Istituzioni di Matematiche I (CH-CI-MT)

prova di accertamento del 30 ottobre 1998 – Compito A

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme*

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,|\, |\sin x|^x > 2^{-x/2} \right\},$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli. Si dica infine se esiste $\sup A$.

Svolgimento. Osserviamo che la disequazione che definisce A ha senso per $|\sin x| > 0$ e quindi per $x \neq k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, applicando il logaritmo ad entrambo i membri della disequazione, si ottiene la disequazione equivalente:

$$x \log |\sin x| > -\frac{x}{2} \log 2 \qquad \text{per } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

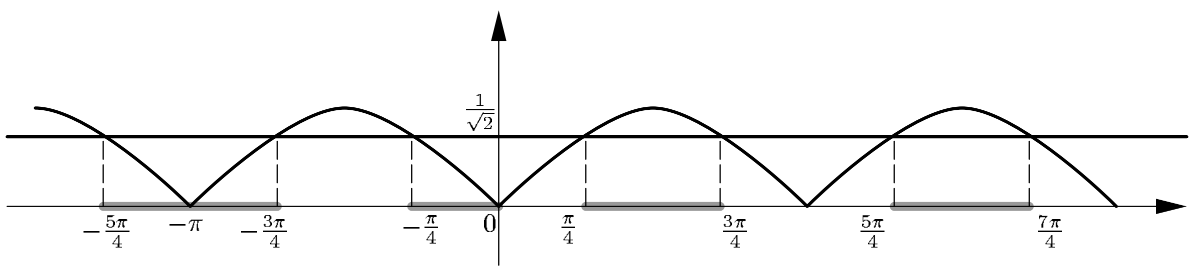
Possiamo eliminare il fattore x che compare ad entrambo i membri della disequazione, tenendo conto del suo segno e ricordare le proprietà elementari della funzione logaritmo, così da ottenere i due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ |\sin x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ |\sin x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Ricordando che $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e le simmetrie della funzione seno, si conclude che l'insieme A si può scrivere come unione di intervalli aperti nel modo seguente

$$A = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (\tfrac{\pi}{4} + k\pi, \tfrac{3\pi}{4} + k\pi) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} (-\pi - k\pi, -\tfrac{3\pi}{4} - k\pi) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty} (-\tfrac{\pi}{4} - k\pi, -k\pi).$$

Un disegno indicativo dell'insieme A si può vedere qui sotto, dove sono stati evidenziati gli intervalli contenuti in A.



L'insieme A è illimitato e quindi non ha estremo superiore. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni il sottoinsieme del piano*

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x+y}{x^2 - 4y} \geq 0 \right\},$$

indicando con chiarezza quali punti del bordo appartengano a B.

Svolgimento. Si tratta di studiare il segno di una frazione, quindi possiamo considerare separatamente i vari casi.

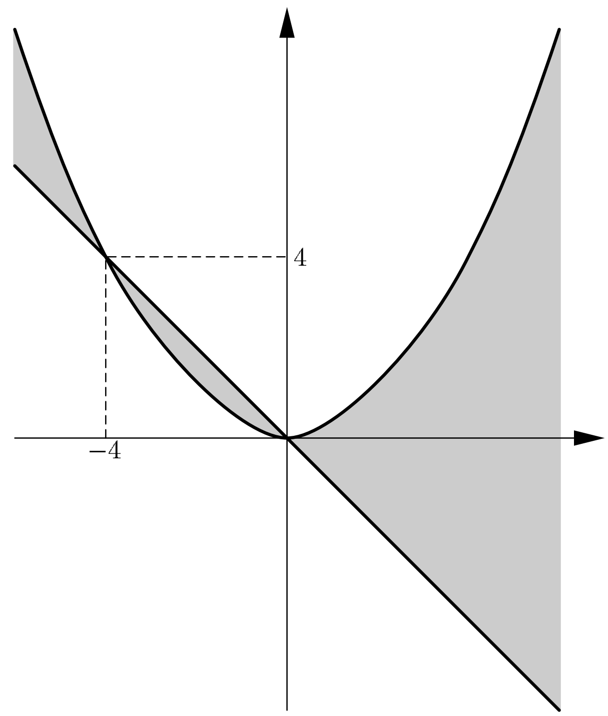
È chiaro che il sottoinsieme B si scrive come unione dei due sottoinsiemi B_1 e B_2, ove

$$B_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0 \text{ e } x^2 - 4y > 0 \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 0 \text{ e } x^2 - 4y < 0 \right\}$$

Dunque, ciascuno dei due sottoinsiemi B_1 e B_2 è intersezione di due porzioni del piano delimitate rispettivamente dalla retta $y = -x$ e dalla parabola $y = \frac{x^2}{4}$. Precisamente, l'insieme B_1 è formato dai punti del semipiano (chiuso) posto al di sopra della retta $y = -x$ che stanno (strettamente) al di sotto della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$; ed analogamente, l'insieme B_2 è formato dai punti del semipiano (chiuso) posto al di sotto della retta $y = -x$ che stanno (strettamente) al di sopra della parabola di equazione $y = \frac{x^2}{4}$.



L'insieme B è quindi rappresentato in grigio nel disegno qui sopra, ove si osservi che i punti della retta $y = -x$ appartengono a B, mentre i punti della parabola $y = \frac{x^2}{4}$ non vi appartengono.

Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino i numeri complessi z che soddisfano l'equazione*

$$z^2 - (2 + i)z + 2 + 4i = 0$$

Svolgimento. Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si trova che le due soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi

$$z_{1,2} = \frac{(2 + i) \pm [(2 + i)^2 - 4(2 + 4i)]^{1/2}}{2},$$

ove $w^{1/2}$ stà ad indicare una qualsiasi radice quadrata del numero w. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $(x+iy)^2 = -5-12i$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ xy = -6 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \mp 3 \end{cases}.$$

Si conclude quindi che $z_1 = 2i$ e $z_2 = 2 - i$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{n \to +\infty} \log \left(n - \frac{n^3}{n^2 + 3n - 2} \right)$$

Svolgimento. Si ha

$$n - \frac{n^3}{n^2 + 3n - 2} = \frac{3n^2 - 2n}{n^2 + 3n - 2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{3n^2 - 2n}{n^2 + 3n - 2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2(3 - \frac{2}{n})}{n^2(1 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2})} = 3.$$

Quindi il limite della successione proposta è $\log 3$. □

ESERCIZIO 5. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n}$$

ed, in caso affermativo, si dica se converge assolutamente.

Svolgimento. Si ha

$$\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari.} \\ (-1)^{k-1} & \text{se } n = 2k-1, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dunque la serie in questione coincide con

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

che è una serie a termini di segno alterno, soddisfacente al criterio di Leibniz e quindi convergente. Non è però assolutamente convergente perchè la serie dei valori assoluti è asintoticamente equivalente alla serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, e quindi divergente. □

ESERCIZIO 1. *Si determini il sottoinsieme*

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} \,|\, |\cos x|^x < 2^{-x} \,\},$$

e lo si scriva (se possibile) come unione di intervalli. Si dica infine se esiste inf A.

Svolgimento. Osserviamo che la disequazione che definisce A ha senso per $|\cos x| > 0$ e quindi per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, applicando il logaritmo ad entrambo i membri della disequazione, si ottiene la disequazione equivalente:

$$x \log|\cos x| < x \log\tfrac{1}{2} \qquad \text{per } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Possiamo eliminare il fattore x che compare ad entrambo i membri della disequazione, tenendo conto del suo segno e ricordare le proprietà elementari della funzione logaritmo, così da ottenere i due sistemi

$$\begin{cases} x > 0 \\ |\cos x| < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x < 0 \\ |\cos x| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ricordando che $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ e le simmetrie della funzione coseno, si conclude che l'insieme A si può scrivere come unione di intervalli aperti nel modo seguente

$$A = (-\tfrac{\pi}{3}, 0) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty}(-\tfrac{4\pi}{3} - k\pi, -\tfrac{2\pi}{3} - k\pi) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty}(\tfrac{\pi}{3} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi) \cup \bigcup_{k=0}^{+\infty}(\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{2\pi}{3} + k\pi).$$

L'insieme A non è limitato e quindi non ammette estremo inferiore. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 2. *Si disegni il sottoinsieme del piano*

$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{y^2 - 3x}{x - y} \geq 0 \right\},$$

indicando con chiarezza quali punti del bordo appartengano a B.

Svolgimento. Si tratta di studiare il segno di una frazione, quindi possiamo considerare separatamente i vari casi.

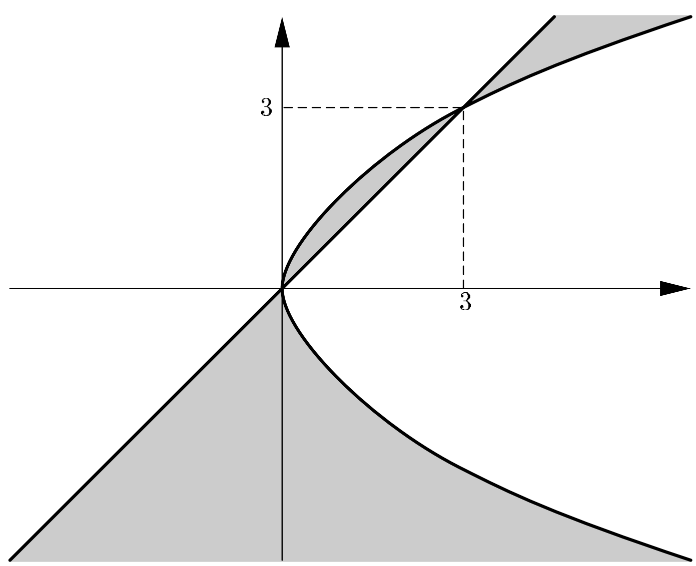
È chiaro che il sottoinsieme B si scrive come unione dei due sottoinsiemi B_1 e B_2, definiti dalle condizioni

$$B_1 : \begin{cases} x - y > 0 \\ y^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$B_2 : \begin{cases} x - y < 0 \\ y^2 - 3x \leq 0 \end{cases}.$$

Dunque, ciascuno dei due sottoinsiemi B_1 e B_2 è intersezione di due porzioni del piano delimitate rispettivamente dalla retta $y = x$ e dalla parabola $x = \dfrac{y^2}{3}$. L'insieme B è quindi rappresentato in grigio nel disegno qui a fianco



Precisamente, l'insieme B_1 è formato dai punti del semipiano (aperto) posto a destra della retta $y = x$ che stanno a sinistra della parabola di equazione $x = \frac{y^2}{3}$ (compresi i punti della parabola); ed analogamente, l'insieme B_2 è formato dai punti del semipiano (aperto) posto a sinistra della retta $y = x$ che stanno a destra della parabola di equazione $x = \frac{y^2}{3}$. Si osservi infine che i punti della parabola appartengono a B, mentre i punti della retta non vi appartengono. Ciò conclude la discussione. □

ESERCIZIO 3. *Si determinino i numeri complessi z che soddisfano l'equazione*

$$z^2 + (2i - 4)z + 3 - 6i = 0$$

Svolgimento. Applicando la formula risolutiva (ridotta) per le equazioni di secondo grado si trova che le due soluzioni dell'equazione sono i numeri complessi

$$z_{1,2} = (2 - i) \pm [(2 - i)^2 - (3 - 6i)]^{1/2},$$

ove $w^{1/2}$ stà ad indicare una qualsiasi radice quadrata del numero w. Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $(x + iy)^2 = 2i$ se, e solo se,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}.$$

Si conclude quindi che $z_1 = 3$ e $z_2 = 1 - 2i$. □

ESERCIZIO 4. *Si calcoli*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n - \frac{4n^4}{2n^3 + 5n^2 - 1}}$$

Svolgimento. Si ha

$$2n - \frac{4n^4}{2n^3 + 5n^2 - 1} = \frac{10n^3 - 2n}{2n^3 + 5n^2 - 1} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{10n^3 - 2n}{2n^3 + 5n^2 - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(10 - \frac{2}{n^2})}{n^3(2 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^3})} = 5.$$

Quindi il limite della successione proposta è $\sqrt{5}$. □

ESERCIZIO 5. *Si dica se converge la serie*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2 - n}$$

ed, in caso affermativo, si dica se converge assolutamente.

Svolgimento. Si ha $\cos(n\pi) = (-1)^n$, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, dunque la serie in questione coincide con

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - n},$$

che è una serie a termini di segno alterno, soddisfacente al criterio di Leibniz e quindi convergente. La serie è anche assolutamente convergente perchè la serie dei valori assoluti è asintoticamente equivalente alla serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, e quindi convergente. □