Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 8 novembre 2000 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme dei numeri reali x per cui si abbia*

$$\left|\frac{2x+1}{|x|-3}\right| \geq 1,$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. Si osservi che, se $x \neq \pm 3$,

$$\left|\frac{2x+1}{|x|-3}\right| \geq 1 \iff (2x+1)^2 \geq (|x|-3)^2 \iff 3x^2+4x+6|x|-8 \geq 0.$$

L'insieme cercato è quindi l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x<0 \\ 3x^2-2x-8 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+10x-8 \geq 0 \end{cases}$$

e dunque è $(-\infty,-3) \cup (-3,-\frac{4}{3}] \cup [\frac{2}{3},3) \cup (3,+\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si dimostri per induzione che, per ogni intero $n \geq 1$, si ha*

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1.$$

Si utilizzino le disuguaglianze per calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$.

Svolgimento. Per $n=1$ le due disuguaglianze divengono $2(\sqrt{2}-1) \leq 1 \leq 2-1$, che sono verificate ($2\sqrt{2} \leq 3$ e, ovviamente, $1 \leq 1$). Supponiamo che le disuguaglianze siano vere per un dato intero n, e quindi si abbia

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1,$$

allora le stesse sono vere per l'intero successivo $n+1$ se, e solo se,

$$2(\sqrt{n+2}-1) \leq 2(\sqrt{n+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{e} \qquad 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1.$$

La prima disuguaglianza è equivalente a

$$2\sqrt{(n+2)(n+1)} \leq 2n+3 \qquad \text{ovvero} \qquad 4(n+2)(n+1) \leq (2n+3)^2$$

e quindi è vera. La seconda disuguaglianza è equivalente a

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1 \qquad \text{ovvero} \qquad 4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$

e quindi sono entrambe vere ed è così conclusa la dimostrazione del passo induttivo.

Per le disuguaglianze appena dimostrate, possiamo scrivere che

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \frac{2\sqrt{n}-1}{n^\alpha},$$

qualunque sia il numero reale α e per ogni intero positivo n. Quindi, applicando il "Principio dei Carabinieri", si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0\le\alpha<\frac12 \\ 2 & \text{se } \alpha=\frac12 \\ 0 & \text{se } \alpha>\frac12 \end{cases},$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}|\sqrt{3}\cos x - \sin x|$ e si tracci un grafico indicativo del suo andamento. (È richiesto lo studio della derivata seconda.)*

Svolgimento. La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è periodica, di periodo 2π. Ci occuperemo quindi di studiare la funzione f ristretta all'intervallo $[0, 2\pi]$ ed osserviamo che essa è certamente derivabile per valori di x che non annullino l'argomento del valore assoluto, ovvero per $x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2} & \text{se } x\in[0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},2\pi] \\ \frac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2} & \text{se } x\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

ed è quindi positiva sugli intervalli $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$ e $(\frac{4\pi}{3}, \frac{11\pi}{6})$. I punti $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ ed $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ sono quindi punti di massimo relativo (ed assoluto), con $f(x_1) = f(x_2) = \operatorname{arctg} 2$; mentre i punti $x_3 = \frac{\pi}{3}$ ed $x_4 = \frac{4\pi}{3}$ sono punti di minimo relativo (ed assoluto) con $f(x_3) = f(x_4) = 0$. In questi ultimi due punti, si ha

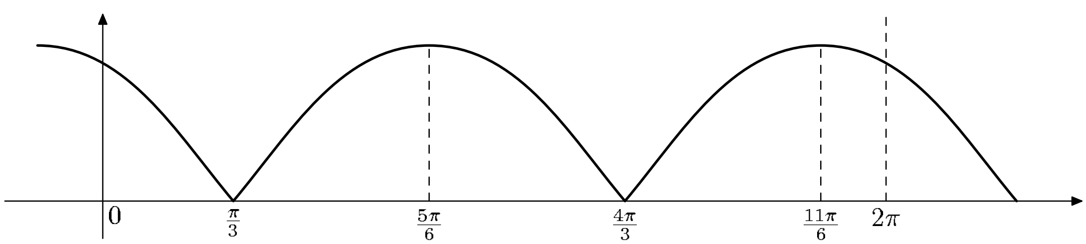
$$f'_-(\tfrac{\pi}{3}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{3})}{x-\frac{\pi}{3}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f'(x) = -2, \quad f'_+(\tfrac{\pi}{3}) = 2, \qquad f'_-(\tfrac{4\pi}{3}) = -2, \quad f'_+(\tfrac{4\pi}{3}) = 2,$$

e quindi f non è derivabile in tali punti.

Si osservi che

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)\left[1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2+2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2\right]}{\left[1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2\right]^2} & \text{se } x\in[0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},2\pi] \\ \frac{(\sqrt{3}\cos x-\sin x)\left[1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2+2(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2\right]}{\left[1+(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2\right]^2} & \text{se } x\in(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}) \end{cases}$$

e quindi, dove f è derivabile, la derivata seconda è negativa ed il grafico di f è concavo.



L'andamento di f è quindi descritto dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri*

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \textit{se } x\le -2 \\ \dfrac{e^{\frac{x-1}{x+2}}}{x+2} & \textit{se } x>-2 \end{cases}$$

e si determinino (se esistono) dei numeri reali a e b affinché $f(x)$ risulti continua e derivabile su tutta le retta reale.

Svolgimento. Per $x \neq -2$, f è continua e derivabile, qualunque siano i numeri reali a e b e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < -2 \\ \dfrac{e^{\frac{x-1}{x+2}}(1-x)}{(x+2)^3} & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

Inoltre, $f(-2) = -2a + b = \lim_{x \to -2^-} f(x)$ e

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{e^{\frac{x-1}{x+2}}}{x+2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1+t}{3e^t} = 0;$$

ove si è fatta la sostituzione $\frac{x-1}{x+2} = -t$. Quindi f è continua per $x = -2$ se, e solo se, $b - 2a = 0$. Sotto tale ipotesi,

$$f'_-(-2) = \lim_{x \to -2^-} f'(x) = a \qquad \text{ed} \qquad f'_+(-2) = \lim_{x \to -2^+} f'(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t(1+t)^2}{9e^t} = 0;$$

ove si è fatta di nuovo la sostituzione $\frac{x-1}{x+2} = -t$. Quindi f è derivabile per $x = -2$ se, e solo se, $b - 2a = 0$ ed $a = 0$. Dunque la funzione cercata deve essere identicamente nulla sulla semiretta $(-\infty, -2]$. □

ESERCIZIO 5. *Si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\sinh x - 3\sin x + \log(1-x^3)}{(\cos x - 1)^2 \operatorname{tg}^2 x}.$$

Svolgimento. Ricordiamo che, in base alle formule di McLaurin, per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), & \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6), & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6), \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), & \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \end{aligned}$$

da cui si deduce, in particolare che, sempre per $x \to 0$, si ha

$$\log(1-x^3) = -x^3 - \frac{x^6}{2} + o(x^6)$$

e quindi

$$\frac{3\sinh x - 3\sin x + \log(1-x^3)}{(\cos x - 1)^2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{x^6}{2} + o(x^6)}{(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))^2 (x + o(x))^2} = -\frac{x^6/2 + o(x^6)}{x^6/4 + o(x^6)}.$$

In conclusione, il limite cercato è uguale a -2. □

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme dei numeri reali x per cui si abbia*

$$\left|\frac{x-1}{2|x|-3}\right| \leq 1,$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli e/o semirette.

Svolgimento. Si osservi che, se $x \neq \pm\frac{3}{2}$,

$$\left|\frac{x-1}{2|x|-3}\right| \leq 1 \iff (x-1)^2 \leq (2|x|-3)^2 \iff 3x^2+2x-12|x|+8 \geq 0.$$

L'insieme cercato è quindi l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ 3x^2+14x+8 \geq 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2-10x+8 \geq 0 \end{cases}$$

e dunque è $(-\infty,-4] \cup [-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}] \cup [2,+\infty)$. □

ESERCIZIO 2. *Si dimostri per induzione che, per ogni intero $n \geq 1$, si ha*

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1.$$

Si utilizzino le disuguaglianze per calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

al variare di $\alpha \in [0,+\infty)$.

Svolgimento. Per $n=1$ le due disuguaglianze divengono $2(\sqrt{2}-1) \leq 1 \leq 2-1$, che sono verificate ($2\sqrt{2} \leq 3$ e, ovviamente, $1 \leq 1$). Supponiamo che le disuguaglianze siano vere per un dato intero n, e quindi si abbia

$$2(\sqrt{n+1}-1) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1,$$

allora le stesse sono vere per l'intero successivo $n+1$ se, e solo se,

$$2(\sqrt{n+2}-1) \leq 2(\sqrt{n+1}-1) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{e} \qquad 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}-1.$$

La prima disuguaglianza è equivalente a

$$2\sqrt{(n+2)(n+1)} \leq 2n+3 \qquad \text{ovvero} \qquad 4(n+2)(n+1) \leq (2n+3)^2$$

e quindi è vera. La seconda disuguaglianza è equivalente a

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n+1 \qquad \text{ovvero} \qquad 4n(n+1) \leq (2n+1)^2$$

e quindi sono entrambe vere ed è così conclusa la dimostrazione del passo induttivo.

Per le disuguaglianze appena dimostrate, possiamo scrivere che

$$\frac{2(\sqrt{n+1}-1)}{n^\alpha} \le \frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \le \frac{2\sqrt{n}-1}{n^\alpha},$$

qualunque sia il numero reale α e per ogni intero positivo n. Quindi, applicando il "Principio dei Carabinieri", si ha

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 \le \alpha < \frac12 \\ 2 & \text{se } \alpha = \frac12 \\ 0 & \text{se } \alpha > \frac12 \end{cases},$$

e ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si studi la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}|\sqrt{3}\sin x + \cos x|$ e si tracci un grafico indicativo del suo andamento. (È richiesto lo studio della derivata seconda.)*

Svolgimento. La funzione è definita e continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed è periodica, di periodo 2π. Ci occuperemo quindi di studiare la funzione f ristretta all'intervallo $[0, 2\pi]$ ed osserviamo che essa è certamente derivabile per valori di x che non annullino l'argomento del valore assoluto, ovvero per $x \ne \frac{5\pi}{6} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2} & \text{se } x \in [0, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi] \\ -\frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2} & \text{se } x \in (\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}) \end{cases}$$

ed è quindi positiva sugli intervalli $[0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$ e $(\frac{11\pi}{6}, 2\pi)$. I punti $x_1 = \frac{5\pi}{6}$ ed $x_2 = \frac{11\pi}{6}$ sono quindi punti di minimo relativo (ed assoluto), con $f(x_1) = f(x_2) = 0$; mentre i punti $x_3 = \frac{\pi}{3}$ ed $x_4 = \frac{4\pi}{3}$ sono punti di massimo relativo (ed assoluto) con $f(x_3) = f(x_4) = \operatorname{arctg} 2$. Nei primi due punti, si ha

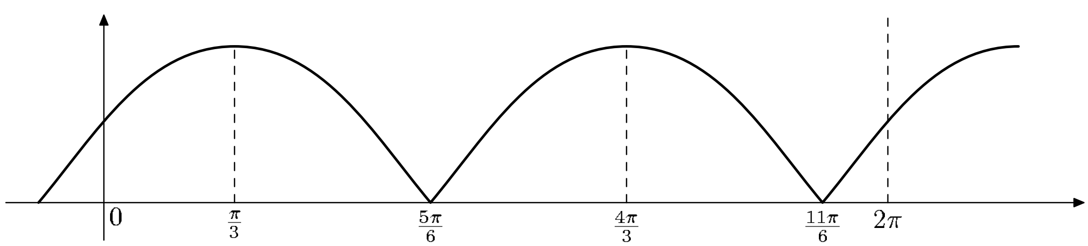
$$f'_-(\tfrac{5\pi}{6}) = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}^-}\frac{f(x)-f(\frac{5\pi}{6})}{x-\frac{5\pi}{6}} = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}^-} f'(x) = -2, \quad f'_+(\tfrac{5\pi}{6}) = 2, \qquad f'_-(\tfrac{11\pi}{6}) = -2, \quad f'_+(\tfrac{11\pi}{6}) = 2,$$

e quindi f non è derivabile in tali punti.

Si osservi che

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{(\sqrt{3}\sin x+\cos x)\left[1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2+2(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2\right]}{\left[1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2\right]^2} & \text{se } x \in [0, \frac{5\pi}{6}) \cup (\frac{11\pi}{6}, 2\pi] \\ \frac{(\sqrt{3}\sin x+\cos x)\left[1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2+2(\sqrt{3}\cos x-\sin x)^2\right]}{\left[1+(\sqrt{3}\sin x+\cos x)^2\right]^2} & \text{se } x \in (\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}) \end{cases}$$

e quindi, dove f è derivabile, la derivata seconda è negativa ed il grafico di f è concavo.



L'andamento di f è quindi descritto dal grafico qui sopra. □

ESERCIZIO 4. *Si consideri*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{x+2}{x-1}}}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ a + bx & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

e si determinino (se esistono) dei numeri reali a e b affinché $f(x)$ risulti continua e derivabile su tutta le retta reale.

Svolgimento. Per $x \neq 1$, f è continua e derivabile, qualunque siano i numeri reali a e b e si ha

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{e^{\frac{x-1}{x+2}}(x+2)}{(x-1)^3} & \text{se } x < 1 \\ b & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Inoltre, $f(1) = a + b = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ e

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{x-1}{x+2}}}{x+2} = \lim_{t\to +\infty} -\frac{1+t}{3e^t} = 0;$$

ove si è fatta la sostituzione $\frac{x+2}{x-1} = -t$. Quindi f è continua per $x = 1$ se, e solo se, $b + a = 0$. Sotto tale ipotesi,

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = b \qquad \text{ed} \qquad f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t(1+t)^2}{9e^t} = 0;$$

ove si è fatta di nuovo la sostituzione $\frac{x+2}{x-1} = -t$. Quindi f è derivabile per $x = 1$ se, e solo se, $b + a = 0$ e $b = 0$. Dunque la funzione cercata deve essere identicamente nulla sulla semiretta $[1, +\infty)$. □

ESERCIZIO 5. *Si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2) + \cos x - \cosh x}{(x + \log(1-x))^3}$$

Svolgimento. Ricordiamo che, in base alle formule di McLaurin, per $x \to 0$ si ha

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), & \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6), & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6), \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), & \log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \end{aligned}$$

da cui si deduce, in particolare che, sempre per $x \to 0$, si ha

$$\operatorname{tg}(x^2) = x^2 + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$$

e quindi

$$\frac{\operatorname{tg}(x^2) + \cos x - \cosh x}{(x + \log(1-x))^3} = \frac{\frac{x^6}{2} - 2\frac{x^6}{6!} + o(x^6)}{(-\frac{x^2}{2} + o(x^2))^3} = \frac{\frac{119}{360}x^6 + o(x^6)}{-x^6/8 + o(x^6)}.$$

In conclusione, il limite cercato è uguale a $-\frac{119}{45}$. □