Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 8 gennaio 2001

ESERCIZIO 1. *Si calcoli* $\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \; dx$.

Svolgimento. Integrando per parti si ha

$$\int x^3 \operatorname{arctg} x \; dx = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} dx.$$

Ricordando che $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$, si ha

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^4-1)}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + c.$$

Quindi una primitiva di $x^3 \operatorname{arctg} x$ è la funzione $G(x) = \frac{x^4-1}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}$ e, applicando la *Formula di Barrow*, si conclude che

$$\int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \; dx = G(1) - G(0) = \frac{1}{6}.$$

□

ESERCIZIO 2. *Si calcoli* $\int_3^{+\infty} \frac{4+10x-2x^2}{(x-1)(x+3)(x^2+2)} dx$.

Svolgimento. Calcoliamo una primitiva della funzione integranda e, per fare ciò, decomponiamo la funzione razionale nelle sue parti principali, ovvero scriviamo

$$\frac{4+10x-2x^2}{(x-1)(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2},$$

ove le costanti A, B, C, D sono soggette alle condizioni

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A-B+2C+D=-2 \\ 2A+2B-3C+2D=10 \\ 6A-2B-3D=4 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}.$$

Da questa decomposizione si ricava (per $x \in [3, +\infty)$)

$$\int \frac{4+10x-2x^2}{(x-1)(x+3)(x^2+2)} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+3} dx - \int \frac{2x}{x^2+2} dx = \log \frac{(x-1)(x+3)}{x^2+2} + c.$$

Dunque

$$\int_3^{+\infty} \frac{4+10x-2x^2}{(x-1)(x+3)(x^2+2)} dx = \lim_{b \to +\infty} \left[\log \frac{(b-1)(b+3)}{b^2+2} - \log \frac{12}{11} \right] = \log \frac{11}{12}$$

e ciò conclude il calcolo. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino le soluzioni dell'equazione* $x^2 - 2x + 5 = 0$. *Indicata con* z_0 *la soluzione con parte immaginaria positiva, si disegni nel piano di Argand-Gauß l'esagono di vertici* z_0, $z_0\zeta_1$, $z_0\zeta_2$, $z_0\zeta_3$, $z_0\zeta_4$, $z_0\zeta_5$, *ove* $1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$, *sono le soluzioni dell'equazione* $x^6 = 1$.

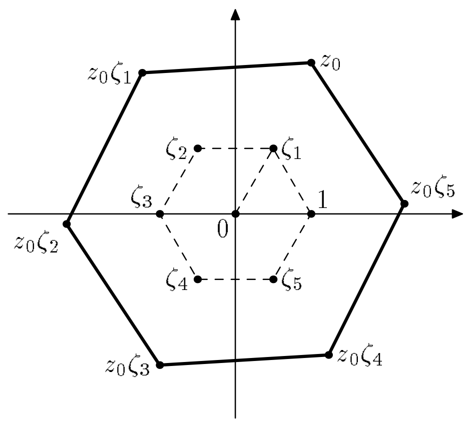
Si determini l'area di tale esagono.

Svolgimento. Le due radici del polinomio $x^2 - 2x + 5$ sono $1 \pm 2i$ e quindi $z_0 = 1 + 2i$. In base alle *formule di de Moivre*, le soluzioni dell'equazione $x^6 = 1$ sono tutte e sole le potenze del numero complesso $\zeta_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; ovvero i numeri complessi

$$\zeta_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_2 = \zeta_1^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_3 = \zeta_1^3 = -1,$$
$$\zeta_4 = \zeta_1^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_5 = \zeta_1^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \zeta_6 = \zeta_1^6 = 1.$$

Questi sei numeri formano un esagono regolare inscritto nella circonferenza unitaria del piano di Argand-Gauß, ovvero l'esagono tratteggiato della figura qui a fianco. L'area A di questo esagono è 6 volte l'area del triangolo di vertici $0, 1, \zeta_1$, ovvero $A = 3\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Moltiplicare per il numero complesso z_0, significa dilatare questa figura del fattore $|z_0| = \sqrt{5}$ e ruotarla dell'angolo $\operatorname{Arg} z_0 = \operatorname{arctg} 2$ (cf. la figura a fianco). Le rotazioni sono isometrie e perciò lasciano invariate le aree, dunque per ottenere l'area richiesta, dobbiamo moltiplicare l'area A dell'esagono tratteggiato per il fattore $|z_0|^2 = 5$ e quindi l'area cercata è uguale a $\frac{15\sqrt{3}}{2}$.



Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 4. *Si enunci il Criterio di Leibniz e lo si applichi allo studio della convergenza della serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log(1+n)}{n}.$$

La serie converge assolutamente?

Svolgimento. L'enunciato richiesto è

Criterio di Leibniz. *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione decrescente di numeri reali non negativi. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ converge se, e solo se, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dobbiamo quindi verificare che la successione di termine generale $a_n = \frac{\log(1+n)}{n}$ soddisfa alle ipotesi del Criterio enunciato. Si tratta evidentemente di una successione di numeri reali positivi e $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{n} = 0$, perchè il logaritmo è trascurabile rispetto a qualsiasi potenza della variabile, quando quest'ultima tende a $+\infty$. Resta quindi da verificare che si tratta di una successione decrescente, ovvero che

$$\frac{\log(1+n)}{n} > \frac{\log(2+n)}{n+1}$$

qualunque sia l'intero $n \geq 1$. Si osservi che

$$\frac{\log(1+n)}{n} > \frac{\log(2+n)}{n+1} \iff (1+n)^{1+n} > (2+n)^n \iff 1+n > \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{1+n}\right)^n$$

e quest'ultima è chiaramente verificata (perchè?).

Dunque la serie proposta soddisfa a tutte le ipotesi del Criterio di Leibniz e quindi converge, ma non converge assolutamente perchè $\frac{\log(1+n)}{n} \geq \frac{1}{n}$, per $n \geq 2$, e quindi il termine generale della serie dei valori assoluti è maggiore, per $n \geq 2$, del termine generale della serie armonica che diverge. Per il *Criterio del confronto* la serie dei valori assoluti è quindi divergente. $\square$

ESERCIZIO 5. *Nello spazio euclideo tridimensionale si considerino i punti* $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e la retta* $r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$.

(a) Detta s la retta per P e Q, si mostri che le rette r ed s sono sghembe e si calcoli la distanza di r da s.
(b) Si determini l'equazione cartesiana del piano π, parallelo ed equidistante dalle rette r ed s.
(c) Si determinino le equazioni della retta r', proiezione ortogonale di r sul piano π.

Svolgimento. (a). Due rette sono sghembe se non sono parallele ed hanno distanza positiva. La retta r passa per l'origine $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, mentre la retta s è parallela al vettore $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. I due vettori non sono paralleli, essendo $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ e la distanza tra le due rette è uguale a

$$\frac{\left|\left\langle \overrightarrow{OQ}, \mathbf{v} \times \mathbf{w} \right\rangle\right|}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} = \frac{10}{\sqrt{61}}.$$

Quindi le due rette sono sghembe.

(b). Il piano π, essendo parallelo, sia ad r che ad s, deve essere perpendicolare al vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Inoltre, per essere equidistante dalle due rette deve passare per il punto medio di un segmento che congiunga due punti appartenenti alle due rette (perchè?), ad esempio per il punto medio del segmento OQ, ovvero $M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Dunque, un generico punto $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartiene a questo piano se, e solo se,

$$\left\langle \mathbf{v} \times \mathbf{w}, \overrightarrow{MX} \right\rangle = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad 3x + 6y + 4z - 5 = 0$$

e questa è l'equazione di π.

(c). La retta r' è l'intersezione tra il piano π ed il piano contenente la retta r e perpendicolare a π, ovvero un piano del tipo $\lambda(x - 2y) + \mu(3y + z) = 0$, che sia parallelo al vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Il piano in questione è $\pi' : 22x - 17y + 9z = 0$ e quindi

$$r' : \begin{cases} 3x + 6y + 4z = 5 \\ 22x - 17y + 9z = 0 \end{cases}$$

e ciò conclude la discussione. $\square$