1$ è proprio l'asse focale e $\mathcal{C}$ è l'ellisse di equazione canonica $\frac{2}{3}X^2 - Y^2 = 1$.

I fuochi sono i punti dell'asse $h_1$ posti a distanza $\sqrt{\frac{3}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dal centro, ovvero

$$F_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \qquad F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ciò conclude la discussione. □

## Esame di Geometria (laurea in Fisica)

prova di accertamento del 5 giugno 2001 – Compito **B**

**ESERCIZIO 1**. *Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si consideri l'applicazione bilineare simmetrica $g$, di matrice*

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*rispetto alla base canonica.*

$(a)$ *Si determini la segnatura (indice di inerzia) di $g$.*

*Si dica quale tra le seguenti affermazioni è vera e si determini una base soddisfacente alle condizioni ivi descritte.*

$(b_1)$ *Vi è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ relativamente a $g$.*

$(b_2)$ *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui $g$ ha matrice* $J = \begin{pmatrix} 0&2&0&0 \\ 2&0&0&0 \\ 0&0&0&2 \\ 0&0&2&0 \end{pmatrix}$.

$(b_3)$ *Vi è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui $g$ ha matrice* $K = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

*Svolgimento.* $(a)$. Si osservi che i sottospazi $W_1 = \langle e_1, e_3 \rangle$ e $W_2 = \langle e_2, e_4 \rangle$ sono mutuamente ortogonali e le matrici della restrizione di $g$ a tali sottospazi sono $G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente. Nel primo caso la restrizione di $g$ non è definita, mentre nel secondo è definita positiva. Considerando i sottospazi $W_+ = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ e $W_- = \langle e_2, e_3, e_4 \rangle^\perp = \langle e_1 + 2e_3 \rangle$, si ha una decomposizione del tipo descritto nel Teorema di Sylvester e quindi la segnatura di $g$ è $i(g) = 2$.

$(b)$. L'unica affermazione compatibile con il valore di $i(g)$ è $(b_3)$. Posto $v_4 = e_1 + 2e_3$, si ha $g(v_4, v_4) = -1$ e quindi, per trovare una base del tipo richiesto, ci serve una base ortonormale di $W_+$. Possiamo quindi prendere $v_1 = e_3$, $v_2 = e_4$ e $v_3 = e_2 - e_4$, ed osservare che $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui $g$ ha matrice $K$. Infatti, considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha ${}^tPGP = K$. □

**ESERCIZIO 2**. *Si consideri l'endomorfismo $\phi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, avente matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

*rispetto alla base canonica. Si determinino il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di $\phi$, una matrice di Jordan $J$ di $\phi$ ed una matrice invertibile $P \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ tale che $J = P^{-1}AP$.*

*Svolgimento.* Il polinomio caratteristico è $p_\phi(x) = \det(A - x\mathbf{1}_4) = (x-2)^4$ e si ha

$$A - 2\mathbf{1}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

ed $(A - 2\mathbf{1}_4)^2 = \mathbf{0}$. Il polinomio minimo è quindi $(x-2)^2$ e, considerando il rango di $A - 2\mathbf{1}_4$, si conclude che

$$\dim\ker(\phi - 2) = 2, \qquad \dim\ker(\phi-2)^2 = 4;$$

e perciò una matrice di Jordan di $\phi$ è

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I vettori $e_1$ ed $e_2$ non appartengono a $\ker(\phi - 2)$, e quindi i vettori

$$v_4 = e_1, \quad v_3 = (\phi-2)(e_1) = -e_1 + e_3, \quad v_2 = e_2, \quad v_1 = (\phi-2)(e_2) = e_1 + 4e_2 - e_3 - 4e_4,$$

sono una base $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_4\}$ di $\mathbb{Q}^4$ rispetto a cui l'endomorfismo $\phi$ ha matrice $J$. Considerata la matrice

$$P = \alpha_{\mathcal{V},\mathcal{E}}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si ha $AP = PJ$. □

**ESERCIZIO 3**. *Si studi la conica $\mathcal{C}$ del piano euclideo, di equazione affine*

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 10xy + 4x - 4y - 8 = 0.$$

*Svolgimento.* Supponiamo il piano euclideo immerso nel piano proiettivo scegliendo come retta impropria la retta $x_0 = 0$ ed utilizziamo indifferentemente sia coordinate omogenee che le corrispondenti coordinate affini.

La conica $\mathcal{C}$ ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det A = 144$ e $\det A' = -24$. Dunque si tratta di un'iperbole (non-degenere).

Il centro di $\mathcal{C}$ è il punto di coordinate $C = \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, soggette alle condizioni

$$\begin{cases} c_1 + 5c_2 = -2 \\ 5c_1 + c_2 = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice $A'$ è $x^2 - 2x - 24$ e quindi gli autovalori sono $6$ e $-4$, a cui corrispondono i sottospazi di autovettori $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ e $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Si ha $-\frac{\det A'}{\det A} = \frac{1}{6}$, e quindi l'equazione canonica dell'iperbole è $X^2 - \frac{2}{3}Y^2 = 1$, e gli assi di $\mathcal{C}$ sono le rette passanti per il centro e parallele ai due autovettori, ovvero $h_1 : x - y = 1$ (asse focale) ed $h_2 : x + y = 0$.

I fuochi sono sull'asse $h_1$, a distanza $\sqrt{1 + \frac{3}{2}}$ dal centro, ovvero i punti

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - \sqrt{\frac{5}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Infine, le intersezioni tra l'iperbole e la retta impropria sono le direzioni degli asintoti, ovvero le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad H_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 + 2\sqrt{6} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ed } H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 + 2\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Dunque gli asintoti dell'iperbole sono le due rette $a_1 : x + (5 - 2\sqrt{6})y + 2 - \sqrt{6} = 0$ ed $a_2 : x + (5 + 2\sqrt{6})y + 2 + \sqrt{6} = 0$. □